Aufgabe 1

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Beispiel zum Gaußschen Integralsatz

Es sei V der Kreiszylinder parallel zur x_3-Achse eines kartesischen Koordinatensystems mit Radius 2 und $x_3 \in [0,3]$. Verifizieren Sie dann den Gaußschen Integralsatz

$$\int_V \mathrm{d}^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{x}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\vec{V}(\vec{x}) \tag{1}$$

für das Vektorfeld, das in kartesischen Koordinaten durch

$$\vec{V}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ -2x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

gegeben ist, indem Sie das Volumen- und das Flächenintegral konkret ausrechnen.

Hinweis: Es empfiehlt sich, für die Berechnung des Volumen- und des Flächenintegrals Zylinderkoordinaten (R, φ, z) gemäß

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

einzuführen und das Volumenelement d^3x und die Flächenelemente $\mathrm{d}^2\vec{f}$ für die drei die Randfläche ergebenden Teilflächen (Kreisscheiben für „Boden und Deckel" des Zylinders und die Mantelfäche) zu berechnen.

Linke Seite:

Divergenz: $\operatorname{div}\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\vec{V}(\vec{x}) = \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3 = 4 - 4x_2 + 2x_3$ (i)

Volumenelem.: $d^3x = dR\,d\varphi\,dz\,(\partial_R\vec{x}\times\partial_\varphi\vec{x})\cdot\partial_z\vec{x}$

$= dR\,d\varphi\,dz\cdot R$ (ii)

Zyl.koo in (i) eins. $\vec{\nabla}\vec{V} = 4 - 4R\sin\varphi + 2z$

$r = 2$
$h = 3$

$$\int \vec{\nabla}\vec{V}(\vec{x})\,d^3x = \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^h R\cdot(4 - 4R\sin\varphi + 2z)\,dz\,d\varphi\,dR$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^3 R\cdot(4 - 4R\sin\varphi + 2z)\,dz\,d\varphi\,dR$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} R\cdot\left[\cancel{4z} - 4R\sin\varphi\cdot z + z^2\right]_0^3 d\varphi\,dR$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} R\cdot(21 - 12\cdot R\cdot\sin\varphi\cdot)\,d\varphi\,dR$$

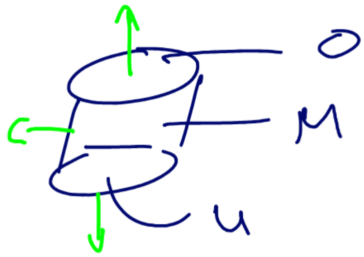
$$= \int_0^2 R\cdot\left[21\varphi + 12\,R\cdot\cos\varphi\right]_0^{2\pi} dR$$

$$= \int_0^2 R\cdot(42\pi + 12R - 12R)\,dR = \int_0^2 42\pi\cdot R\,dR$$

$$= 42\pi\cdot\int_0^2 R\,dR = 42\pi\cdot\left[\tfrac{1}{2}R^2\right]_0^2 = 84\pi \quad \text{(iv)}$$

Rechten Seite:

$$\int_{\partial V} \vec{v}(\vec{x})\,d\vec{f}$$



U: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ O: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 3 \end{pmatrix}$ $R\in[0,2]$, $\varphi\in[0,2\pi]$

M: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ $\varphi\in[0,2\pi]$, $z\in[0,3]$

Für $\vec{f_u}$ in $-\vec{e_3}$ und $\vec{f_o}$ in $+\vec{e_3}$ Richtung

Bestimmung $d^2\vec{f}$:

U: $d^2\vec{f_u} = -dR\,d\varphi\cdot R\cdot\vec{e_3}$

* Werte für x_1, x_2, x_3 der Unterseite in (2) eingesetzt

$$\int_U \vec{v}\,d^2\vec{f_u} = -\int_U \vec{v}\cdot\vec{e_3}\,dR\,d\varphi = -\int_U R\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 4R\cos\varphi \\ -2R^2\sin^2\varphi \\ z^2 \end{pmatrix}^{*}}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dR\,d\varphi$$

$$= \int_U R\cdot z^2\,dR\,d\varphi = \int 0\,dR\,d\varphi = 0 \quad \text{(vi)}$$

O: $d^2\vec{f_o} = +dR\,d\varphi\cdot R\cdot\vec{e_3}$ (analog zu $d^2\vec{f_u}$)

$$\int_O \vec{v}\,d^2\vec{f_o} = \int_O v_3\,d^2 f_o = \int_0^2\int_0^{2\pi} R\cdot z^2\,d\varphi\,dR \overset{z=3}{=} \int_0^2\int_0^{2\pi} 9\cdot R\,d\varphi\,dR$$

$$= \int_0^2 \left[9R\cdot\varphi\right]_0^{2\pi} dR = \int_0^2 18\pi\cdot R\,dR = 18\pi\int_0^2 R\,dR = 36\pi \quad \text{(vii)}$$

M: $d^2\vec{f}_M = d\varphi\, dz\ \partial_\varphi \vec{x} \times \partial_z \vec{x} = d\varphi\, dz \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= 2 \cdot d\varphi\, dz \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\int_M \vec{v}\, d^2\vec{f}_M = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^3 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}\, dz\, d\varphi$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^3 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos\varphi \\ -8 \sin^2\varphi \\ z^2 \end{pmatrix}^{*} dz\, d\varphi$$

* Werte für x_1, x_2, x_3 der Mantelfläche in (2) eingesetzt

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^3 (8\cos^2\varphi - 8\sin^3\varphi)\, dz\, d\varphi$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \left[8 \cdot z\, (\cos^2\varphi - \sin^3\varphi) \right]_0^3 d\varphi$$

$$= 48 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi - \sin^3\varphi\, d\varphi = 48\pi \qquad \text{(viii)}$$

Links (iv)

84π

Rechts (vi) + (vii) + (viii)

$84\pi = 0\pi + 36\pi + 48\pi$

$\Rightarrow$ Gauß. IGS gilt

$\square$