

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 12

Aufgabe 1 (10 Punkte): Trägheitstensor eines Zylinders

Berechnen Sie den Trägheitstensor für einen homogenen Zylinder der Gesamtmasse M mit Radius a und Höhe h um den Schwerpunkt.

- (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das Volumenelement in den üblichen Zylinderkoordinaten $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)^T = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)^T$ durch $d^3 r = dR d\varphi dz R$ gegeben und das Gesamtvolumen des Zylinders $V = \pi a^2 h$ ist. Der Zylinder sei dabei durch den Bereich $V: R \in [0, a], \varphi \in [0, 2\pi], z \in (-h/2, h/2)$ parametrisiert.
- (b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Zylinders im Ursprung des Koordinatensystems liegt.
- (c) (4 Punkte) Berechnen Sie die körperfesten Komponenten des Trägheitstensors

$$\Theta'_{kl} = \rho \int_V d^3 x (\vec{x}^2 \delta_{kl} - x_k x_l) \quad (1)$$

mit der konstanten Dichte $\rho = M/V = M/(\pi a^2 h)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Eulerwinkel und Winkelgeschwindigkeit eines Kreisels

Wir betrachten die Parametrisierung der Drehmatrix \hat{D} zwischen raum- und körperfesten Basen¹,

$$\vec{e}'_k = D_{jk} \vec{e}_j, \quad \vec{e}'_j = D_{jk} \vec{e}_k, \quad \det \hat{D} = 1, \quad (2)$$

mittels Euler-Winkeln

$$\hat{D} = \hat{D}^{(3)}(\psi) \hat{D}^{(1)}(\vartheta) \hat{D}^{(3)}(\varphi). \quad (3)$$

Ziel der Übung ist es, auf möglichst einfache Weise die Formel für die raumfesten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit

$$\underline{\omega}' = \hat{D}^T \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (4)$$

zu beweisen. Dabei ist

$$\hat{\Omega}' = \hat{D}^T \dot{\hat{D}}, \quad \Omega'_{jk} = -\epsilon_{ljk} \omega'_l. \quad (5)$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor (verwenden Sie dazu die Formeln in Abschnitt 4.3.2 und Anhang B im Manuskript!)

¹In dieser Aufgabe gilt die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt auftretende Indizes wird stets von 1 bis 3 summiert!

(a) Zeigen Sie durch explizite Rechnung mit den Drehmatrizen um die 3- bzw. 1-Achse, dass

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(3)\text{T}}(\psi)\dot{\hat{D}}^{(3)}(\psi) &= \hat{\Omega}'^{(3)} \quad \text{mit} \quad \underline{\omega}'^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}, \\ \hat{D}^{(1)\text{T}}(\vartheta)\dot{\hat{D}}^{(1)}(\vartheta) &= \hat{\Omega}'^{(1)} \quad \text{mit} \quad \underline{\omega}'^{(1)} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

(b) Sei \hat{R} eine beliebige Drehmatrix, so dass für Vektorkomponenten $\underline{a} = \hat{R}\underline{a}'$ gilt und sei der antisymmetrische Tensor durch die Komponenten $A_{jk} = -\epsilon_{ljk}a_l$ definiert. Zeigen Sie, dass dann $A'_{j'k'} = D_{jj'}D_{kk'}A_{jk}$ (bzw. $\hat{A}' = \hat{R}^T\hat{A}\hat{R}$) mit

$$A'_{j'k'} = -\epsilon_{ljk}a'_l \quad \text{mit} \quad a'_l = R_{ml}a_m \quad \text{bzw.} \quad \underline{a}' = \hat{R}^T\underline{a} \tag{7}$$

gilt.

(c) Verwenden Sie diese Formeln nun, um (4) zu berechnen.

Hinweis: Anwendung der Produktregel auf (3) liefert

$$\dot{\hat{D}} = \dot{\hat{D}}^3(\psi)\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi) + \hat{D}^{(3)}(\psi)\dot{\hat{D}}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi) + \hat{D}^{(3)}(\psi)\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\dot{\hat{D}}^{(3)}(\varphi). \tag{8}$$

Wenden Sie dann (5-6) zur Berechnung der Beiträge zu $\underline{\omega}'$ von jedem der drei Terme in (8) an.