

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 11

Aufgabe 1 (10 Punkte): Bewegung im $1/r^2$ -Potential, Skaleninvarianz

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens im Zentralpotential $V(\vec{x}) = K/r^2$ mit $K = \text{const}$ und $r = |\vec{x}|$.

Unter Verwendung von kartesischen Koordinaten \vec{x} lautet die Lagrange-Funktion also

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = T_{\text{kin}} - V = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - \frac{K}{r^2}. \quad (1)$$

- (a) (2 Punkte) In der Vorlesung haben wir ausführlich das Noether-Theorem auf die Symmetrien der Galilei-Newton-Raumzeit angewandt und dabei für ein *abgeschlossenes* System die zehn Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunktsbewegung gefunden. Da wir hier die Bewegung in einem Zentralpotential betrachten, gelten nun nicht mehr alle Erhaltungssätze. Diskutieren Sie, welche Raum-Zeit-Symmetrien für dieses Problem noch gelten und schließen Sie auf die dazugehörigen Erhaltungsgrößen.
- (b) (2 Punkte) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her und verifizieren Sie die Erhaltung der gefundenen Erhaltungsgrößen.
- (c) (2 Punkte) Außer den verbliebenen Raum-Zeit-Symmetrien weist das Problem noch eine Symmetrie unter der Transformation

$$t' = \lambda^2 t, \quad \vec{x}' = \lambda \vec{x}, \quad (2)$$

auf. Zeigen Sie, dass dies wirklich eine Symmetrietransformation ist, indem Sie die Symmetriebedingung (3.5.4) im Skript auswerten und bestimmen Sie $\Omega(\vec{x}, t)$.

- (d) (2 Punkte) Betrachten Sie nun eine *infinitesimale* Transformation, indem Sie $\lambda = 1 + \epsilon$ mit $|\epsilon| \ll 1$ setzen und die Symmetrietransformation bis zur 1. Ordnung in ϵ entwickeln. Lesen Sie die Funktionen $\vec{Q} = \vec{Q}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$ und $T = T(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$ ab und finden Sie die zu der Symmetrie gehörige Erhaltungsgröße.
- (e) (2 Punkte) Verifizieren Sie den entsprechenden Erhaltungssatz mit den Bewegungsgleichungen.