H. van Hees **Wintersemester 2025/2026**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 10

Aufgabe 1: Drehungen um eine vorgegebene Achse
Zeigen Sie, daß durch

$$\vec{x}' = \hat{D}_{\vec{n}}(\varphi)\vec{x} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x}) + \vec{n}\times(\vec{x}\times\vec{n})\cos\varphi + (\vec{n}\times\vec{x})\sin\varphi \tag{1}$$

eine Drehung des Vektors $\vec{x}$ um die Drehachse in Richtung von $\vec{n}$, wobei $|\vec{n}| = 1$, um den Winkel $\varphi \in [0,\pi]$ im Sinne der Rechte-Hand-Regel gegeben ist.

Anleitung: Im folgenden sei $\hat{x} = \vec{x}/r$ mit $r = |\vec{x}|$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{x}$. Falls $\vec{n} \parallel \hat{x}$ ist die Formel sicher korrekt (warum?). Sei also $\vec{n}\times\hat{x} \neq 0$. Dann beschreiben wir die Drehung am besten in dem folgenden an $\vec{x}$ angepaßten kartesischen rechtshändigen Koordinatensystem $\vec{e}_3 = \vec{n}$, $\vec{e}_2 = \vec{n}\times\hat{x}/|\hat{x}\times\vec{n}|$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_2\times\vec{e}_3$

(a) Drücken Sie $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ so einfach wie möglich mit Hilfe von $\vec{n}$ und $\hat{x}$ aus.

Lösung: Zuerst berechnen wir zur Normierung den Betrag des Vektorprodukts

$$|\hat{x}\times\vec{n}|^2 = (\hat{x}\times\vec{n})\cdot(\hat{x}\times\vec{n}) = [(\hat{x}\times\vec{n})\times\hat{x}]\cdot\vec{n}. \tag{2}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die allgemein gültige Formel $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. Für das Doppelvektorprodukt in der Klammer können wir die Formel

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) \tag{3}$$

verwenden, was auf

$$|\hat{x}\times\vec{n}|^2 = [\vec{n}\hat{x}^2 - \hat{x}(\hat{x}\cdot\vec{n})]\cdot\vec{n} = 1 - (\hat{x}\cdot\vec{n})^2 \tag{4}$$

führt.

Dieser Ausdruck ist offenbar nur dann 0, wenn $\hat{x} \parallel \vec{n}$, und das ist voraussetzungsgemäß nicht der Fall. Es ist also

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{n}\times\hat{x}}{\sqrt{1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2}}. \tag{5}$$

Die erneute Anwendung von (3) liefert

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \frac{(\vec{n}\times\hat{x})\times\vec{n}}{\sqrt{1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2}} = \frac{\hat{x} - (\vec{n}\cdot\hat{x})\vec{n}}{\sqrt{1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2}}. \tag{6}$$

(b) Bestimmen Sie die Komponenten von $\vec{x}$ bzgl. des kartesischen Koordinatensystems $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Lösung: Da die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ eine kartesische Basis bilden, sind die Komponenten des Vektors durch die Skalarprodukte mit diesen Basisvektoren gegeben. Es gilt also

$$\begin{aligned} x_1 &= \vec{e}_1\cdot\vec{x} = \frac{r}{\sqrt{1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2}}[1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2] = r\sqrt{1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2},\\ x_2 &= \vec{e}_2\cdot\vec{x} = r\vec{e}_2\cdot\hat{x} = 0,\\ x_3 &= \vec{e}_3\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{x} = r\vec{n}\cdot\hat{x}. \end{aligned} \tag{7}$$

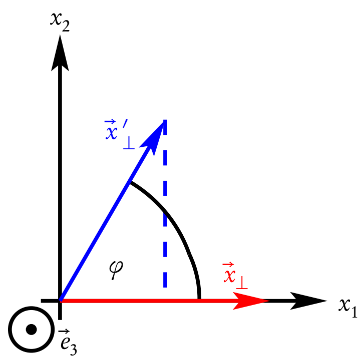
(c) Bzgl. dieses Koordinatensystems handelt es sich offenbar um eine Drehung um die 3-Achse. Was sind demnach die Komponenten von $\vec{x}'$ bzgl. dieses Koordinatensystems?

