

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 Blätter 7+8 (Probeklausur)

Aufgabe 1 (10 Punkte): Grundlagen der Mechanik

Erläutern Sie stichpunktartig anhand der folgenden Fragen die Grundlagen der Mechanik.

- (a) (3 Punkte) Wie werden Raum und Zeit in der Newtonschen Mechanik beschrieben?

Lösung: Newton nahm an, dass es einen absoluten Raum und eine absolute Zeit gibt, die unabhängig vom physikalischen Geschehen sind. Mathematisch wird die Zeit als eine Kausalfolge von Ereignissen charakterisierender reeller Parameter und der Raum als dreidimensionaler euklidischer affiner Punktraum beschrieben.

- (b) (4 Punkte) Wie lauten die Newtonschen Axiome?

Lösung: Lex I: der absolute Raum definiert ein Inertialsystem, in dem Massenpunkte, die nicht mit irgendwelchen anderen Massenpunkten wechselwirken, sich gleichförmig geradlinig fortbewegen oder in Ruhe beharren, d.h. sie bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit.

Lex II: die Beschleunigung eines Massenpunktes ist proportional zur auf ihn einwirkenden Kraft. Die Proportionalitätskonstante ist die (träge) Masse: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Lex III: Kräfte werden stets durch Wechselwirkungen zwischen Paaren von Punktmassen hervorgerufen. Bezeichnet $\vec{F}_{12}$ die auf Teilchen 1 aufgrund der Wechselwirkung mit Teilchen 2 ausgeübte Kraft, so übt Teilchen 1 auf Teilchen 2 die entgegengesetzte Kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ aus. Die Gesamtkraft auf ein Teilchen ist durch die vektorielle Summe der Paarwechselwirkungen mit allen anderen Teilchen gegeben:

$$\vec{F}_1 = \sum_{k \neq 1} \vec{F}_{1k}. \quad (1)$$

- (c) (3 Punkte) Wie lässt sich ein Inertialsystem konkret festlegen?

Ein beliebiges Bezugssystem kann durch eine Uhr und drei gegenüber dem absoluten Raum ruhende nichtkomplanare starre Stangen, die in einem beliebigen Punkt im Raum befestigt sind, definiert werden, wodurch sich die Orte von Punktteilchen als Funktion der Zeit eindeutig durch entsprechende Ortsvektoren, die einen euklidischen Vektorraum bilden, beschreiben lassen. Ein solches gegenüber dem absoluten Raum ruhendes Bezugssystem ist ein Inertialsystem.

Allerdings zeigt sich, dass Newtons absolute Zeit und der absolute Raum empirisch nicht bestimmen lassen. Vielmehr können Bewegungen von Körpern immer nur relativ zu anderen Körpern, die man in der oben beschriebenen Weise zur physikalischen Realisierung eines Bezugssystems verwenden kann. Ob ein so definiertes reales Bezugssystem ein Inertialsystem ist, kann nur empirisch festgestellt werden. Die Naturgesetze gelten in allen Inertialsystemen, die sich gegeneinander gleichförmig geradlinig bewegen und nicht relativ zueinander rotieren. Es gibt demnach kein in irgendeiner Weise bevorzugtes Inertialsystem und damit auch keinen absoluten Raum.

Nach unserer heutigen Erkenntnis, d.h. Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie kann man ein Inertialsystem immer nur lokal, also für hinreichend kleine Raum-Zeit-Bereiche festlegen. Ein lokales Inertialsystem lässt sich stets als frei fallendes, nicht rotierendes Bezugssystem realisieren.

Im Rahmen des Standardmodells der modernen Kosmologie wird durch jedes lokale Ruhssystem der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung ein Inertialsystem realisiert.

Hinweis: in dieser Teilaufgabe genügen qualitative Aussagen. Sie müssen keine mathematischen Herleitungen referieren.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Allgemeine Galilei-Transformation

Wir betrachten die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes in einem Inertialsystem. Die allgemeine Transformation von einem Inertialsystem zu einem anderen lautet

$$t' = t - a, \quad \vec{x}' = \hat{D}(\vec{x} - \vec{v}t - \vec{b}). \quad (2)$$

Dabei parametrisieren $a \in \mathbb{R}$ eine zeitliche und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ eine räumliche Translation, $\vec{v}$ einen Galilei-Boost und $\hat{D} \in \text{SO}(3)$ eine Drehung. Wir bezeichnen diese Galilei-Transformation mit $G(a, \vec{b}, \vec{v}, \hat{D})$.

