Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Lösungen 5

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Vektorpotential eines quellenfreien Vektorfeldes

Wir wollen zeigen, dass für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{V}$, das „quellenfrei" ist, für das also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{1}$$

gilt, stets ein Vektorpotential $\vec{A}$ existiert, so dass

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2}$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\vec{A}$ nur bis auf den Gradienten eines Skalarfeldes bestimmt sein kann, d.h. wenn $\vec{A}$ (2) erfüllt, so erfüllt auch

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \tag{3}$$

für beliebige skalare Felder χ diese Gleichung.

Lösung: Wir berechnen die Rotation

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{V}. \tag{4}$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\chi) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1\chi \\ \partial_2\chi \\ \partial_3\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2\partial_3\chi - \partial_3\partial_2\chi \\ \partial_3\partial_1\chi - \partial_1\partial_3\chi \\ \partial_1\partial_2\chi - \partial_2\partial_1\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ist.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass man für eine beliebige Lösung $\vec{A}$ von Gl. (2) man stets ein Feld χ finden kann, so dass gemäß (3) $A_3' = 0$ ist. Wir dürfen im Folgenden also Annehmen, dass das Vektorpostential neben der Gleichung (2) die zusätzliche „axiale Eichbedingung"

$$A_3 = 0 \tag{6}$$

erfüllt.

Lösung: Für die 3. Komponente von $\vec{A}'$ gilt $A_3' = A_3 + \partial_3\chi \stackrel{!}{=} 0$. Damit folgt

$$\partial_3\chi = -A_3 \;\Rightarrow\; \chi(x_1, x_2, x_3) = -\int \mathrm{d}x_3 A_3(x_1, x_2, x_3). \tag{7}$$

(c) (5 Punkte) Schreiben Sie nun die Gleichung (25) für ein Potential, das die axiale Eichbedingung (6) erfüllt, in Komponentenschreibweise explizit hin und lösen Sie die Gleichungen für A_1 und A_2 durch direkte Integration und zeigen Sie, dass dann tatsächlich (25) gelöst ist, vorausgesetzt die Bedingung der Quellenfreiheit (1) für das Vektorfeld $\vec{V}$ ist erfüllt.

Lösung: Es ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_3 A_2 \\ \partial_3 A_1 \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Aus der ersten Komponente der Gleichung schließen wir, dass wir

$$A_2(x_1,x_2,x_3) = -\int_{x_{03}}^{x_3} \mathrm{d}x_3' V_1(x_1,x_2,x_3') + \tilde{A}_2(x_1,x_2) \tag{9}$$

setzen müssen. Dabei ist x_{03} beliebig im Definitionsbereich von $\vec{V}$ und $\tilde{A}_2$ eine beliebige Funktion, die nur von x_1 und x_2, *nicht* aber von x_3 abhängt.

Aus der zweiten Komponente der Gleichung (9) folgt

$$A_1(x_1,x_2,x_3) = \int_{x_{03}}^{x_3} \mathrm{d}x_3' V_2(x_1,x_2,x_3') + \tilde{A}_1(x_1,x_2), \tag{10}$$

wobei $\tilde{A}_1$ eine beliebige Funktion ist, die nur von x_1 und x_2, *nicht* aber von x_3 abhängt.

Setzen wir (9) und (10) in die dritte Komponente von (8) ein, folgt

$$-\int_{x_{03}}^{x_3} \mathrm{d}x_3' [\partial_1 V_1(x_1,x_2,x_3') + \partial_2 V_2(x_1,x_2,x_3')] + \partial_1 \tilde{A}_2(x_1,x_2) - \partial_2 \tilde{A}_1(x_1,x_2) \stackrel{!}{=} V_3(x_1,x_2,x_3). \tag{11}$$

Wegen (1) ist $\partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 = -\partial_3 V_3$. Setzen wir dies in (12) ein, folgt

$$\begin{aligned}\int_{x_{03}}^{x_3} \mathrm{d}x_3' \partial_3 V_3(x_1,x_2,x_3') + \partial_1 \tilde{A}_2(x_1,x_2) - \partial_2 \tilde{A}_1(x_1,x_2) &= V_3(x_1,x_2,x_3) - V_3(x_1,x_2,x_{03}) \\ &\quad + \partial_1 \tilde{A}_2(x_1,x_2) - \partial_2 \tilde{A}_1(x_1,x_2) \\ &\stackrel{!}{=} V_3(x_1,x_2,x_3).\end{aligned} \tag{12}$$

Wählen wir nun willkürlich $\tilde{A}_1 = 0$, folgt

$$\tilde{A}_1 = 0 \Rightarrow \partial_1 \tilde{A}_2(x_1,x_2) = V_3(x_1,x_2,x_{03}). \tag{13}$$

Man beachte, dass die rechte Seite *nicht* von x_3 abhängt, d.h. wir können die Gleichung einfach integrieren, um

$$\tilde{A}_2(x_1,x_2) = \int_{x_{01}}^{x_1} \mathrm{d}x_1' V_3(x_1',x_2,x_{03}) \tag{14}$$

zu erhalten.

