Quanten-Boltzmann-Gleichung

Nichtrelativistische Quantenfeldtheorie ($\hbar = 1$)

Man kann die Schrödinger-Gleichung aus der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \partial_t \psi - \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}\psi^\dagger)\cdot(\vec{\nabla}\psi) \qquad (1)$$

herleiten. Dabei ist

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{-s} \\ \vdots \\ \psi_{s} \end{pmatrix} = (\psi_\sigma) \qquad (2)$$

ein Spinor für ein Teilchen mit Spin s, ~~wobei ... $2s+1$~~ wobei $\sigma \in \{-s, -s+1, \ldots, s-1, s\}$ die Eigenwerte von $\hat{S}_z$ bezeichnen.

Die Wirkung ist

$$S[\psi^\dagger, \psi] = \int dt \int d^3\vec{x}\, \mathcal{L} \qquad (3)$$

und die Variation bzgl. $\psi^\dagger$ liefert

$$\delta S = \int dt \int d^3\vec{x} \left[i\delta\psi^\dagger \partial_t \psi - \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}\delta\psi^\dagger)\vec{\nabla}\psi \right]$$

$$= \int dt \int d^3\vec{x} \left[i\delta\psi^\dagger \partial_t \psi + \frac{1}{2m}\delta\psi^\dagger \Delta\psi \right] \qquad (4)$$

Stationärer Punkt des Funktionals $\delta S \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad i\partial_t\psi + \frac{1}{2m}\Delta\psi = 0$$

$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2m}\Delta\psi \qquad (5)$$

Schrödinger-Gleichung für freie Teilchen.

Kanonische Quantisierung

Kanonischer Feldimpuls zu ψ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\psi_\sigma} = i\psi_\sigma^\dagger = \hat\Pi_\sigma(t,\vec x)$$

Kanonische (Anti-) Kommutator-Relationen*

$$[\hat\psi_\sigma(t,\vec x), \hat\psi_{\sigma'}(t,\vec x\,')]_\pm = \cancel{\delta_{\sigma\sigma'}\,\delta^{(3)}(\vec x-\vec x\,')}\ 0$$

$$[\hat\psi_\sigma(t,\vec x), \hat\Pi_{\sigma'}(t,\vec x\,')]_\pm = i\,\delta_{\sigma\sigma'}\,\delta^{(3)}(\vec x-\vec x\,')$$

oder

$$[\hat\psi_\sigma(t,\vec x), \hat\psi^\dagger_{\sigma'}(t,\vec x\,')]_\pm = \delta_{\sigma\sigma'}\,\delta^{(3)}(\vec x-\vec x\,')$$

Hamilton-Operator

Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H} = \Pi\psi - \mathcal{L}$$

$$= \frac{1}{2m}(\vec\nabla\psi^\dagger)\cdot(\vec\nabla\psi)$$

quantisiert

$$\hat H = \int d^3\vec x\, \frac{1}{2m}(\vec\nabla\hat\psi^\dagger)\cdot(\vec\nabla\hat\psi)$$

$$\Rightarrow \quad \hat H = \int d^3\vec x\, \hat\psi^\dagger\left(-\frac{\Delta}{2m}\right)\hat\psi$$ (zeitunabhängig wegen Erhaltungssatz!)

---

* oberes Vz. für Fermionen, unteres für Bosonen

Konsistenz-Check

Heisenbergbild: Bewegungsgleichung

$$\dot{\hat{\psi}}_\sigma = \frac{1}{i}[\hat{\psi}_\sigma, \hat{H}]$$

$$\cancel{= \frac{1}{i}\left[\int d^3\vec{x}'\right.}$$

$$\cancel{= \frac{1}{i}[\hat{\psi}_\sigma(t,\vec{x})}$$

$$= \frac{1}{i}\int d^3\vec{x}' \sum_{\sigma'} \left[\hat{\psi}_\sigma(t,\vec{x}), \hat{\psi}^+_{\sigma'}(t,\vec{x}')\left(-\frac{\Delta'}{2m}\right)\hat{\psi}_{\sigma'}(t,\vec{x}')\right]$$

