Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 11

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Vektoreigenschaft des Kreuzprodukts

Wir wollen zeigen, dass sich die kartesischen Komponenten des Kreuzprodukts unter Basistransformationen von einer kartesischen rechtshändigen Basis zu einer anderen solcher Basis wie Vektor, also einer Drehung

$$\vec{e}_j = T_{kj} \vec{e}_k' \tag{1}$$

mit $\hat{T} \in \mathrm{SO}(3)$, so dass

$$(\vec{e}_j \times \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_l = (\vec{e}_j' \times \vec{e}_k') \cdot \vec{e}_l' = \epsilon_{jkl} \tag{2}$$

mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol ϵ_{jkl} mit $\epsilon_{123} = 1$.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $T_{ab} = \vec{e}_a' \cdot \vec{e}_b$ gilt.

Lösung:

$$\vec{e}_a' \cdot \vec{e}_b = \vec{e}_a' \cdot T_{cb} \vec{e}_c' = T_{cb} \vec{e}_a' \cdot \vec{e}_c' = T_{cb} \delta_{ac} = T_{ab}. \tag{3}$$

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass sich die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ bzgl. der beiden Basen gemäß

$$a_j' = T_{jk} a_k \Leftrightarrow \underline{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \hat{T} \underline{a} \tag{4}$$

bzw. umgekehrt

$$a_k = T_{jk} a_j' \Leftrightarrow \underline{a} = \hat{T}^{\mathrm{T}} \underline{a}' \tag{5}$$

transformieren. Dabei ist $\hat{T}^{\mathrm{T}}$ die zu $\hat{T}$ transponierte Matrix.

Lösung:

$$a_j' = \vec{e}_j' \cdot \vec{a} = \vec{e}_j' a_k \vec{e}_k = (\vec{e}_j' \cdot \vec{e}_k) a_k = T_{jk} a_k \tag{6}$$

und

$$a_k = \vec{e}_k \cdot \vec{a} = \vec{e}_k \cdot a_j' \vec{e}_j' = (\vec{e}_j' \cdot \vec{e}_k) a_j' = T_{jk} a_j' = (\hat{T}^{\mathrm{T}})_{kj} a_j'. \tag{7}$$

(c) (4 Punkte) Beweisen Sie damit, dass für die Komponenten des Vektorprodukts $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ebenfalls

$$\underline{c}' = \hat{T} \underline{c} \quad \text{bzw.} \quad c_j' = T_{jk} c_k \tag{8}$$

gilt.

Hinweis: Für die Komponenten des Kreuzprodukts bzgl. der rechtshändigen kartesischen Basis gilt

$$c_l = \vec{e}_l \cdot \vec{c} = \vec{e}_l \cdot (a_j b_k \vec{e}_j \times \vec{e}_k) = a_j b_k \vec{e}_l \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \epsilon_{ljk} \vec{e}_l a_j b_k. \tag{9}$$

Beweis:

$$c_j' = \vec{e}_j' \cdot \vec{c} = \vec{e}_j' \cdot a_k b_l \vec{e}_k \times \vec{e}_l = a_k b_l \vec{e}_j' \cdot (T_{k'k} \vec{e}_{k'}' \times T_{l'l} \vec{e}_{l'}') = (T_{k'k} a_k)(T_{l'l} b_l) \vec{e}_j' \cdot (\vec{e}_{k'}' \times \vec{e}_{l'}') = \epsilon_{jk'l'} a_{k'}' b_{l'}'. \tag{10}$$

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Vektoreigenschaft des Nablaoperators

Ein Skalarfeld $\Phi(\vec{x}) = \tilde{\Phi}(\underline{x})$ transformiert sich unter der oben beschriebenen Drehung kartesischer rechtshändiger Basen gemäß

$$\Phi(\vec{x}) = \tilde{\Phi}(\underline{x}) = \tilde{\Phi}'(\underline{x}') \tag{11}$$

und die Komponenten eines Vektorfeldes gemäß

$$\underline{A}'(\underline{x}') = \hat{T}\underline{A}(\underline{x}). \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass der Operator

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_j \partial_j = \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{13}$$

sich in seiner Wirkung auf Skalarfelder und Vektorfelder wie ein Vektor verhält, d.h. dass

(a) ...$\operatorname{grad}\Phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) = \vec{e}_j \partial_j \tilde{\Phi}(\underline{x})$ ein Vektorfeld ist, d.h. dass

$$\vec{e}_j \partial_j \tilde{\Phi}(\underline{x}) = \vec{e}'_k \partial'_k \tilde{\Phi}'(\underline{x}') \tag{14}$$

gilt.

Lösung:

$$\vec{e}'_k \partial'_k \tilde{\Phi}'(\underline{x}') = \vec{e}'_k \frac{\partial x_j}{\partial x'_k} \partial_j \tilde{\Phi}(\underline{x}) = T_{kj} \vec{e}'_k \partial_j \tilde{\Phi}(\underline{x}) = \vec{e}_j \partial_j \tilde{\Phi}(\underline{x}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{x}). \tag{15}$$

(b) ...$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \partial_j A_j(\underline{x})$ ein Skalarfeld ist, d.h. dass

$$\partial_j A_j(\underline{x}) = \partial'_k A'_k(\underline{x}') \tag{16}$$

ist.

Lösung:

$$\partial'_k A'_k(\underline{x}') = \frac{\partial x_j}{\partial x'_k} \partial_j T_{kl} A_l(\underline{x}) = T_{kj} T_{kl} \partial_j A_l(\underline{x}) = \delta_{jl} \partial_j A_l(\underline{x}) = \partial_j A_j(\underline{x}). \tag{17}$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$T_{kj} T_{kl} = (\vec{e}'_k \cdot \vec{e}_j)(\vec{e}'_k \cdot \vec{e}_l) = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_l = \delta_{jl} \tag{18}$$

ist.

(c) ...$\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$ ein Vektorfeld ist, d.h.

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{e}_j \epsilon_{jkl} \partial_k A_l(\underline{x}) = \vec{e}'_k \epsilon_{kab} \partial'_a A'_b(\underline{x}') \tag{19}$$

ist.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_k'\epsilon_{kab}\partial_a' A_b'(\underline{x}') &= \vec{e}_k'\epsilon_{kab}\frac{\partial x_c}{\partial x_a'}\partial_c T_{bd} A_d(\underline{x}) \\
&= \vec{e}_k'\epsilon_{kab} T_{ac} T_{bd}\partial_c A_d(\underline{x}) \\
&= \vec{e}_l \epsilon_{kab} T_{kl} T_{ac} T_{bd}\partial_c A_d(\underline{x}) \\
&= \vec{e}_l \vec{e}_k' \cdot (\vec{e}_a' \times \vec{e}_b') T_{kl} T_{ac} T_{bd}\partial_c A_d(\underline{x}) \\
&= \vec{e}_l \vec{e}_l \cdot (\vec{e}_c \times \vec{e}_d)\partial_c A_d(\underline{x}) \\
&= \vec{e}_l \epsilon_{lcd}\partial_c A_d(\underline{x}) \\
&= \vec{e}_j \epsilon_{jkl}\partial_k A_l(\underline{x})
\end{aligned} \tag{20}
$$