

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 3

Aufgabe 1: Operatorgymnastik

Im Folgenden seien \hat{A}, \hat{B}, \dots irgendwelche (nicht notwendig selbstadjungierte Operatoren. Die Definition des zu \hat{A} adjungierten Operators \hat{A}^\dagger ist, dass für alle Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ stets

$$\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi | \phi \rangle \quad (1)$$

gilt.

Weiterhin ist für zwei Operatoren der Kommutator durch

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (2)$$

definiert. Zeigen Sie folgende Identitäten

- (a) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$.
- (b) $[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = -[\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger]$.
- (c) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$.
- (d) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$.

Aufgabe 2: Orts- und Impulsoperatoralgebra

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass in der Ortsdarstellung

$$\hat{x}\psi(\vec{x}) = \vec{x}\psi(\vec{x}), \quad \hat{p}\psi(\vec{x}) = -i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{x}) \quad (3)$$

gilt.

- (a) Zeigen Sie, dass die sog. Heisenberg-Algebra gilt, also die folgenden Kommutatorrelationen für die Operatoren der Orts- und Impulskomponenten:

$$[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = 0, \quad [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0, \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}\mathbb{1}. \quad (4)$$

- (b) Wie in der klassischen Mechanik definieren wir den Operator für den (Bahn-) Drehimpuls durch

$$\hat{L} = \hat{x} \times \hat{p} \quad \text{bzw.} \quad \hat{L}_j = \epsilon_{jkl}\hat{x}_k\hat{p}_l. \quad (5)$$

Diskutieren Sie, ob dabei Probleme mit der Reihenfolge der Operatoren infolge der Nichtkommutativität der Orts- und Impulsoperatoren auftreten.

- (c) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme der bei Aufgabe 1 bewiesenen Formeln (c) und (d), dass die Drehimpulse die Kommutatoralgebra

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\epsilon_{jkl}\hat{L}_l \quad (6)$$

erfüllen.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<https://th.physik.uni-frankfurt.de/~hees/theo3-13-WS1920/index.html>