

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 6

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Magnetostatisches Vektorpotential

Wir betrachten die stationären Maxwell-Gleichungen (im Vakuum), also die Maxwell-Gleichungen, wenn alle Felder, also $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ und $\vec{j}$ zeitunabhängig sind. Dann zerfallen die Maxwell-Gleichungen in getrennte Gleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Für $\vec{E}$ ergeben sich dieselben Gleichungen wie für die Elektrostatik, und diese interessieren uns in dieser Aufgabe nicht, d.h. wir beschäftigen uns nur mit dem $\vec{B}$ -Feld. Gehen Sie dazu wie folgt vor

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich die Maxwell-Gleichungen zu

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

vereinfachen. Wie oben gesagt, interessieren uns die elektrostatischen Gleichungen (1) nicht weiter.

- (b) (4 Punkte) Argumentieren Sie, warum es ein Vektorpotential $\vec{A}$ für $\vec{B}$ geben muss, so dass

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3)$$

ist und dass man zusätzlich die **Coulomb-Eichbedingung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4)$$

fordern darf, ohne die Lösungen für $\vec{B}$ irgendwie einzuschränken.

Hinweis: Verwenden Sie die Resultate der Aufgabe 1 vom vorigen Übungsblatt!

- (c) (2 Punkte) Zeigen Sie dann mit Hilfe von (2-4), dass

$$-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (5)$$

gelten muss.

- (d) (3 Punkte) Die Lösungen kennen wir aus der Elektrostatik (s. Green-Funktion für $(-\Delta)$ im Skript!):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6)$$

Berechnen Sie schließlich das Magnetfeld aus

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (7)$$

Das Resultat kennt man als **Biot-Savart-Gesetz**.

Freiwillige Knobelaufgabe (mit 10 Zusatzpunkten!): magnetostatischer Punktdipol

In der folgenden Aufgabe wollen wir untersuchen, inwiefern sich ein magnetisches Dipolfeld unterscheidet, wenn man annimmt, dass es einerseits aus „Molekularströmen“ stammt (entsprechend der gewöhnlichen Maxwell-Gleichungen mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, also der Annahme, dass es keine magnetischen Ladungen/Monopole gibt), vielleicht andererseits aber auch aus einem statischen Dipol aus einer positiven und einer negativen Magnetladung $\pm Q_{\text{mag}}$ besteht. Wir nennen dies das „**Strommodell**“ bzw. das „**Polmodell**“ für das magnetische Moment von Teilchen.

Dass überhaupt ein Unterschied besteht, ergibt sich nur mit Hilfe der „regularisierten Punktmultipolrechnung“ im Skript (Abschnitt 1.7.1¹), verallgemeinert auf die Magnetostatik

Für das „**Strommodell**“ gilt für das regularisierte Vektorpotential eine Punktdipols, der im Ursprung lokalisiert ist,

$$\vec{A}_\epsilon(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{m} \times \nabla \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 + \epsilon^2}} = + \frac{\mu_0}{4\pi(r^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \vec{m} \times \vec{r}. \quad (8)$$

- (a) (3 Punkte) Zeigen Sie durch Berechnung der Rotation, dass

$$\vec{B}_\epsilon(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{m}}{(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}} + \frac{2\epsilon^2 \vec{m}}{(\epsilon^2 + r^2)^{5/2}} \right] \quad (9)$$

gilt.

- (b) (3 Punkte) Zeigen Sie weiter, indem Sie wie im Skript erklärt den “schwachen Limes” $\epsilon \rightarrow 0$ berechnen, dass sich dann

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{w-lim}_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m} r^2] + \frac{2}{3} \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (10)$$

ergibt.

