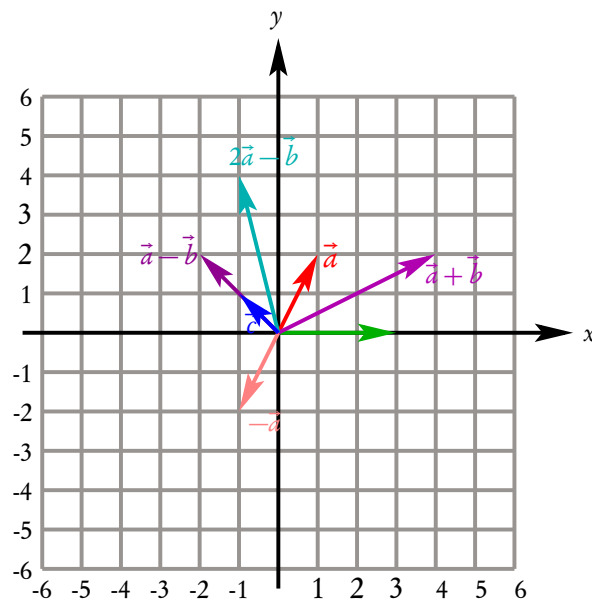


Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 8

Aufgabe 1: Vektoralgebra in der Ebene

Gegeben seien die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} in der x - y -Ebene bzgl. einer kartesischen Basis: $\vec{a} = (1, 2)^T$, $\vec{b} = (3, 0)^T$, $\vec{c} = (-1, 1)^T$.

- (a) Zeichnen Sie die drei Vektoren in ein Koordinatensystem.



- (b) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$.
 (c) $-\vec{a} = (-1, -2)$, $\vec{a} + \vec{b} = (4, 2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-2, 2)$ und $2\vec{a} - \vec{b} = (-1, 4)$.
 (d) $\vec{e}_c = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.
 (e) $\vec{a} \cdot \vec{e}_c = 1/\sqrt{2}$, $\vec{b} \cdot \vec{e}_c = -3/\sqrt{2}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{e}_c = -\sqrt{2}$.
 (f) Die Gleichung für α und β ist $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha + 3\beta, 2\alpha) = \vec{c} = (-1, 1)^T$. Wir müssen also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\alpha + 3\beta &= -1 \\ 2\alpha &= 1\end{aligned}$$

lösen. Aus der zweiten Gleichung folgt $\alpha = 1/2$. Setzen wir das in die erste Gleichung ein, ergibt sich $\beta = -1/2$.

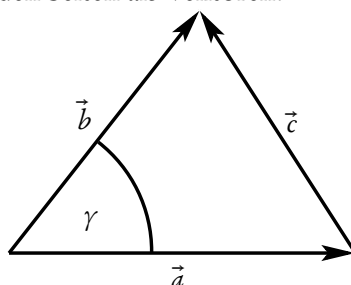
Aufgabe 2: Winkel im Skalarprodukt

Allgemein gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma,$$

wobei γ den von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

- (a) $2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos \gamma = 1/2 \Rightarrow \gamma = \pi/3$.
 (b) Wir zeichnen das Dreieck mit den Seiten als Vektoren:



Aus der Zeichnung liest man ab, dass $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$ und also $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ ist. Daraus folgt

$$c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{b} - \vec{a})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

QED

- (c) $|(\vec{a} \cdot \vec{b})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\cos \gamma| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Man kann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch rein algebraisch beweisen. Es ist klar, dass für $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b} = 0$ die Ungleichung (mit dem Gleichheitszeichen) erfüllt ist. Seien also $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$.

Dazu betrachten wir das quadratische Polynom

$$f(\lambda) = (\vec{a} + \lambda \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \lambda^2 \vec{b}^2 + 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Da das Skalarprodukt positiv definit ist, d.h. es ist $f(\lambda) \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, es kann allenfalls eine doppelte reelle Nullstelle λ_0 geben.

Die Lösung der quadratischen Gleichung lautet nun

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2} \pm \frac{1}{\vec{b}^2} \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \vec{b}^2}. \quad (2)$$

Damit es höchstens eine doppelte reelle Nullstelle gibt, muss der Ausdruck unter der Wurzel

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \vec{b}^2 \leq 0 \quad (3)$$

sein. Demnach ist also

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|, \quad (4)$$

und das war zu zeigen.

Weiter kann wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts $f(\lambda) = 0$ nur sein, wenn für ein $\vec{a} + \lambda \vec{b} = 0$ ist, d.h. wenn \vec{a} und \vec{b} linear abhängig sind.