H. van Hees **Wintersemester 2024/2025**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 11

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Hauptachsentransformation einer symmetrischen Matrix
Gegeben sei die symmetrische $\mathbb{R}^{3\times 3}$-Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Der Satz von der Hauptachsentransformation besagt, dass man die Matrix durch eine Drehung, also eine SO(3)-Transformation diagonalisieren kann. Dies wollen wir für die gegebene Matrix konkret ausführen.

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det(\hat{A} - \lambda \mathbb{1}). \tag{2}$$

Lösung: Durch Entwickeln nach der ersten Zeile erhalten wir

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] - [(2-\lambda) - 1] + [1 - (2-\lambda)] \\ &= (2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda) + 2 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4. \end{aligned} \tag{3}$$

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\hat{A}$.

Lösung: Die Eigenwerte der Matrix sind die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms. Man rät als eine Nullstelle $\lambda_1 = 1$. Polynomdivision ergibt dann

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 4). \tag{4}$$

Das verbliebene quadratische Polynom liefert als weitere Nullstellen $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$. Wir haben also eine doppelte Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und eine einfache Nullstelle $\lambda_3 = 4$.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie drei orthonormierte Eigenvektoren $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ so, dass sie ein rechtshändiges kartesisches Basissystem bilden.

Lösung: Wir bestimmen zunächst einen Eigenvektor $\underline{u}_1$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, für den gilt $\hat{A}\underline{u}_1 = \underline{u}_1$ bzw.

$$(\hat{A} - \mathbb{1})\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Man erhält also als einzige unabhängige Gleichung

$$T_{11} + T_{21} + T_{31} = 0. \tag{6}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ist also zweidimensional, was zu erwarten war, da wir wissen, dass symmetrische Matrizen stets mittels einer Drehung diagonalisierbar sind. Wir wählen die entsprechenden beiden Basisvektoren aus Eigenvektoren als normierte zueinander orthogonale Eigenvektoren, z.B.

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Der verbliebene Eigenvektor $\underline{u}_3$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 4$ muss notwendig orthogonal auf den beiden bereits gefundenen Basisvektoren sein. Damit wir eine rechtshändige kartesische Basis aus Eigenvektoren erhalten, muss also

$$\underline{u}_3 = \underline{u}_1 \times \underline{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

sein. In der Tat rechnet man direkt nach, dass

$$\hat{A}\underline{u}_3 = 4\underline{u}_3 \tag{9}$$

ist.

(d) (3 Punkte) Rechnen Sie dann nach, dass die Transformationsmatrix $\hat{T}^{\mathrm{T}} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \in \mathrm{SO}(3)$ ist und dass sie tatsächlich die Matrix diagonalisiert, d.h. dass $\hat{M}' = \hat{T}\hat{M}\hat{T}^{-1} = \hat{T}\hat{M}\hat{T}^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gilt.

Lösung: Die Transformationsmatrix ist gerade die Matrix mit den $\underline{u}_j$ als Spalten:

$$\hat{T}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Es ist

$$\det \hat{T} = \det \hat{T}^{\mathrm{T}} = \mathrm{vol}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) = (\underline{u}_1 \times \underline{u}_2) \cdot \underline{u}_3 = \underline{u}_3 \cdot \underline{u}_3 = +1. \tag{11}$$

Da es sich um eine Basistransformation zwischen Orthornormalbasen handelt, ist die Matrix auch orthogonal, d.h. es ist $\hat{T}^{-1} = \hat{T}^{\mathrm{T}}$ und damit $\hat{T} \in \mathrm{SO}(3)$.

Durch Ausmultiplizieren der Matrizen ergibt sich dann in der Tat

$$\hat{A}' = \hat{T}\hat{A}\hat{T}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{12}$$