$$= \frac{1}{i}\int d^3\vec{x}' \sum_{\sigma'} \Big\{ \overbrace{[\hat{\psi}_\sigma(t,\vec{x}), \hat{\psi}^+_{\sigma'}(t,\vec{x}')]_\pm}^{\delta_{\sigma\sigma'}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')} \left(-\frac{\Delta'}{2m}\right)\hat{\psi}'_{\sigma'} \mp \hat{\psi}^+_{\sigma'}(t,\vec{x}') \underbrace{\left[\hat{\psi}_\sigma(t,\vec{x}), -\frac{\Delta'}{2m}\hat{\psi}'_{\sigma'}\right]}_{\to 0} \Big\}$$

$$= \frac{1}{i}\int d^3\vec{x}' \sum_{\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\left(-\frac{\Delta'}{2m}\psi'_{\sigma'}\right)$$

$$\Rightarrow i\,\partial_t \hat{\psi}_\sigma = -\frac{\Delta}{2m}\hat{\psi}_\sigma$$

☺

„Box-Quantisierung"

Betrachte Teilchen in großem Würfel mit Kantenlänge L.
Dann kann man nach Impuls-Spin-Eigenzuständen für die Teilchen entwickeln.

$$\hat{\vec p}\, u_{\vec p,\sigma}(\vec x) = -i\vec\nabla\, u_{\vec p,\sigma}(\vec x) \overset{!}{=} \vec p\, u_{\vec p,\sigma}(\vec x)$$

$$\Rightarrow u_{\vec p,\sigma}(\vec x) = \exp(i\vec p\cdot\vec x)\, e_\sigma \frac{1}{L^{3/2}}$$

mit $\hat\sigma_3 e_\sigma = \sigma e_\sigma$

Die Funktionen sollen periodische Randbed. erfüllen

$$\psi(\vec x + L\vec e_j) = \psi(\vec x)\;;\; j\in\{1,2,3\}$$

Dann $\vec p \in \frac{2\pi}{L}$

Integrale über Würfel Q:

$$\cancel{\psi(\vec x) = e_\sigma \frac{1}{L^{3/2}} \sum}$$

$$\psi(t,\vec x) = \sum_{\vec p,\sigma} a_\sigma(\vec p)\, u_{\vec p,\sigma}(\vec x)\exp(-iEt)$$

mit $E = \frac{\vec p^2}{2m}$. Dann erfüllt ψ Schrödinger-Gleichung, weil die $u_{\vec p,\sigma}(\vec x)$ Eigenwerte des Einteilchen-Hamiltonians

$$\hat h = -\frac{\Delta}{2m} \quad \text{mit EW } E=\frac{\vec p^2}{2m}$$

sind.

Quantisierung

$$\hat\psi(t,\vec x) = \sum_{\vec p,\sigma} \hat a_\sigma(\vec p)\, u_{\vec p,\sigma}(\vec x)\, \exp(-iEt)$$

Wegen

$$\int_Q d^3\vec x\; u^+_{\vec p,\sigma}(\vec x)\, u_{\vec p',\sigma'}(\vec x) = \delta_{\sigma\sigma'} \int_Q \frac{d^3\vec x}{L^3} \exp[i(\vec p' - \vec p)\cdot\vec x]$$

$$= \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta_{\vec p,\vec p'}$$

$$\hat a_\sigma(\vec p) = \int_Q d^3\vec x\; u^+_{\vec p,\sigma}(\vec x)\, \exp(+iEt)\, \hat\psi(t,\vec x)$$

Zeitunabhängig!

Es folgt aus den gleichzeitigen Kommutator-Relationen

$$[\hat a_\sigma(\vec p), \hat a_{\sigma'}(\vec p')]_\pm = 0$$

$$[\hat a_\sigma(\vec p), \hat a^+_{\sigma'}(\vec p')]_\pm = \int_Q d^3\vec x \int d^3\vec x'\; u^+_{\vec p,\sigma}(\vec x)\, \exp(iEt)\; u_{\vec p',\sigma'}(\vec x')\, \exp(-iE't)\; \cancel{\hat\psi(t,\vec x')}\; \underbrace{[\hat\psi(t,\vec x), \hat\psi^+(t,\vec x')]_\pm}_{\delta^{(3)}(\vec x - \vec x')}$$

$$= \delta_{\sigma\sigma'} \int_Q \frac{d^3\vec x}{L^3} \exp(i(E-E')t)\, \exp(i(\vec p' - \vec p))$$

$$[\hat a_\sigma(\vec p), \hat a^\dagger_{\sigma'}(\vec p')]_\pm = \delta_{\sigma\sigma'}\,\delta_{\vec p\vec p'}$$

