H. van Hees **Sommersemester 2024**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 11

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Formeln mit div, grad und rot

Im Folgenden seien $\vec{A}$ ein Vektor- und ϕ ein Skalarfeld, die mindestens einmal partiell nach den kartesischen Komponenten x_j des Ortsvektors $\vec{r}$ differenzierbar seien. Zeigen Sie dann unter Verwendung des Nabla- oder Ricci-Kalküls, dass die Gleichungen

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}, \tag{1}$$

$$\operatorname{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}, \tag{2}$$

$$\operatorname{grad}(\phi\psi) = \phi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \phi, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}(\phi\vec{A}) = \phi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \phi, \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}(\phi\vec{A}) = \phi \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \times \operatorname{grad} \phi, \tag{5}$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \tag{7}$$

gelten, sowie, falls $\vec{A}$ mindestens zweimal stetig differenzierbar ist,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \quad (\Delta\vec{A} \text{ nur in kartesischen Koordinaten einfach berechenbar!}) \tag{8}$$