Wir schreiben die Transformation in Operatorschreibweise als

$$(t', \vec{x}') = G(a, \vec{b}, \vec{v}, \hat{D})(t, \vec{x}) \quad (3)$$

- (a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen $G_3 = G_2 G_1$ mit $G_1 = G(a_1, \vec{b}_1, \vec{v}_1, \hat{D}_1)$ und $G_2 = G(a_2, \vec{b}_2, \vec{v}_2, \hat{D}_2)$ wieder eine Galilei-Transformation ist. Berechnen Sie dazu die Parameter $a_3, \vec{b}_3, \vec{v}_3$ und $\hat{D}_3$, indem sie die Transformationen $(t', \vec{x}') = G_1(t, \vec{x})$ und $(t'', \vec{x}'') = G_2(t', \vec{x}')$ konkret ausführen.

Lösung:

$$G_3 = G(a_3, \vec{b}_3, \vec{v}_3, \hat{D}_3) = G(a_1 + a_2, \vec{b}_1 + \hat{D}_1^{-1}(\vec{b}_2 - \vec{v}_2 a_1), \vec{v}_1 + \hat{D}_1^{-1} \vec{v}_2, \hat{D}_2 \hat{D}_1) \quad (4)$$

Beweis: Wir führen die beiden Galilei-Transformationen in der angegebenen Reihenfolge aus:

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = G_1 \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - a_1 \\ \hat{D}_1(\vec{x} - \vec{v}_1 t - \vec{b}_1) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t'' \\ \vec{x}'' \end{pmatrix} &= G_2 \begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' - a_2 \\ \hat{D}_2(\vec{x}' - \vec{v}_2 t' - \vec{b}_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t - a_1 - a_2 \\ \hat{D}_2 \hat{D}_1(\vec{x} - \vec{v}_1 t - \vec{b}_1) - \hat{D}_2[\vec{v}_2(t - a_1) - \vec{b}_2] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Dies sollte wieder eine Galilei-Transformation G_3 sein:

$$\begin{pmatrix} t'' \\ \vec{x}'' \end{pmatrix} = G_3 \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - a_3 \\ \hat{D}_3(\vec{x} - \vec{v}_3 t - \vec{b}_3) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Vergleicht man (7) mit (6), folgt

$$a_3 = a_1 + a_2, \quad (8)$$

$$\hat{D}_3 = \hat{D}_2 \hat{D}_1, \quad (9)$$

$$\hat{D}_3 \vec{v}_3 = \hat{D}_3 \vec{v}_1 + \hat{D}_2 \vec{v}_2, \quad (10)$$

$$\hat{D}_3 \vec{b}_3 = \hat{D}_3 \vec{b}_1 + \hat{D}_2(\vec{b}_2 - \vec{v}_2 a_1). \quad (11)$$

Multiplikation der beiden letzten Gleichungen mit der Drehmatrix $\hat{D}_3^{-1} = \hat{D}_3^{-1} = \hat{D}_1^{-1} \hat{D}_2^{-1}$ ergibt schließlich

$$a_3 = a_1 + a_2, \quad (12)$$

$$\hat{D}_3 = \hat{D}_2 \hat{D}_1, \quad (13)$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \hat{D}_1^{-1} \vec{v}_2, \quad (14)$$

$$\vec{b}_3 = \vec{b}_1 + \hat{D}_1^{-1} (\vec{b}_2 - \vec{v}_2 a_1). \quad (15)$$

- (b) (5 Punkte) Verwenden Sie (4), um die Umkehrtransformation der Galileitransformation G_1 , indem Sie die Parameter für G_2 so bestimmen, dass $G_2 G_1 = \mathbb{1} = G(0, \vec{0}, \vec{0}, \mathbb{1})$ ergibt.

Lösung: G_2 ist die Inverse von G_1 , wenn $a_3 = 0$, $\hat{D}_3 = \mathbb{1}$, $\vec{v}_3 = 0$, $\vec{b}_3 = 0$. Mit (12-15) folgt daraus

$$a_2 = -a_1, \quad (16)$$

$$\hat{D}_2 = \hat{D}_1^{-1}, \quad (17)$$

$$\vec{v}_2 = -\hat{D}_1 \vec{v}_1, \quad (18)$$

$$\vec{b}_2 = -\hat{D}_1 (\vec{v}_2 a_1 + \vec{b}_1). \quad (19)$$

Aufgabe 3 (10 Punkte): Kreisbahnen beim Keplerproblem

Betrachten Sie die Bewegung eines Planeten um die als „unendlich schwer“ angenommene Sonne, d.h. die Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld mit der im Ursprung des Bezugssystems festgehaltenen Sonne:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_G = -\frac{\gamma M m}{r^3} \vec{x}. \quad (20)$$

- (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\vec{L} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ erhalten ist.