$\Rightarrow$ Bosonen ≙ voneinander unabhängigen harmonischen Oszillatoren. Vollst. Basis ist simultane Eigenbasis für Besetzungszahloperatoren

$$\hat N_\sigma(\vec p) = \hat a^\dagger_\sigma(\vec p)\,\hat a_\sigma(\vec p)$$

Grundzustand $|\Omega)$:

$$\hat a_\sigma(\vec p)\,|\Omega) = 0 \quad \text{für alle } (\vec p,\sigma)$$

$$|\{N_\sigma(\vec p)\}_{\sigma,\vec p}) = \cancel{\prod_{\sigma,\vec p}\frac{1}{\sqrt{N_\sigma(\vec p)!}}}$$

$$= \prod_{\sigma,\vec p}\frac{1}{\sqrt{N_\sigma(\vec p)!}}\left[\hat a^\dagger_\sigma(\vec p)\right]^{N_\sigma(\vec p)}|\Omega)$$

Für Fermionen ist

$$[\hat a^\dagger_\sigma(p)]^2 = 0$$

Ansonsten alles wie beim harmonischen Oszillator. Man muß nur Standardreihenfolge für $\{\vec p,\sigma\}$ festlegen wegen Vorzeichen denn es ist z.B.

$$|N(\vec p,\sigma)=1, N(\vec p',\sigma')=1) = a^\dagger(\vec p,\sigma)\,\hat a^\dagger(\vec p',\sigma')\,|\Omega)$$

$$= -\hat a^\dagger(\vec p',\sigma')\,a^\dagger(\vec p,\sigma)\,|\Omega)$$

Daher für Fermionen einfachere Notation

$$|(\vec p_1,\sigma_1);(\vec p_2,\sigma_2);\dots;(\vec p_N,\sigma_N)\rangle = \hat a_1^\dagger \cdots \hat a_N^\dagger |\Omega\rangle$$

Zustände sind automatisch symmetrisiert (Bosonen) bzw. antisymmetrisiert (Fermionen). Wenn in obigem Fermionen-zustand für beliebiges Paar i,j gilt $(\vec p_i,\sigma_i)=(\vec p_j,\sigma_j)$ ist $|(\vec p_1,\sigma_1);\dots;(\vec p_N,\sigma_N)\rangle = 0$.

<u>Gesamtenergie</u>

$$\hat H = \int_Q d^3\vec x\, \psi^\dagger(t,\vec x)\left(-\frac{\Delta}{2m}\right)\psi(t,\vec x)$$

$$= \int_Q d^3\vec x \sum_{\vec p,\sigma}\sum_{\vec p',\sigma'} \hat a^\dagger_\sigma(\vec p)\exp(iEt)\, u^*_{\sigma,\vec p}(\vec x) \left(-\frac{\Delta}{2m}\right) a_{\sigma'}(\vec p')\exp(-iE't)\, u_{\sigma',\vec p'}(\vec x)$$

Wegen $\Delta u_{\sigma',\vec p'}(\vec x) = -\frac{\vec p'^2}{2m} u_{\sigma',\vec p'}(\vec x)$

$$\Rightarrow \hat H = \sum_{\vec p\sigma}\sum_{\vec p'\sigma'} \hat a^\dagger_\sigma(\vec p)\,\hat a_{\sigma'}(\vec p')\,\frac{\vec p'^2}{2m}\,\delta_{\sigma\sigma'}\,\delta_{\vec p\vec p'}$$

$$= \sum_{\vec p\sigma} a^\dagger_\sigma(\vec p)\,\hat a_\sigma(\vec p)\, E_{\vec p} = \sum_{\vec p\sigma} E_{\vec p}\, \hat N_\sigma(\vec p)$$

Wechselwirkende Teilchen (Wechselwirkungsbild)

