H. van Hees **Wintersemester 2024/2025**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 4

Aufgabe 1: Freies Teilchen mit linearer Reibung

Ein Teilchen bewege sich entlang einer (horizontalen) Geraden unter dem Einfluss einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft $F = -m\gamma v$. Zur Zeit $t = 0$ befinde es sich am Ort x_0 und starte dort mit der Geschwindigkeit v_0.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens mittels der Newtonschen Bewegungsgleichung $F = ma$ auf.

Lösung: Da $a = \dot{v} = \ddot{x}$ ist, gilt

$$ma = m\dot{v} = m\ddot{x} = F = -m\gamma v = -m\gamma\dot{x}, \quad \gamma > 0. \tag{1}$$

Da in diesem Fall die Kraft nicht vom Ort abhängt, können wir also zunächst eine Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit aufstellen:

$$\dot{v} = -\gamma v. \tag{2}$$

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der oben angegebenen Anfangsbedingungen.

Lösung: Zunächst lösen wir die Gleichung für die Geschwindigkeit (2). Dazu schreiben wir $\dot{v} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ und multiplizieren die Gleichung formal mit $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}v = -\gamma v \mathrm{d}t. \tag{3}$$

Wir können nun alle Terme, die v und $\mathrm{d}v$ enthalten auf die eine und alle, die t und $\mathrm{d}t$ enthalten, auf die andere Seite bringen, d.h. die Differentialgleichung, lässt sich durch „Trennung der Variablen" lösen. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\gamma \mathrm{d}t. \tag{4}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich nun, indem wir unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$-integrieren. Dabei muss man die Integrationsvariable in v' bzw. t' umbenennen, da v und t jetzt jeweils als obere Grenzen des Integrals auftreten:

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v' \frac{1}{v'} = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\int_0^t \mathrm{d}t' \gamma = -\gamma t \Rightarrow v(t) = v_0 \exp(-\gamma t). \tag{5}$$

Nun gilt $\dot{x} = v$, und durch eine weitere Integration folgt damit unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $x(0) = x_0 = 0$

$$x(t) - x_0 = x(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' v(t') = \int_0^t \mathrm{d}t' v_0 \exp(-\gamma t') = -\exp\left(\frac{v_0}{\gamma}\right)\bigg|_{t'=0}^{t'=t} = \frac{v_0}{\gamma}[1 - \exp(-\gamma t)]. \tag{6}$$

(c) Wie weit kommt das Teilchen im Limes $t \to \infty$?

Lösung: Mit (6) folgt

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{v_0}{\gamma}. \tag{7}$$

Das Teilchen bewegt sich also aufgrund der Reibung nur um eine endliche Strecke vom Ausgangspunkt weg.

Aufgabe 2: Freier Fall mit linearer Reibung

Ein ruhendes Teilchen im homogenen Schwerefeld der Erde werde zur Zeit $t = 0$ aus der Höhe h losgelassen. Wir berücksichten die Luftreibung, wobei wir wieder eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft annehmen, d.h. es wirke insgesamt die Kraft $F = -m\gamma v - mg$ mit $g = 9{,}81\mathrm{m/s}^2$.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

Lösung: Da die Kraft wieder nur von der Geschwindigkeit und nicht vom Ort abhängt, können wir wie bei der vorigen Aufgaben zunächst eine Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit aufstellen

$$ma = m\dot{v} = F = -m\gamma v - mg \;\Rightarrow\; \dot{v} = -\gamma v - g. \tag{8}$$

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

Lösung: Auch hier kann man die Bewegungsgleichung wieder durch Trennung der Variablen lösen:

$$\mathrm{d}v = -(\gamma v + g)\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; -\frac{\mathrm{d}v}{\gamma v + g} = \mathrm{d}t. \tag{9}$$

Integriert man wieder unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $v(0) = 0$

$$\begin{aligned} &-\int_0^v \mathrm{d}v' \frac{1}{\gamma v' + g} = \int_0^t \mathrm{d}t' \;\Rightarrow\; -\frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma v + g}{g}\right) = t \\ &\Rightarrow\; \frac{\gamma v + g}{g} = \exp(-\gamma t) \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{g}{\gamma}[\exp(-\gamma t) - 1]. \end{aligned} \tag{10}$$

Durch eine weitere Integration, wieder unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $x(0) = h$ folgt

$$\begin{aligned} x(t) - h &= \int_0^t \mathrm{d}t' v(t') = \frac{g}{\gamma}\int_0^t \mathrm{d}t'[\exp(-\gamma t') - 1] \\ &= \frac{g}{\gamma}\left[-\frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma t') - t'\right]_{t'=0}^{t} \\ &= -\frac{g}{\gamma}\left\{t + \frac{1}{\gamma}[\exp(-\gamma t) - 1]\right\} \\ \Rightarrow x(t) &= h - \frac{g}{\gamma}\left\{t + \frac{1}{\gamma}[\exp(-\gamma t) - 1]\right\} \end{aligned} \tag{11}$$

(c) Welche Endgeschwindigkeit erreicht das Teilchen höchstens? Tipp: Berechnen Sie den Grenzfall $t \to \infty$.

Lösung: Es gilt gemäß (10)

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{g}{\gamma} \;\Rightarrow\; |v(t)| < \frac{g}{\gamma}, \tag{12}$$

denn $|v(t)|$ ist offenbar eine monoton wachsende Funktion und nähert sich daher dem Grenzwert $|v_\infty|$ von unten her asymptotisch an.

(d) Knobelaufgabe: Zeigen Sie, dass im Limes $\gamma \to 0$ wieder die Lösungen der Bewegungsgleichungen für den freien Fall ohne Luftwiderstand herauskommen.

Lösung: Betrachten wir zuerst (10). Für $\gamma \to 0$ haben wir es mit einem unbestimmten Grenzwert der Art „0/0" zu tun. Hier hilft immer die Taylor-Entwicklung von Zähler und Nenner. In unserem Fall brauchen wir nur

$$\exp(-\gamma t) = 1 - \gamma t + \mathscr{O}(\gamma^2). \tag{13}$$

Damit folgt aus (10)

$$v(t) = \frac{g}{\gamma}(1 - \gamma t + \mathscr{O}(\gamma^2) - 1) = -g[t + \mathscr{O}(\gamma)] \underset{\gamma \to 0}{\to} -g t. \tag{14}$$

Für den Ort müssen wir die Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion offenbar noch eine weitere Ordnung berücksichtigen:

$$\exp(-\gamma t) = 1 - \gamma t + \frac{\gamma^2 t^2}{2} + \mathscr{O}(0\gamma^3) \Rightarrow \frac{1}{\gamma}[\exp(-\gamma t) - 1] = -t + \frac{\gamma t^2}{2} + \mathscr{O}(\gamma^2). \tag{15}$$

Dies in (11) eingesetzt, liefert

$$x(t) = h - \frac{g}{\gamma}\left(\frac{\gamma t^2}{2} + \mathscr{O}(\gamma^2)\right) \underset{\gamma \to 0}{\to} h - \frac{g}{2} t^2. \tag{16}$$

Man erhält also, wie zu erwarten, im Grenzfall $\gamma \to 0$ die Lösungen für die Bewegungsgleichungen unter Vernachlässigung der Luftreibung.
