H. van Hees **Wintersemester 2024/2025**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 1

Aufgabe 1: Quadratische und lineare Gleichungen
Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 - 12x - 15$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

Lösung: Die Nullstellen ergeben sich aus der quadratischen Gleichung

$$3x^2 - 12x - 15 = 0. \tag{1}$$

Wir bringen sie in Normalform, indem wir durch 3 teilen:

$$x^2 - 4x - 5 = 0. \tag{2}$$

Jetzt können wir die p-q-Formel mit $p = -4$ und $q = -5$ anwenden

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{(-4/2)^2 - (-5)} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 5. \tag{3}$$

(b) Bilden Sie die Ableitung der Funktion.

Lösung: Aus der allgemeinen Formel $(x^n)' = nx^{n-1}$ und der Linearität der Ableitungsoperation folgt

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} - 12 \cdot 1x^0 = 6x - 12. \tag{4}$$

(c) Berechnen Sie die Nullstellen der Ableitung. **Lösung:** Wir müssen die lineare Gleichung

$$6x - 12 = 0 \tag{5}$$

lösen. Dazu addieren wir zunächst 12 und teilen dann durch 6:

$$6x = 12 \Rightarrow x = 2. \tag{6}$$

Aufgabe 2: Binomische Formel und Leibnizsche Produktformel für Ableitungen

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{7}$$

gilt. Dabei ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \quad 0! = 1. \tag{8}$$

Lösung: Der Induktionsanfang ist $n = 0$. Für $n = 0$ gilt $(a+b)^0 = 1$, und die Summe reduziert sich auf den einen Term $k = 0$. Offenbar ist $\binom{0}{0} = 0!/(0! \cdot 0!) = 1$ und $a^0 = b^0 = 1$, d.h. für $n = 0$ ist die Behauptung korrekt.

Angenommen, die Formel gilt für $n = j$. Dann folgt durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}(a+b)^{j+1} &= (a+b)(a+b)^j = (a+b)\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}a^k b^{j-k} \\ &= \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(a^{k+1}b^{j-k} + a^k b^{j-k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}a^{k+1}b^{j-k} + \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}a^k b^{j-k+1}.\end{aligned} \tag{9}$$

In der ersten Summe verwenden wir nun als Summationsvariable $k' = k+1$ und nennen in der zweiten Summe die Summationsvariable in k' um. Dann folgt

$$\begin{aligned}(a+b)^{j+1} &= \sum_{k'=1}^{j+1}\binom{j}{k'-1}a^{k'}b^{j-k'+1} + \sum_{k'=0}^{j}\binom{j}{k}a^{k'}b^{j-k'+1} \\ &= \binom{j}{0}b^{j+1} + \sum_{k'=1}^{j}\left[\binom{j}{k'-1} + \binom{j}{k'}\right]a^{k'}b^{j+1-k'} + \binom{j}{j}a^{j+1}.\end{aligned} \tag{10}$$

Nun gilt $\binom{j}{0} = j!/(j!\cdot 0!) = 1$ und $\binom{j}{j} = j!/(j!\cdot 0!) = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ also können wir für im ersten und den letzten Term auch $\binom{j+1}{0}$ und $\binom{j+1}{j+1}$ schreiben. Für den Ausdruck in der eckigen Klammer unter der Summe ergibt sich

$$\begin{aligned}\binom{j}{k'-1} + \binom{j}{k'} &= \frac{j!}{(k'-1)!(j-k'+1)!} + \frac{j!}{k'!(j-k')!} = \frac{j!}{k'!(j-k'+1)!}[k' + (j-k'+1)] \\ &= \frac{j!}{k'!(j-k'+1)!}(j+1) = \frac{(j+1)!}{k'!(j+1-k')!} = \binom{j+1}{k'}.\end{aligned} \tag{11}$$

Damit folgt für (10)

$$(a+b)^{j+1} = \binom{j+1}{0}b^{j+1} + \sum_{k'=1}^{j}\binom{j+1}{k'}a^{k'}b^{j+1-k'} + \binom{j+1}{j+1}a^{j+1} = \sum_{k'=0}^{j+1}\binom{j+1}{k'}a^{k'}b^{j+1-k'}, \tag{12}$$

und das ist die Behauptung für $n = j+1$. Damit ist die Behauptung nach dem Prinzip der vollständigen Induktion bewiesen.

(b) Seien f und g in einem gemeinsamen Definitionsbereich D definierte n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass dann für alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \tag{13}$$

gilt. Dabei ist $f^{(k)}(x)$ die k-te Ableitung der Funktion f.

Lösung: Für $n = 1$ gilt nach der Produktregel

$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = \binom{1}{0}f(x)g^{(1)}(x) + \binom{1}{1}f^{(1)}(x)g(x), \tag{14}$$

d.h. die Formel gilt für $n = 1$.

Nehmen wir nun an, die Formel sei korrekt für $n = j$, d.h. es gilt

$$[f(x)g(x)]^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} f^{(k)}(x) g^{(j-k)}(x). \tag{15}$$

Mit der Kettenregel folgt dann

$$[f(x)g(x)]^{(j+1)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \left[f^{(k+1)}(x) g^{(j-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(j-k+1)}(x) \right] \tag{16}$$

Der Rest des Beweises folgt dann mit den genau analogen Rechenschritten wie im Beweis für die allgemeine binomische Formel.