Hinweis: Zeichen Sie die Projektion $\vec{x}_\perp$ von $\vec{x}$ und $\vec{x}_\perp'$ von $\vec{x}'$ auf die 12-Ebene in das oben konstruierte kartesische Koordinatensystem ein und lesen Sie die Komponenten x_1' und x_2' des gedrehten Vektors ab. Beachten Sie weiter, daß offenbar $x_3' = x_3$ gilt.

Lösung: Die Projektion des Vektors $\vec{x}$ auf die 12-Ebene ist gemäß (7) offenbar durch

$$\vec{x}_\perp = x_1 \vec{e}_1 \tag{8}$$

gegeben. In der Projektion auf die 12-Ebene sieht die Situation also wie folgt aus:



Die Orientierung der drei Basisvektoren in dieser Zeichnung ergibt sich daraus, daß die Basis konstruktionsgemäß eine rechtshändige Basis ist. Ebenso erfolgt definitionsgemäß die Drehung um die $\vec{n} = \vec{e}_3$-Achse im Sinne der Rechte-Hand-Regel, d.h. streckt man den Daumen der rechten Hand in die Richtung von $\vec{n}$ (in der Zeichnung also aus der Zeichenebene heraus, angedeutet durch den Kreis mit Punkt), geben die Finger die Drehrichtung an. Für die Komponenten von $\vec{x}'$ ergibt sich aus der Zeichnung sofort

$$x_1' = r_\perp \cos\varphi, \quad x_2' = r_\perp \sin\varphi, \quad x_3' = x_3 = r\vec{n} \cdot \hat{x} = \vec{n} \cdot \vec{x}. \tag{9}$$

Dabei ist

$$r_\perp = |\vec{x}_\perp| = |x_1| = r\sqrt{1 - (\hat{x} \cdot \vec{n})^2}. \tag{10}$$

(d) Drücken Sie zum Schluss

$$\vec{x}' = \sum_{j=1}^{3} x_j' \vec{e}_j$$

durch die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{n}$ aus und zeigen Sie, daß das Resultat mit (1) übereinstimmt.

Lösung: Man liest die Komponenten des gedrehten Vektors aus der obigen Skizze ab, was auf (9) führt und drückt schließlich wieder die Basisvektoren mit Hilfe der Formeln (4) und (5) durch $\vec{n}$ und $\hat{x}$ aus. Man erhält dann nach einigen einfachen Umformungen

$$\vec{x}' = \sum_{j=1}^{3} x_j' \vec{e}_j = r_\perp(\vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi) + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) = (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} + \cos\varphi[\vec{n} \times (\vec{x} \times \vec{n})] + \sin\varphi(\vec{n} \times \vec{x}), \tag{11}$$

und das war zu zeigen.

Diese Formel gilt offenbar auch für den Fall, daß $\vec{x} \,||\, \vec{n}$, denn dann ist $\vec{n} \times \vec{x} = 0$, und folglich ergibt (11)

$$\vec{x}\,' = (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} = \vec{x}, \tag{12}$$

und das muß auch so sein, denn wenn $\vec{x} \,||\, \vec{n}$, ändert sich an dem Vektor durch Drehung um sich selbst nichts.

Bemerkung: Wir haben eben gezeigt, daß die Drehungen offenbar durch einen Drehwinkel $\varphi \in [0, \pi]$ und einen Einheitsvektor $\vec{n}$ eindeutig parametrisiert werden können. Wir können dies zusammenfassen zu dem Vektor $\vec{\varphi} = \varphi \vec{n}$, und der liegt in der abgeschlossenen Kugel $|\vec{\varphi}| \leq \pi$. Allerdings ist für $\varphi = \pi$ die Drehachse nicht eindeutig bestimmt, denn offenbar führt eine Drehung um π um die Achse $-\vec{n}$ zum gleichen Resultat wie die Drehung um die Achse $\vec{n}$. Um die Drehung um π eindeutig zu machen, müssen wir also Punkte auf dem Rand der Kugel vom Radius π identifizieren. Dieses kaum vorstellbare geometrische Konstrukt ergibt eine interessante topologische Eigenschaft, die allerdings erst in der Quantentheorie interessant wird. Für die klassische Mechanik können wir diese Subtilitäten getrost ignorieren.