Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 12

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Formeln mit div, grad und rot

Im Folgenden seien $\vec{A}$ und $\vec{B}$ Vektor- und ϕ und ψ ein Skalarfelder, die mindestens einmal partiell nach den kartesischen Komponenten x_j des Ortsvektors $\vec{r}$ differenzierbar seien. Zeigen Sie dann unter Verwendung des Nabla- oder Ricci-Kalküls, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}, && (1)\\
&\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B} + \vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}, && (2)\\
&\operatorname{grad}(\phi\psi) = \phi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\phi, && (3)\\
&\operatorname{div}(\phi\vec{A}) = \phi\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\cdot\operatorname{grad}\phi, && (4)\\
&\operatorname{rot}(\phi\vec{A}) = \phi\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\times\operatorname{grad}\phi, && (5)\\
&\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}, && (6)\\
&\operatorname{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} && (7)
\end{aligned}$$

gelten, sowie, falls $\vec{A}$ mindestens zweimal stetig differenzierbar ist,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} \quad (\Delta\vec{A} \text{ nur in kartesischen Koordinaten einfach berechenbar!}) \tag{8}$$

Lösungen: (1):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\\
&= \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}_c + \vec{A}_c\times\vec{B})\\
&= (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{B} - \vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{A}_c)\\
&= (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{B} - (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\vec{A}\\
&= \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}.
\end{aligned} \tag{9}$$

(2)

$$\begin{aligned}
[\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B})]_a &= \partial_a(A_b B_b) = B_b\partial_a A_b + A_b\partial_a B_b\\
&= B_b(\partial_a A_b - \partial_b A_a) + B_b\partial_b A_a + A_b(\partial_a B_b - \partial_b B_a) + A_b\partial_b B_a\\
&= B_b\epsilon_{abc}(\operatorname{rot}\vec{A})_c + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})A_a + A_b\epsilon_{abc}(\operatorname{rot}\vec{B})_c + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})B_a\\
&= [\vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A} + \vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}]_a.
\end{aligned} \tag{10}$$

(3)

$$\operatorname{grad}(\phi\psi) = \vec{\nabla}(\phi\psi) = \vec{\nabla}(\phi\psi_c) + \nabla(\phi_c\psi) = \psi\vec{\nabla}\phi + \psi\vec{\nabla}\phi = \psi\operatorname{grad}\phi + \psi\operatorname{grad}\phi. \tag{11}$$

(4)

$$\operatorname{div}(\phi\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}_c) + \vec{\nabla}\cdot(\phi_c\vec{A}) = \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\operatorname{grad}\phi + \phi\operatorname{div}\vec{A}. \tag{12}$$

(5)

$$\operatorname{rot}(\phi\vec{A}) = \vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}) = \vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}_c) + \vec{\nabla}\times(\phi_c\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi)\times\vec{A} + \phi\vec{\nabla}\times\vec{A} = \phi\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\times\operatorname{grad}\phi. \tag{13}$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}_c)+\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}_c\times\vec{B}) \\
&= (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{B}-\vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{A}_c) \\
&= (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{B}-(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\vec{A} \\
&= \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A}-\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
[\operatorname{rot}(\vec{A}\times\vec{B})]_a &= \epsilon_{abc}\partial_b(\epsilon_{cde}A_d B_e) \\
&= (\delta_{ad}\delta_{be}-\delta_{ae}\delta_{bd})(B_e\partial_b A_d+A_d\partial_b B_e) \\
&= B_b\partial_b A_a - B_a\partial_b A_b + A_a\partial_b B_b - A_b\partial_b B_a \\
&= \vec{B}\cdot\vec{\nabla}A_a - B_a\operatorname{div}\vec{A}+A_a\operatorname{div}\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})B_a.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

(8)

$$
\begin{aligned}
[\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})]_a &= \epsilon_{abc}\partial_b(\epsilon_{cde}\partial_d A_e) \\
&= (\delta_{ad}\delta_{be}-\delta_{ae}\delta_{bd})\partial_b\partial_d A_e \\
&= \partial_a\partial_b A_b - \partial_b\partial_b A_a \\
&= \partial_a\operatorname{div}\vec{A}-\Delta A_a \\
&= (\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A})_a-\Delta A_a.
\end{aligned}
\tag{16}
$$