Vorkurs Mathematik, Blatt 2

(1) $\exp(i\varphi) = 1$

$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = 1 \Rightarrow \cos\varphi = 1, \ \sin\varphi = 0$

Wähle $\varphi \in [0, 2\pi[$. Dann ist eindeutig $\varphi = 0$, denn $\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

und $\sin 0 = 0$

$\exp(-i\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi = i$

$\Rightarrow \cos\varphi = 0$ und $\sin\varphi = -1$

$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$

$\exp(i\varphi) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

Die allgemeine Formel für die Polardarstellung einer komplexen Zahl lautet

$z = x + iy = r\exp(i\varphi) = r[\cos\varphi + i\sin\varphi]$

mit $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\frac{x}{r} & \text{falls } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\frac{x}{r} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

Mit dem Hauptwert des arccos, der durch

$\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$

definiert ist, liefert dies Werte für φ im Intervall $[0, 2\pi[$.

(2) $w(t) = \exp[-t + 2\pi i t]$

(a) $\mathrm{Re}[w(t)] = \exp(-t) \quad \cos(2\pi t)$

$\mathrm{Im}[w(t)] = \exp(-t)\sin(2\pi t)$

(b) Die Periode ist durch

$$2\pi T = 2\pi \Rightarrow T = 1$$

(c) und die Amplitude durch

$$A(t) = |z(t)| = \exp(-t) \Rightarrow A(2) = \exp(-2) \equiv$$

(3)
$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$$

$$= \sin x \, \frac{\exp(-y) + \exp(+y)}{2} + \cos x \, \frac{\exp(-y) - \exp(+y)}{2i}$$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy)$$

$$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

(4) Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\exp[i(a+b)] = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

$$= \exp(ia) \exp(ib)$$

$$= [\cos a + i \sin a][\cos b + i \sin b]$$

$$= \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$+ i[\sin a \cos b + \cos a \sin b]$$

$$\Rightarrow \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

(5)

(6) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}}}{4} - \frac{\cancel{e^{2x}} - 2\,\cancel{e^{-2x}}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

(7)(a) $z^6 + 7 = 0 \Rightarrow z^6 = -7 = 7 \exp(i\pi + 2\pi i k)$ $k \in \mathbb{Z}$

Lösungen sind also

$z_k = 7^{1/6} \exp\left(\frac{i\pi + 2\pi i k}{6}\right) = 7^{1/6} \exp\left[\frac{i\pi}{6}(2k+1)\right]$

mit $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$

(b) $z^9 + 3 = 0 \Rightarrow z^9 = -3 = 3 \exp(i\pi)$

$\Rightarrow z_k = 3^{1/9} \exp\left[\frac{i\pi}{9}(1+2k)\right]$; $k \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$