Lösung: Es gilt

$$\dot{\vec{L}} = m(\dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} + \vec{x} \times \ddot{\vec{x}}) = \vec{x} \times \vec{F}_G = 0. \quad (21)$$

- (b) (2 Punkte) Wie lautet der Energiesatz? Geben Sie dazu das Potential der Gravitationskraft an.

Lösung: Es ist

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}). \quad (22)$$

Das Potential ist durch

$$\vec{F}_G = -\vec{\nabla} V \quad (23)$$

definiert. Wegen der Rotationssymmetrie ist $V = V(r)$ mit $r = |\vec{x}|$ und damit

$$\vec{\nabla} V(r) = (\vec{\nabla} r) V'(r) = \frac{\vec{x}}{r} V'(r) = -\vec{F}_G = \frac{\gamma M m}{r^3} \vec{x} \quad (24)$$

und damit

$$V'(r) = \frac{\gamma M m}{r^2} \Rightarrow V(r) = -\frac{\gamma M m}{r}. \quad (25)$$

Der Energiesatz lautet

$$\dot{E} = m\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{x}) = \dot{\vec{x}} \cdot [m\ddot{\vec{x}} + \vec{\nabla} V(\vec{x})] = \dot{\vec{x}} \cdot [m\ddot{\vec{x}} - \vec{F}_G] = 0. \quad (26)$$

- (c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω durchlaufene Kreisbahn mit Radius $a = \text{const}$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

eine Lösung der Bewegungsgleichung ist, indem Sie dies als Ansatz in (20) einsetzen. Bestimmen Sie daraus für vorgegebenen Radius a die Winkelgeschwindigkeit ω und damit die Umlaufzeit $T = 2\pi/\omega$.

Lösung: Die Geschwindigkeit und Beschleunigung ergeben sich zu

$$\dot{\vec{x}} = a\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}} = -a\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{x}. \quad (28)$$

Dies in die Bewegungsgleichung (20) eingesetzt ergibt wegen $r = |\vec{x}| = a$

$$m\omega^2 = \frac{\gamma m M}{a^3} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{a^3}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}. \quad (29)$$

- (d) (3 Punkte) Erläutern Sie die 3 Keplerschen Gesetze anhand dieses Spezialfalls.

Lösung: Das **1. Keplersche Gesetz** besagt, dass ein Planet auf einer Ellipsenbahn um die Sonne läuft, die sich in einem der Brennpunkte dieser Ellipse befindet. Eine Kreisbahn ist ein Spezialfall.

Das **2. Keplersche Gesetz** besagt, dass der Radiusvektor des Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Dies folgt allgemein aus dem Drehimpulserhaltungssatz. Mit (27) und (28) folgt

$$\vec{L} = m \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = m a^2 \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Die Änderung der Fläche pro Zeit ergibt sich für die Kreisbahnlösung zu

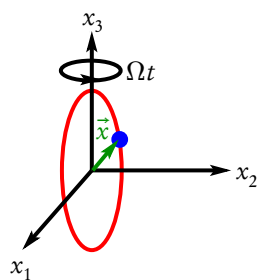
$$\dot{A} = \frac{1}{2} |\vec{x} \times \dot{\vec{x}}| = \frac{L}{2m} = \frac{a^2 \omega}{2} = \text{const.} \quad (31)$$

Das **3. Keplersche Gesetz** besagt, dass T^2/a^3 für alle Planeten gleich ist, wobei T die Umlaufdauer des Planeten und a die große Halbachse der Bahnellipse ist. In unserem Fall ist entsprechend a der Radius der Kreisbahn. Weiter ist $T = 2\pi/\omega$. mit (29) folgt

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}, \quad (32)$$

und dies hängt in der Tat nicht von irgendwelchen Parametern des Planeten oder dessen Bahn ab.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Massenpunkt auf rotierendem Kreis



Ein Massenpunkt bewege sich reibungsfrei auf einem um die x_3 -Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Kreis im homogenen Schwerfeld der Erde $F_G = -m g \vec{e}_3$ (also mit dem Potential $V = m g x_3$). Die Parametrisierung lautet

$$\vec{x} = \hat{D}_3(\Omega t) \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ 0 \\ a \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ 0 \\ a \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (33)$$

und die Lagrange-Funktion ist durch

$$L = T - V = \frac{m}{2} a^2 (\dot{\varphi}^2 + \Omega^2 \cos^2 \varphi) - m g a \sin \varphi. \quad (34)$$

gegeben.