- (c) (4 Punkte) In einem von der Standardelektrodynamik abweichenden Modell, in dem es magnetische Monopole gibt, gilt in Analogie zum elektrischen Feld

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_{\text{mag}}. \quad (11)$$

Selbst wenn man annimmt, dass in der Natur keine isolierten Magnetladungen vorkommen, könnte es dann gleichwohl sein, dass es Punktdipole gibt, die sich aus zwei Magnetladungen $\pm Q_{\text{mag}}$ zusammensetzen. Nehmen wir weiter an, dass dies die einzige Quelle für das magnetische Moment ist, d.h. dass nicht auch noch zusätzlich eine Stromquelle vorliegt, folgt in vollkommener Analogie zum entsprechenden elektrostatischen Fall (s. Skript Abschn. 1.7.1) für das „regularisierte Punktdipolfeld“

$$\vec{B}_\epsilon(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi_\epsilon(\vec{r}) \quad (12)$$

mit dem magnetostatischen Potential

$$\Phi_\epsilon(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{(\epsilon^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (13)$$

Zeigen Sie, dass dann (natürlich analog wie in der Elektrostatik)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{w-lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{B}_\epsilon(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m} r^2] - \frac{1}{3} \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (14)$$

gilt.

¹Achtung: das ist erst Ende Mai 2025 eingefügt worden, also Skript ggf. neu herunterladen!

Bemerkung: Auf den ersten Blick scheint der Unterschied zwischen (10) und (14) irrelevant zu sein, da man aus „makroskopischer Sicht“ behaupten kann, dass sich dieser Unterschied nicht nachmessen lässt, da er nur den singulären Anteil mit der δ -Distribution betrifft, und man bei $\vec{r} = 0$ auch noch die Singularität von dem „gewöhnlichen Dipolfeld“ hat. Makroskopisch kann man also mit einigem Recht behaupten, dass man das „Strommodell“ vom „Polmodell“ eines magnetischen Punktdipols nie unterscheiden kann, d.h. es könnte sehr wohl sein, dass gewöhnliche makroskopische Permanentmagneten, wo man ohnehin nur weit weg vom Magneten selber in guter Näherung ein reines Dipolfeld, hat, sich aus Polpunktdipolen und nicht aus Strompunktdipolen zusammensetzt, wie in den gewöhnlichen Maxwell-Gleichungen angenommen. Das ändert sich aber in der Atomphysik. Betrachtet man z.B. ein Wasserstoffatom etwas genauer, kann man als Korrektur zur üblichen Rechnung mit der Schrödinger-Gleichung für ein Elektron im Coulomb-Feld des Protons auch noch die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Dipolmoment des Protons und dem des Elektrons als Störung in Betracht ziehen. In der niedrigsten Ordnung der Störungsrechnung für den Grundzustand des Wasserstoffatoms (ein s -Wellen-Zustand, mit Drehimpulsquantenzahl $\ell = 0$) ergibt dies eine Feinstrukturaufspaltung des Grundzustandes

$$\Delta E = -\langle \psi_0 | \vec{m}_e \cdot \vec{B}_p | \psi_0 \rangle = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r \vec{m}_e \cdot \vec{B}_p(\vec{r}) |\psi(\vec{r})|^2, \quad (15)$$

wobei die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(\vec{r}) = \psi_0(r)$ entsprechend der Bahndrehimpulsquantenzahl radialsymmetrisch ist (in Kugelkoordinaten also nicht von ϑ und φ abhängt). Das Winkelintegral über das gewöhnliche Dipolfeld des Protons $\vec{B}_p$ verschwindet, und es bleiben nur der Beitrag von dem singulären δ -Distributionsbeitrag, die sog. Kontaktwechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten von Proton und Elektron, übrig, und der unterscheidet sich ja gerade zwischen Pol- und Strommodell. Entsprechend erhält man

$$\Delta E = -\frac{2}{3} \lambda \langle \vec{m}_e \cdot \vec{m}_p \rangle |\psi_0(0)|^2. \quad (16)$$

Dabei ist $\lambda = 1$ für das von der Standard-Elektrodynamik zu erwartende Resultat des Strommodells bzw. $\lambda = -1/2$ für das alternative Polmodell. Die Spektroskopie ergibt eindeutig mit höchster Präzision $\lambda = 1$. Für Wasserstoff ist das die berühmte 21 cm-Linie der Radioastronomie (21 cm ist dabei die Wellenlänge der entsprechenden Mikrowellenstrahlung dieses Hyperfeinübergangs von atomarem (!) Wasserstoff). Genauer dazu finden Sie in [Jac77].

Literatur

[Jac77] J. D. Jackson, The Nature of Intrinsic Magnetic Dipole Moments, CERN-77-17, CERN-YELLOW-77-17 (1977).
URL <https://doi.org/10.5170/CERN-1977-017>

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-l3-SS24/index.html>