

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 7

Aufgabe 1: Kugelflächenfunktionen für $l = 1$ und $l = 2$

Berechnen Sie explizit die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ für $l = 1$, $m \in \{-1, 0, 1\}$ und $l = 2$, $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Gehen Sie dazu wie im Skript (Abschnitt 3.12) beschrieben vor:

- (a) Bestimmen Sie $Y_{ll}(\vartheta, \varphi)$ durch Lösen der Gleichung $\hat{L}_+ Y_{ll}(\vartheta, \varphi) = 0$, wobei der „Aufsteigeoperator“ durch

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_1 + i\hat{L}_2 = \hbar \exp(i\varphi)(i \cot \vartheta \partial_\varphi + \partial_\vartheta) \quad (1)$$

gegeben ist. Dabei darf verwendet werden, dass

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \Theta_{lm}(\vartheta) \exp(im\varphi) \quad (2)$$

ist.

Hinweis: Die Lösung ist

$$Y_{ll}(\vartheta, \varphi) = N_l \sin^l \vartheta \exp(il\varphi).$$

Die Normierungskonstante wurde im Skript berechnet. Sie lautet mit der in der Literatur am meisten verwendeten Phasenkonvention

$$N_l = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi} \frac{(-1)^l}{2^l l!}}. \quad (3)$$

- (b) Verwenden Sie dann den „Absteigeoperator“

$$\hat{L}_- = \hat{L}_1 - i\hat{L}_2 = \hbar \exp(-i\varphi)(i \cot \vartheta \partial_\varphi - \partial_\vartheta) \quad (4)$$

um über die Rekursionsformel

$$\hat{L}_- Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_{l, m-1}(\vartheta, \varphi) \quad (5)$$

die Kugelflächenfunktionen für $m = l-1, \dots, -l$ zu berechnen.