

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 12

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Potentialwirbel

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{e}_3 \times \frac{\vec{r}}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (1)$$

- (a) [3 Punkte] Berechnen Sie Rotation und Divergenz des Feldes in kartesischen Koordinaten!
- (b) [2 Punkte] Stellen Sie das Vektorfeld in Standardzylinderkoordinaten (R, φ, z) dar und berechnen Sie abermals Rotation und Divergenz. Dabei dürfen die Formeln für die Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten in Abschnitt 3.7.4 des Manuskripts verwendet werden.
- (c) [2 Punkte] Existiert ein skalares Potential, so dass

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi = -\text{grad}\Phi \quad (2)$$

gilt?

- (d) [3 Punkte] Berechnen Sie das Wegintegral

$$J = \int_{K_a} d\vec{r} \cdot \vec{V} \quad (3)$$

entlang des Kreises in der x_1 - x_2 -Ebene mit dem Mittelpunkt bei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und Radius a , der durch

$$K_a : \vec{r}(\varphi) = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (4)$$

parametrisiert sei.

- (e) **Zum Knobeln (3 Zusatzpunkte):** Wie lässt sich das mit dem in Abschnitt 3.11 des Manuskripts besprochenen Lemma von Poincaré vereinbaren? Ist der Satz von Stokes auf das Wegintegral anwendbar?
-