

## Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 10

### Aufgabe 1 [10 Punkte]: Drehungen um eine vorgegebene Achse

Zeigen Sie, daß durch

$$\vec{x}' = \hat{D}_{\vec{n}}(\varphi) \vec{x} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) + \vec{n} \times (\vec{x} \times \vec{n}) \cos \varphi + (\vec{n} \times \vec{x}) \sin \varphi \quad (1)$$

eine Drehung des Vektors  $\vec{x}$  um die Drehachse in Richtung von  $\vec{n}$ , wobei  $|\vec{n}| = 1$ , um den Winkel  $\varphi \in [0, \pi]$  im Sinne der Rechte-Hand-Regel gegeben ist.

**Anleitung:** Im folgenden sei  $\hat{x} = \vec{x}/r$  mit  $r = |\vec{x}|$  der Einheitsvektor in Richtung von  $\vec{x}$ . Falls  $\vec{n} \parallel \hat{x}$  ist die Formel sicher korrekt (warum?). Sei also  $\vec{n} \times \hat{x} \neq 0$ . Dann beschreiben wir die Drehung am besten in dem folgenden an  $\vec{x}$  angepaßten kartesischen rechtshändigen Koordinatensystem  $\vec{e}_3 = \vec{n}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{n} \times \hat{x}/|\hat{x} \times \vec{n}|$ ,  $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$

- (a) [3 Punkte] Drücken Sie  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  so einfach wie möglich mit Hilfe von  $\vec{n}$  und  $\hat{x}$  aus.
- (b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Komponenten von  $\vec{x}$  bzgl. des kartesischen Koordinatensystems  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .
- (c) [3 Punkte] Bzgl. dieses Koordinatensystems handelt es sich offenbar um eine Drehung um die 3-Achse. Was sind demnach die Komponenten von  $\vec{x}'$  bzgl. dieses Koordinatensystems?

**Hinweis:** Zeichen Sie die Projektion  $\vec{x}_\perp$  von  $\vec{x}$  und  $\vec{x}'_\perp$  von  $\vec{x}'$  auf die 12-Ebene in das oben konstruierte kartesische Koordinatensystem ein und lesen Sie die Komponenten  $x'_1$  und  $x'_2$  des gedrehten Vektors ab. Beachten Sie weiter, daß offenbar  $x'_3 = x_3$  gilt.

- (d) [2 Punkte] Drücken Sie zum Schluss

$$\vec{x}' = \sum_{j=1}^3 x'_j \vec{e}_j$$

durch die Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{n}$  aus und zeigen Sie, daß das Resultat mit (1) übereinstimmt.