Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 13

Aufgabe 1: Schwerpunktsberechnungen

Der Schwerpunkt eines Körpers K ist durch

$$\vec{x}_{\text{s}} = \frac{1}{M} \int_K \mathrm{d}^3\vec{x}\, \rho(\vec{x})\vec{x} \tag{1}$$

gegeben. Dabei ist $\rho(\vec{x})$ die Massendichte des Körpers, und M die Gesamtmasse.
Das Trägheitsmoment um die x_3-Achse durch den Schwerpunkt ist

$$\Theta_{33} = \int_K \mathrm{d}^3 x\, \rho(\vec{x})[(x_1 - x_{\text{s}1})^2 + (x_2 - x_{\text{s}2})^2] \tag{2}$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment Θ_{33} folgender homogener ($\rho = \text{const}$) Körper mit Gesamtmasse M:

(a) der Halbkugel vom Radius a

$$\vec{x}(r,\vartheta,\varphi) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad r \in [0,a], \quad \vartheta \in [0,\pi/2], \quad \varphi \in [0,2\pi]. \tag{3}$$

Hinweise: Berechnen Sie zunächst das Volumen V der Halbkugel und damit $\rho = M/V$.
Das Volumenelement in den hier verwendeten Kugelkoordinaten ist $\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\, r^2 \sin\vartheta$.

Lösung: Mit der angegebenen Parametrisierung der Halbkugel ergibt sich zunächst das Volumen

$$V = \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta\, r^2 \sin\vartheta = \frac{2\pi}{3} a^3 \tag{4}$$

und damit $\rho = 3M/(2\pi a^3)$. Für den Schwerpunkt folgt daher

$$\vec{x}_{\text{s}} = \frac{\rho}{M} \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta\, r^2 \sin\vartheta\, r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \frac{3}{8} a \vec{e}_z. \tag{5}$$

Das Trägheitsmoment um die x_3-Achse ist

$$\Theta_{33} = \frac{M}{V} \int_0^a \mathrm{d}R \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, r^4 \sin^3\vartheta = \frac{2}{5} M a^2. \tag{6}$$

(b) des geraden Kreiskegels vom Radius a und Höhe h

$$\vec{x}(R,\varphi,z) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Dabei ist $z \in [0,h]$, $\varphi \in [0,2\pi]$ und für jedes z ist $R \in [0, az/h]$ (warum?).

Hinweis: Berechnen Sie zunächst wieder das Volumen des Kegels und damit $\rho = M/V$. Das Volumenelement der hier verwendeten Zylinderkoordinaten ist $\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,R$.

Lösung: Für den geraden Kreiskegel ergibt sich entsprechend

$$V = \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{az/h} \mathrm{d}RR = \frac{\pi}{3} a^2 h \tag{8}$$

und $\rho = 3M/(\pi a^2 h)$. Der Schwerpunkt ist demnach

$$\vec{x}_\mathrm{s} = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{az/h} \mathrm{d}RR \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \frac{3}{4} h \vec{e}_z \tag{9}$$

und das Trägheitsmoment um die x_3-Achse

$$\Theta_{33} = \frac{M}{V} \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{az/h} \mathrm{d}R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi R^3 = \frac{3}{10} M a^2. \tag{10}$$

Aufgabe 2: Satz von Steiner

Wir legen zunächst den Ursprung eines körperfesten kartesischen Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers, d.h. es gilt

$$\int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x}) \vec{x} = \vec{0}. \tag{11}$$

Der Trägheitstensor um den Schwerpunkt ist dann durch

$$\Theta_{jk}^{(\mathrm{S})} = \int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x}) (\vec{x}^2 \delta^{jk} - x^j x^k) \tag{12}$$

definiert.

(a) Sei dann $\vec{r}$ der Ortsvektor eines beliebigen anderen festen Punktes P in diesem Körper. Wie hängen der Trägheitstensor $\Theta_{jk}^{(\mathrm{P})}$ bzgl. dieses Punktes

$$\Theta_{jk}^{(\mathrm{P})} = \int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x}) [(\vec{x} - \vec{r})^2 \delta_{jk} - (x_j - r_j)(x_k - r_k)] \tag{13}$$

mit dem Trägheitstensor $\Theta_{jk}^{(\mathrm{S})}$ um den Schwerpunkt zusammen?

Lösung: Wir multiplizieren die Produkte in der eckigen Klammer aus und verwenden (11):

$$\begin{aligned} \Theta_{jk}^{(\mathrm{P})} &= \int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x}) [(\vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{r} + \vec{r}^2) \delta_{jk} - (x_j x_k - x_j r_k - x_k r_j + r_j r_k)] \\ &= \int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x}) [(\vec{x}^2 + \vec{r}^2) \delta_{jk} - (x_j x_k + r_j r_k)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Nun fassen wir die Terme in der Klammer anders zusammen und beachten, dass $\int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x}) = M$ die Gesamtmasse des Körpers ist:

$$\Theta_{jk}^{(\mathrm{P})} = \int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x}) (\vec{x}^2 \delta_{jk} - x_j x_k) + M(\vec{r}^2 \delta_{jk} - r_j r_k) = \Theta_{jk}^{(\mathrm{S})} + M(\vec{r}^2 \delta_{jk} - r_j r_k). \tag{15}$$

(b) Das Trägheitsmoment um eine Achse in Richtung $\vec{n}$ (mit $|\vec{n}| = 1$) durch den Schwerpunkt bzw. durch den Punkt P ist durch

$$\Theta_{\vec{n}}^{(S)} = \Theta_{jk}^{(S)} n_j n_k \quad \text{bzw.} \quad \Theta_{\vec{n}}^{(P)} = \Theta_{jk}^{(P)} n_j n_k \tag{16}$$

gegeben (wobei hier die Einsteinschen Summenkonvention gelten soll).

Was folgt aus der oben hergeleiteten Beziehung zwischen $\Theta_{jk}^{(S)}$ und $\Theta_{jk}^{(P)}$ für diese Trägheitsmomente um zwei zueinander parallele Achsen.

Bemerkung: Die entsprechende Beziehung zwischen den Trägheitsmomenten ist als **Satz von Steiner** bekannt (Jakob Steiner, 1796-1863) oder **Parallelachsen-Theorem** bekannt.

Lösung: Setzen wir (15) in (16) ein, folgt

$$\begin{aligned}\Theta_{\vec{n}}^{(P)} &= \Theta_{jk}^{(S)} n_j n_k + M(\vec{r}^2 \delta_{jk} n_j n_k - r_j r_k n_j n_k) \\ &= \Theta_{\vec{n}}^{(S)} + M[\vec{r}^2 \vec{n}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{n})^2] \\ &= \Theta_{\vec{n}}^{(S)} + M[\vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{n})^2].\end{aligned} \tag{17}$$

Man macht sich anhand einer Skizze klar, dass $\Delta = \sqrt{\vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{n})^2}$ der senkrechte Abstand des Schwerpunkts zur Drehachse der Richtung $\vec{n}$ ist, d.h. das Trägheitsmoment um eine Achse durch einen beliebigen Punkt P setzt sich aus dem Trägheitsmoment um eine parallele Achse durch den Schwerpunkt S und dem Trägheitsmoment eines Massenpunktes der Gesamtmasse M im Schwerpunkt um die Achse durch den Punkt P zusammen.