

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 7

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Vektorpotential eines quellenfreien Vektorfeldes

Wir wollen zeigen, dass für ein beliebiges Vektorfeld \vec{V} , das „quellenfrei“ ist, für das also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

gilt, stets ein Vektorpotential \vec{A} existiert, so dass

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2)$$

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass \vec{A} nur bis auf den Gradienten eines Skalarfeldes bestimmt sein kann, d.h. wenn \vec{A} (2) erfüllt, so erfüllt auch

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad (3)$$

für beliebige skalare Felder χ diese Gleichung.

- (b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass man für eine beliebige Lösung \vec{A} von Gl. (2) man stets ein Feld χ finden kann, so dass gemäß (3) $A'_3 = 0$ ist. Wir dürfen im Folgenden also annehmen, dass das Vektorpotential neben der Gleichung (2) die zusätzliche „axiale Eichbedingung“

$$A_3 = 0 \quad (4)$$

erfüllt.

- (c) (5 Punkte) Schreiben Sie nun die Gleichung (7) für ein Potential, das die axiale Eichbedingung (4) erfüllt, in Komponentenschreibweise explizit hin und lösen Sie die Gleichungen für A_1 und A_2 durch direkte Integration und zeigen Sie, dass dann tatsächlich (7) gelöst ist, vorausgesetzt die Bedingung der Quellenfreiheit (1) für das Vektorfeld \vec{V} ist erfüllt.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Magnetfeld des unendlich langen Drahtes

Ein zylinderförmiger unendlich langer Draht mit Radius a entlang der x_3 -Achse eines kartesischen Koordinatensystems sei von einem Strom $I = \text{const}$ durchflossen. Die Stromdichte sei entsprechend $\vec{j} = I\Theta(a - R)\vec{e}_3/(\pi a^2)$, wobei $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ist.

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie das Vektorpotential \vec{A} ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$), indem Sie mit Hilfe des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (5)$$

zeigen, dass es in kartesischen Koordinaten die vektorielle Poisson-Gleichung

$$\text{rot rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (6)$$

erfüllt, vorausgesetzt, das Vektorpotential genügt der Coulomb-Eichbedingung

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (7)$$

Hinweis: Sie können die Formeln in Anhang C.3 des Manuskripts verwenden!

(b) [2 Punkte] Begründen Sie, dass aufgrund der Symmetrie des Problems der Ansatz

$$\vec{A} = A(R)\vec{e}_z \quad (8)$$

plausibel ist, wobei (R, φ, z) die üblichen Zylinderkoordinaten (vgl. Anhang A.2 des Manuskripts) sind.

(c) [2 Punkte] Zeigen Sie unter Verwendung der Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts, dass die Coulomb-Eichbedingung (7) für beliebige Funktionen $A(R)$ erfüllt ist.

(d) [3 Punkte] Schreiben Sie nun die Gleichung (5) in Zylinderkoordinaten und lösen Sie unter Beachtung der Randbedingungen des Magnetfeldes am Zylinderrand die Differentialgleichung für $A(R)$. Berechnen Sie dann via $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ das Magnetfeld.