Hinweis: Sie müssen die Lagrange-Funktion nicht herleiten!

- (a) (4 Punkte) Wie lautet die Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$?

Lösung: Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus der **Euler-Lagrange-Gleichung**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{p}_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi}. \quad (35)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls zu φ ergibt sich mit (34) zu

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ma^2 \dot{\varphi} \quad (36)$$

und damit

$$\dot{p}_\varphi = ma^2 \ddot{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ma^2 \Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mga \cos \varphi. \quad (37)$$

- (b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion (Energie) und zeigen Sie explizit, dass sie erhalten ist. Warum weiß man das auch ohne Rechnung?

Lösung: Die Hamilton-Funktion ist durch

$$H = p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{m}{2} a^2 (\dot{\varphi}^2 - \Omega^2 \cos^2 \varphi) + mga \sin \varphi \quad (38)$$

definiert. Sie ist erhalten, weil L nicht explizit von der Zeit abhängt. In der Tat ergibt sich

$$\dot{H} = m \dot{\varphi} (a^2 \ddot{\varphi} + a^2 \Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + ga \cos \varphi). \quad (39)$$

Mit der Bewegungsgleichung (37) folgt dann in der Tat

$$\dot{H} = 0, \quad (40)$$

wie zu erwarten.

- (c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage des Massenpunktes.

Lösung: In der Gleichgewichtslage ist $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ und damit $\ddot{\varphi} = 0$. Aus der Bewegungsgleichung (37) folgt, dass dies für $\cos \varphi_0 = 0$, also $\varphi_0 = \pi/2$ oder $\varphi_0 = 3\pi/2$ der Fall ist.

Bemerkung: Ob es sich um stabile oder instabile Gleichgewichtslagen handelt, erkennt man am effektiven Potential, das man aus (38) abliest:

$$V_{\text{eff}}(\varphi) = mga \sin \varphi - \frac{ma^2}{2} \Omega^2 \cos^2 \varphi. \quad (41)$$

Stabile Gleichgewichtslagen sind die **Minima** des Potentials. Die notwendige Bedingung für ein Minimum ist

$$V'_{\text{eff}}(\varphi_0) = mga \cos \varphi_0 + ma^2 \Omega^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = ma \cos \varphi_0 (g + a \Omega^2 \sin \varphi_0) \stackrel{!}{=} 0. \quad (42)$$

Die Nullstellen ergeben sich aus

$$\cos \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_{01} = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_{02} = \frac{3\pi}{2} \quad (43)$$

oder, falls $a\Omega^2 \geq g$ ist, aus

$$g + a\Omega^2 \sin \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_{03} = \pi + \arcsin\left(\frac{g}{a\Omega^2}\right), \quad \varphi_{04} = 2\pi - \arcsin\left(\frac{g}{a\Omega^2}\right). \quad (44)$$

Um zu bestimmen, ob jeweils ein Minimum oder Maximum vorliegt, berechnen wir die 2. Ableitung

$$V''_{\text{eff}}(\varphi_0) = -mga \sin \varphi_0 + ma^2 \Omega^2 (\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0). \quad (45)$$

Damit ist $V''_{\text{eff}}(\pi/2) = -ma(g + a\Omega^2) < 0$, d.h. das Potential besitzt bei $\varphi_0 = \pi/2$ stets ein Maximum, d.h. es liegt dort immer eine **instabile Gleichgewichtslage** vor. Weiter ist $V''_{\text{eff}}(3\pi/2) = ma(g - a\Omega^2)$. Damit ist $V_{\text{eff}}(3\pi/2) > 0$ falls $a\Omega^2 < g$, und nur dann liegt bei $\varphi_0 = 3\pi/2$ eine stabile Gleichgewichtslage vor.

Für φ_{03} und φ_{04} ist jeweils $\sin \varphi_{0,3/4} = -g/(a\Omega^2)$ und damit $\cos^2 \varphi_{0,3/4} = 1 - g^2/(a^2\Omega^4)$. Damit ergibt sich

$$V_{\text{eff}}(\varphi_{03}) = V_{\text{eff}}(\varphi_{04}) = \frac{m}{\Omega^2}(a^2\Omega^2 - g^2). \quad (46)$$

Da dies nur Lösungen von (42) sein können, wenn $a^2\Omega^2 \geq g$ ist, sind also φ_{03} und φ_{04} stabile Gleichgewichtslagen.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo1-l3-SS25/index.html>