~~Feldoperatoren~~ und Observablen

$$\hat{H} = \int d^3\vec{x}\; \psi^\dagger \left(-\frac{\Delta}{2m}\right)\psi \quad (= \hat{H}_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\int d^3\vec{x}'\; \hat{\psi}^\dagger(t,\vec{x})\, \hat{\psi}^\dagger(t,\vec{x}')\, v(\vec{x}-\vec{x}')\, \hat{\psi}(t,\vec{x})\, \psi(t,\vec{x}') \quad (= \hat{H}_I)$$

NB: $\hat{H}_0$ im Wechselwirkungsbild zeitunabhängig

$\hat{H}_I$ zeitabhängig

WW-Bild: Operatoren, die Observablen beschreiben, bewegen sich gemäß $\hat{H}_0$ (ebenso Eigen-Kets von Observablen!)

Zustandsvektoren und stat. Operator gemäß $\hat{H}_I$:

$$i\partial_t |\psi,t\rangle = \hat{H}_I(t)\,|\psi,t\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \underbrace{T_c \exp\left[-i\int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}_I(t')\right]}_{\hat{C}_I(t,t_0)} |\psi,t_0\rangle$$

Dyson-Reihe

$$\hat{C}_I(t,t_0) = \mathbb{1} - i\int_{t_0}^{t} dt_1\, \hat{H}_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, T_c\, \hat{H}_I(t_1)\, \hat{H}_I(t_2) + \dots$$

Transport-Theorie

Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck:

- dünnes Gas
- Teilchen wechselwirken über kurzreichweitige(!) Wechselwirkungspotentiale
  mittlere freie Weglänge $\gg$ Reichweite der WW
- Teilchen fliegen die meiste Zeit frei und stoßen nur ab und zu, wobei jeder Stoß "vollständig" im Sinne der QT-Streutheorie abläuft, d.h. bei jedem Stoß gehen die Teilchen von einem asymptotisch freien Anfangszustand in einen asymptotisch freien Endzustand über
- Es sind nur elastische Zweiteilchenstöße relevant.
- Benutze Born-Regel (Störungstheorie 1. Ordnung)

Hier: Alles im Wechselwirkungsbild. Es sei $\hat{\rho}(t)$ ein beliebiger i.a. Nichtgleichgewichtszustand des Systems. ~~Die Besetzungszahlen für freie Zustände sind zeitunabhängig, d.h. es gilt~~

$$\frac{d}{dt} \hat{N}(\vec{p},\sigma) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} N(\vec{p},\sigma) = \frac{d}{dt} \langle \hat{N}(\vec{p},\sigma) \rangle$$

$$= \frac{d}{dt} \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}(t)\, \hat{N}(\vec{p},\sigma)\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} \hat{N}(\vec{p},\sigma)\right)$$

$$N = \mathrm{Tr}\left(\hat{C}\,\hat{\rho}_0\,\hat{C}^+\,\hat{N}\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_0\,\hat{C}^+\,\hat{N}\,\hat{C}\right)$$

but now

$$\hat{C}^+\hat{N}\hat{C} \cong \left[1 + i\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{H}_I(t')\right]\hat{N}\left[1 - i\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{H}_I(t')\right]$$

$$\cong \hat{N} + i\int_{t_0}^{t} dt'\left[\hat{H}_I(t'), \hat{N}\right]$$

Nehme an, daß in der Spur nur 2 → 2-Stöße relevant sind. Nun gilt

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_0 \frac{d}{dt}\left(\hat{C}^+\hat{N}\hat{C}\right)\right)$$

$$= i\,\mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}_0\left[\hat{H}_I(t), \hat{N}\right]\right\}$$

$$\hat{H}_I(t) = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}_1 \int d^3\vec{x}_2\; v(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\,\hat{\varphi}^+(\vec{x}_1,t)\,\hat{\varphi}^+(\vec{x}_2,t)\,\hat{\varphi}(\vec{x}_2,t)\,\hat{\varphi}(\vec{x}_1,t)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^3\vec{x}_1}{L^3}\int\frac{d^3\vec{x}_2}{L^3}\sum_{\vec{k}_1 \dots \vec{k}_4} v(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\,\exp\left[i\left(\vec{k}_3\cdot\vec{x}_2 + \vec{k}_4\cdot\vec{x}_1 - \vec{k}_1\cdot\vec{x}_1 - \vec{k}_2\cdot\vec{x}_2\right)\right]$$

