Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 11

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Vektoreigenschaft des Kreuzprodukts

Wir wollen zeigen, dass sich die kartesischen Komponenten des Kreuzprodukts unter Basistransformationen von einer kartesischen rechtshändigen Basis zu einer anderen solcher Basis wie Vektorkomponenten verhalten. Dabei ist mit der Drehmatrix $\hat{T} = (T_{kj})$

$$\vec{e}_j = T_{kj} \vec{e}'_k \tag{1}$$

mit $\hat{T} \in \mathrm{SO}(3)$, so dass

$$(\vec{e}_j \times \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_l = (\vec{e}'_j \times \vec{e}'_k) \cdot \vec{e}'_l = \epsilon_{jkl} \tag{2}$$

mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol ϵ_{jkl} mit $\epsilon_{123} = 1$.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $T_{ab} = \vec{e}'_a \cdot \vec{e}_b$ gilt.

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass sich die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ bzgl. der beiden Basen gemäß

$$a'_j = T_{jk} a_k \Leftrightarrow \underline{a}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \hat{T} \underline{a} \tag{3}$$

bzw. umgekehrt

$$a_k = T_{jk} a'_j \Leftrightarrow \underline{a} = \hat{T}^{\mathrm{T}} \underline{a}' \tag{4}$$

transformieren. Dabei ist $\hat{T}^{\mathrm{T}}$ die zu $\hat{T}$ transponierte Matrix.

(c) (4 Punkte) Beweisen Sie damit, dass für die Komponenten des Vektorprodukts $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ebenfalls

$$\underline{c}' = \hat{T} \underline{c} \quad \text{bzw.} \quad c'_j = T_{jk} c_k \tag{5}$$

gilt.

Hinweis: Für die Komponenten des Kreuzprodukts bzgl. der rechtshändigen kartesischen Basis gilt

$$c_l = \vec{e}_l \cdot \vec{c} = \vec{e}_l \cdot (a_j b_k \vec{e}_j \times \vec{e}_k) = a_j b_k \vec{e}_l \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \epsilon_{ljk} \vec{e}_l a_j b_k. \tag{6}$$

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Vektoreigenschaft des Nablaoperators

Ein Skalarfeld $\Phi(\vec{x}) = \tilde{\Phi}(\underline{x})$ transformiert sich unter der oben beschriebenen Drehung kartesischer rechtshändiger Basen gemäß

$$\Phi(\vec{x}) = \tilde{\Phi}(\underline{x}) = \tilde{\Phi}'(\underline{x}') \tag{7}$$

und die Komponenten eines Vektorfeldes gemäß

$$\underline{A}'(\underline{x}') = \hat{T}\underline{A}(\underline{x}). \tag{8}$$

Zeigen Sie, dass der Operator

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_j \partial_j = \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{9}$$

sich in seiner Wirkung auf Skalarfelder und Vektorfelder wie ein Vektor verhält, d.h. dass

(a) (3 Punkte) ...grad $\Phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) = \vec{e}_j \partial_j \tilde{\Phi}(\underline{x})$ ein Vektorfeld ist, d.h. dass

$$\vec{e}_j \partial_j \tilde{\Phi}(\underline{x}) = \vec{e}'_k \partial'_k \tilde{\Phi}'(\underline{x}') \tag{10}$$

gilt.

(b) (3 Punkte) ...div $\vec{A}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \partial_j A_j(\underline{x})$ ein Skalarfeld ist, d.h. dass

$$\partial_j A_j = \partial'_k A'_k \tag{11}$$

ist.

(c) (4 Punkte) ...rot $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$ ein Vektorfeld ist, d.h.

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_j \epsilon_{jkl} \partial_k A_l(\underline{x}) = \vec{e}'_k \epsilon_{kab} \partial'_a A'_b(\underline{x}') \tag{12}$$

ist.