Das gefundene Vektorpotential ist also insgesamt durch

$$A_1(x_1,x_2,x_3) \stackrel{(10,13)}{=} \int_{x_{03}}^{x_3} \mathrm{d}x_3' V_2(x_1,x_2,x_3') \tag{15}$$

$$A_2(x_1,x_2,x_3) \stackrel{(9,13)}{=} -\int_{x_{03}}^{x_3} \mathrm{d}x_3' V_1(x_1,x_2,x_3') + \int_{x_{01}}^{x_1} \mathrm{d}x_1' V_3(x_1',x_2,x_{03}). \tag{16}$$

$$A_3(x_1,x_2,x_3) = 0. \tag{17}$$

Schließlich prüfen wir durch Bilden der entsprechenden Ableitungen nach, dass für diese Lösung tatsächlich $\vec{V} = \nabla \times \vec{A}$ gilt. Es ist

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2. = -\partial_3 A_2, \tag{18}$$

letzteres, weil in der Axialeichung gemäß (17) $A_3 = 0$ ist. In (16) hängt nun nur der erste Term von x_3 ab, und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist also

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 = V_1, \tag{19}$$

wie es sein soll.

Weiter ist

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \overset{(17)}{=} \partial_3 A_1 \overset{(15)}{=} V_2, \tag{20}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet haben.

Schließlich ist

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \\ &\overset{(15+16)}{=} -\int_{x_{03}}^{x_3} \mathrm{d}x_3' \partial_1 V_1(x_1, x_2, x_3') + V_3(x_1, x_2, x_{03}) - \int_{x_{03}}^{x_3} \mathrm{d}x_3' \partial_2 V_2(x_1, x_2, x_3').\end{aligned} \tag{21}$$

Fasst man die beiden Integrale zusammen, folgt mit (1)

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 &= -\int_{x_{03}}^{x_3} \mathrm{d}x_3' \left[\partial_1 V_1(x_1, x_2, x_3') + \partial_2 V_2(x_1, x_2, x_3')\right] + V_3(x_1, x_2, x_{03}) \\ &= +\int_{x_{03}}^{x_3} \mathrm{d}x_3' \partial_3' V_3(x_1, x_2, x_3') + V_3(x_1, x_2, x_{03}) \\ &= V_3(x_1, x_2, x_3) - V_3(x_1, x_2, x_{03}) + V_3(x_1, x_2, x_{03}) = V_3(x_1, x_2, x_3).\end{aligned} \tag{22}$$

Damit ergeben (19), (20) und (22), dass insgesamt tatsächlich $\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ist. QED.

Aufgabe 2: Magnetfeld des unendlich langen Drahtes

Ein zylinderförmiger unendlich langer Draht mit Radius a entlang der x_3-Achse eines kartesischen Koordinatensystems sei von einem Strom $I = \text{const}$ durchflossen. Die Stromdichte sei entsprechend $\vec{j} = I\Theta(a - R)\vec{e}_3/(\pi a^2)$, wobei $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ist.

(a) Bestimmen Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ ($\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$), indem Sie mit Hilfe des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} \tag{23}$$

zeigen, dass es in kartesischen Koordinaten die vektorielle Poisson-Gleichung

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \tag{24}$$

erfüllt, vorausgesetzt, das Vektorpotential genügt der Coulomb-Eichbedingung

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \tag{25}$$

Hinweis: Sie können die Formeln in Anhang C.3 des Manuskripts verwenden!

Lösung: In Anhang C.3 des Manuskripts wurde die Formel

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \tag{26}$$

für beliebige Vektorfelder angegeben. Sie lässt sich mit Hilfe der Formel

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{27}$$

für die Kontraktion des Levi-Civita-Symbols zeigen (vgl. Anhang C.2 im Manuskript). Damit erhält man

$$\begin{aligned}[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_j &= \epsilon_{jki}\partial_k \epsilon_{ilm}\partial_l A_m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}\partial_k\partial_l A_m \\ &= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\partial_k\partial_l A_m \\ &= \partial_j\partial_k A_k - \partial_k\partial_k A_j = [\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A}]_j.\end{aligned} \tag{28}$$

In Coulomb-Eichung gilt die Eichfixierungsbedingung

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \tag{29}$$

und damit wegen $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} = -\Delta\vec{A}, \tag{30}$$

und das war zu zeigen.