$$\exp\left[-i\,(E_3+E_4-E_1-E_2)\,t\right]$$
$$\hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}_1}\,\hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}_2}\,\hat{b}_{\vec{k}_3}\,\hat{b}_{\vec{k}_4}$$

$$\int\frac{d^3\vec{x}_1}{L^3}\int\frac{d^3\vec{x}_2}{L^3}\,\exp\left[i\,\vec{x}_2(\vec{k}_3-\vec{k}_2)+i\,\vec{x}_1(\vec{k}_4-\vec{k}_2)\right]$$
$$v(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)$$

$$\overset{(*)}{=}\int\frac{d^3\vec{z}}{L^3}\int\frac{d^3\vec{x}_2}{L^3}\,\exp\left[i\,\vec{x}_2\cdot(\vec{k}_3-\vec{k}_2+\vec{k}_4-\vec{k}_2)\right]$$
$$v(\vec{z})\,\exp\left[i\,\vec{z}\cdot(\vec{k}_4-\vec{k}_2)\right]$$

$$=\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\,\vec{k}_3+\vec{k}_4}\;\tilde{v}(\vec{k}_4-\vec{k}_2)$$
$$=\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\,\vec{k}_3+\vec{k}_4}\;\tilde{v}\,(\underbrace{\vec{k}_3-\vec{k}_1}_{\vec{q}\,\leftarrow\,\text{Impuls-übertrag}})$$

NB: Wenn $v(\vec{x}_1-\vec{x}_2)=v(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)$ ist auch $\tilde{v}(\vec{q})=\tilde{v}(|\vec{q}|)$ wegen Rotationssymmetrie

---

(*) $\vec{z}=\vec{x}_1-\vec{x}_2$; $\vec{q}=\vec{k}_3-\vec{k}_1=\vec{k}_2-\vec{k}_4$

$\Rightarrow \vec{k}_3=\vec{q}+\vec{k}_1$, $\vec{k}_4=\vec{k}_2-\vec{q}$

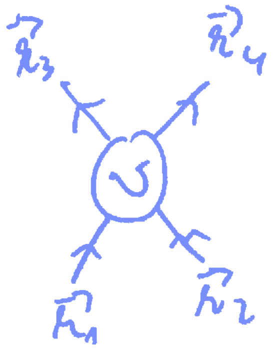
$$\hat H_I(t) = \frac{1}{2} \sum_{\vec k_1, \ldots, \vec k_4} \tilde v(\vec k_1 - \vec k_3)$$

$$\delta_{\vec k_1+\vec k_2,\, \vec k_3+\vec k_4}\, \hat a_1^+ \hat a_2^+ \hat a_3 \hat a_4$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec k_1, \vec k_2, \vec q} \tilde v(\vec q)\, \hat b_1^+ \hat b_2^+ \hat b(\vec q + \vec k_1)\, \hat b(\vec k_2 - \vec q)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec k_3, \vec k_4, \vec q} \tilde v(\vec q)\, \hat b^+(\vec k_3 - \vec q)\, \hat b^+(\vec k_4 + \vec q)\, \hat b_3 \hat b_4$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec k_1', \vec k_2', \vec q} \tilde v(\vec q)\, \hat b^+(\vec k_1' - \vec q)\, \hat b^+(\vec k_2' + \vec q)\, \hat b_{1'} \hat b_{2'} \exp\left[-i\left(E(\vec k_1' - \vec q) + E(\vec k_2' + \vec q) - E_1 - E_2\right)\right]$$



Für $[\hat H_I, \hat N(\vec p)]$

benötige $[\hat a(\vec k), \hat N(\vec p)]_- = [\hat a(\vec k), \hat a^+(\vec p)\hat a(\vec p)]_-$

$$= [\hat a(\vec k), \hat a^+(\vec p)]_\pm\, \hat a(\vec p) \mp \hat a^+(\vec p)\, [\hat a(\vec k), \hat a(\vec p)]$$