(b) Begründen Sie, dass aufgrund der Symmetrie des Problems der Ansatz

$$\vec{A} = A(R)\vec{e}_z \tag{31}$$

plausibel ist, wobei (R, φ, z) die üblichen Zylinderkoordinaten (vgl. Anhang A.2 des Manuskripts) sind.

Lösung: Wie soeben gezeigt gilt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = -\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}. \tag{32}$$

Da $\vec{j}$ überall in die Richtung $\vec{e}_3$ weist, sollte dies auch für $\vec{A}$ der Fall sein. Da ferner das Problem symmetrisch unter Translationen entlang der x_3-Achse und unter Rotationen um die x_3-Achse ist, muss $\vec{A}$ von der Form (31) sein, d.h. der Betrag von $\vec{A}$ kann in den Standard-Zylinderkoordinaten (R, φ, z) geschrieben nur von R abhängen.

(c) Zeigen Sie unter Verwendung der Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts, dass die Coulomb-Eichbedingung (25) für beliebige Funktionen $A(R)$ erfüllt ist.

Lösung: Da $\vec{A} = A(R)\vec{e}_z$, gilt nach Gl. (A.2.5) einfach $\operatorname{div}\vec{A} = \partial_z A(R) = 0$, d.h. (25) ist für beliebiges $A(R)$ erfüllt.

(d) Schreiben Sie nun die Gleichung (23) in Zylinderkoordinaten und lösen Sie unter Beachtung der Randbedingungen des Magnetfeldes am Zylinderrand die Differentialgleichung für $A(R)$. Berechnen Sie dann via $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ das Magnetfeld.

Lösung: Mit Gl. (A.2.6) im Manuskript folgt

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = -\vec{e}_\varphi A'(R) \tag{33}$$

und damit weiter, nochmals vermöge Gl. (A.2.6) im Manuskript

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = -\frac{1}{R}[RA'(R)]'\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\Theta(a-R)\vec{e}_z. \tag{34}$$

Bemerkung: Hier dürfte übrigens auch die naive Formel (A.2.7) für den Laplace-Operator angewandt werden, weil der Basisvektor $\vec{e}_z = \text{const}$ ist.

Für $R < a$ gilt

$$[RA'_<(R)]' = -\frac{\mu_0 I R}{\pi a^2} \Rightarrow RA'_<(R) = -\frac{\mu_0 I R^2}{2\pi a^2} + C_1 \Rightarrow A_<(R) = -\frac{\mu_0 I R^2}{4\pi a^2} + C_1 \ln\left(\frac{R}{a}\right) + C_2. \tag{35}$$

Da $A_<$ in $R = 0$ nicht singulär werden darf, ist $C_1 = 0$.

Für $R > a$ erhält man dieselbe allgemeine Lösung mit $I = 0$, d.h.

$$A_>(R) = C'_1 \ln\left(\frac{R}{a}\right) + C'_2. \tag{36}$$

Da ohnehin nur $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ physikalisch relevant ist, können wir $C'_2 = 0$ setzen. Weiter sollte $\vec{A}$ stetig bei $R = a$ sein, d.h.

$$A_>(a) = 0 = A_<(a) = C_2 - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Rightarrow C_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}. \tag{37}$$

Damit haben wir bis jetzt

$$A(R) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) & \text{für} \quad R < a, \\ C'_1 \ln\left(\frac{R}{a}\right) & \text{für} \quad R \geq a. \end{cases} \tag{38}$$

Da keine Flächenstromdichten vorhanden sind, muss auch $\vec{B}$ bei $R = a$ stetig sein. Mit (33) und (38) folgt

$$\vec{B} = -\vec{e}_\varphi A'(R) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I R}{2\pi a^2} \vec{e}_\varphi & \text{für} \quad R < a, \\ \frac{C'_1}{R} \vec{e}_\varphi & \text{für} \quad R \geq a. \end{cases} \tag{39}$$

Stetigkeit bei $R = a$ verlangt also

$$\frac{C'_1}{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \Rightarrow C'_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}. \tag{40}$$

Damit ist

$$\vec{B} = -\vec{e}_\varphi A'(R) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I R}{2\pi a^2} \vec{e}_\varphi & \text{für} \quad R < a, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\varphi & \text{für} \quad R \geq a. \end{cases} \tag{41}$$