Streuquerschnitt in leading order

(13)

$$\langle N(p_3) N(p_4) | H_I | N(p_1) N(p_2)\rangle .$$

~~Brauche~~

$$\cancel{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \,|N(p_1), N(p_2)\rangle = \sqrt{N(p_1)}\, \delta_{p_4 p_1}\, a_1^+ a_2^+ a_3 \,|N(p_2)\rangle + N(p_2)}$$

$$\cancel{= N}$$

$$a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \,|\{N\}\rangle = \sqrt{N_3 N_4 (1\mp N_2)(1\mp N_3)}\; |\cdots N_1+1, N_2+1, N_3-1, N_4-1 \cdots\rangle$$

$\Rightarrow$ ~~M_{fi}~~

$$T_{fi} = \int dt \, \exp\left(-i(E_1+E_2-E_3-E_4)t\right) \tilde{v}(q)\, \delta_{1+2,3+4} \sqrt{N_3 N_4 (1\mp N_2)(1\mp N_3)}$$

$$= 2\pi\, \delta(E_1+E_2-E_3-E_4)\, \frac{\tilde{v}(q)}{2}\, \delta_{1+2,3+4} \sqrt{N_3 N_4 (1\mp N_2)(1\mp N_3)}$$

$$W_{fi} = 2\pi \left|\frac{\tilde{v}(\vec{q})}{2}\right|^2 \delta_{1+2,3+4}\, N_3 N_4 (1\mp N_2)(1\mp N_3) \quad (16)$$
$$\delta(E_1+E_2-E_3-E_4)$$

$$\frac{dN(\vec{p}_1)}{dt} = \sum_{\vec{k}_2,\vec{k}_3,\vec{k}_4} \frac{2\pi}{4} \left|\frac{\tilde{v}(\vec{q})}{2}\right|^2 \Big[N_3 N_4 (1\mp N_2)(1\mp N_1) - N_1 N_2 (1\mp N_3)(1\mp N_4) \Big]$$
$$\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}_3+\vec{k}_4}$$

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}$$

$$2\pi\,\delta_{reg}(\Delta P_r) = \int_{-x^r/2}^{x^r/2} dx^r \exp(i\Delta P_r x^r)$$

$$= \frac{1}{i\Delta P_r}\left[\exp\left(i\Delta P_r \frac{x^r}{2}\right) - \exp\left(-i\Delta P_r \frac{x^r}{2}\right)\right]$$

$$2\pi\,\delta_{reg} = \frac{2}{\Delta P_r} \sin\left(\frac{\Delta P_r x^r}{2}\right)$$

Übergang zu $L \to \infty$ und Phasenraumdichten

Für $L \to \infty$ sind die $\vec p \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$ sehr eng benachbart und das Impulsspektrum geht ins Kontinuum über.

Auf eine Impulsvolumen $\Delta^3 \vec p$ fallen

$$\Delta G_\sigma = \frac{L^3}{(2\pi)^3}\, \Delta^3 \vec p \qquad ; \cancel{g = 2s+1 \text{ (Spin)}})$$

Einteilchenzustände. Phasenraumdichte n

Setzen daher Besetzungszahl

$$\Delta N_\sigma(\vec p) = \frac{L^3}{(2\pi)^3}\, f_\sigma(t, \vec p)$$

Daher

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\,\partial_t f_\sigma(t, \vec p_1) = \int \frac{d^3 \vec p_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec p_3}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec p_4}{(2\pi)^3} \left|\tilde v(\vec q)\right|^2 (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(\vec p_1 + \vec p_2 - \vec p_3 - \vec p_4)$$

$$2\pi\, \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4)\, \left[f_3 f_4 (1 \mp f_1)(1 \mp f_2) - f_1 f_2 (1 \mp f_3)(1 \mp f_4) \right]$$

Bltz-Gleichung

NB: $1 \mp N(\vec q) \Longrightarrow \underbrace{\frac{L^3 \Delta^3 \vec p}{(2\pi)^3}}_{\text{"available"}} \mp \underbrace{\frac{L^3 \Delta^3 \vec p}{(2\pi)^3}}_{\text{"occupied"}} f = \frac{L^3 \Delta^3 \vec p}{(2\pi)^3}(1 \mp f)$

$$\tilde v(\vec q) = \frac{1}{L^3}\,\tilde{\tilde v}(\vec q) \quad \text{mit} \quad \tilde{\tilde v}(\vec q) = \int d^3 \vec x\; v(\vec x) \exp(i \vec q \cdot \vec x)$$