Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 10

Aufgabe 1: Drehungen um eine vorgegebene Achse

Zeigen Sie, daß durch

$$\vec{x}' = \hat{D}_{\vec{n}}(\varphi)\vec{x} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x}) + \vec{n}\times(\vec{x}\times\vec{n})\cos\varphi + (\vec{n}\times\vec{x})\sin\varphi \tag{1}$$

eine Drehung des Vektors $\vec{x}$ um die Drehachse in Richtung von $\vec{n}$, wobei $|\vec{n}|=1$, um den Winkel $\varphi \in [0,\pi]$ im Sinne der Rechte-Hand-Regel gegeben ist.

Anleitung: Im folgenden sei $\hat{x} = \vec{x}/r$ mit $r = |\vec{x}|$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{x}$. Falls $\vec{n} \parallel \hat{x}$ ist die Formel sicher korrekt (warum?). Sei also $\vec{n}\times\hat{x} \neq 0$. Dann beschreiben wir die Drehung am besten in dem folgenden an $\vec{x}$ angepaßten kartesischen rechtshändigen Koordinatensystem $\vec{e}_3 = \vec{n}$, $\vec{e}_2 = \vec{n}\times\hat{x}/|\hat{x}\times\vec{n}|$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_2\times\vec{e}_3$

(a) Drücken Sie $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ so einfach wie möglich mit Hilfe von $\vec{n}$ und $\hat{x}$ aus.

Lösung: Zuerst berechnen wir zur Normierung den Betrag des Vektorprodukts

$$|\hat{x}\times\vec{n}|^2 = (\hat{x}\times\vec{n})\cdot(\hat{x}\times\vec{n}) = [(\hat{x}\times\vec{n})\times\hat{x}]\cdot\vec{n}. \tag{2}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die allgemein gültige Formel $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. Für das Doppelvektorprodukt in der Klammer können wir die Formel

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) \tag{3}$$

verwenden, was auf

$$|\hat{x}\times\vec{n}|^2 = [\vec{n}\hat{x}^2 - \hat{x}(\hat{x}\cdot\vec{n})]\cdot\vec{n} = 1 - (\hat{x}\cdot\vec{n})^2 \tag{4}$$

führt.

Dieser Ausdruck ist offenbar nur dann 0, wenn $\hat{x} \parallel \vec{n}$, und das ist voraussetzungsgemäß nicht der Fall. Es ist also

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{n}\times\hat{x}}{\sqrt{1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2}}. \tag{5}$$

Die erneute Anwendung von (3) liefert

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \frac{(\vec{n}\times\hat{x})\times\vec{n}}{\sqrt{1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2}} = \frac{\hat{x}-(\vec{n}\cdot\hat{x})\vec{n}}{\sqrt{1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2}}. \tag{6}$$

(b) Bestimmen Sie die Komponenten von $\vec{x}$ bzgl. des kartesischen Koordinatensystems $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Lösung: Da die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ eine kartesische Basis bilden, sind die Komponenten des Vektors durch die Skalarprodukte mit diesen Basisvektoren gegeben. Es gilt also

$$\begin{aligned} x_1 &= \vec{e}_1\cdot\vec{x} = \frac{r}{\sqrt{1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2}}[1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2] = r\sqrt{1-(\hat{x}\cdot\vec{n})^2}, \\ x_2 &= \vec{e}_2\cdot\vec{x} = r\vec{e}_2\cdot\hat{x} = 0, \\ x_3 &= \vec{e}_3\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{x} = r\vec{n}\cdot\hat{x}. \end{aligned} \tag{7}$$

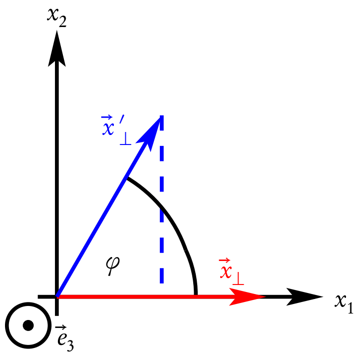
(c) Bzgl. dieses Koordinatensystems handelt es sich offenbar um eine Drehung um die 3-Achse. Was sind demnach die Komponenten von $\vec{x}'$ bzgl. dieses Koordinatensystems?

Hinweis: Zeichen Sie die Projektion $\vec{x}_\perp$ von $\vec{x}$ und $\vec{x}_\perp'$ von $\vec{x}'$ auf die 12-Ebene in das oben konstruierte kartesische Koordinatensystem ein und lesen Sie die Komponenten x_1' und x_2' des gedrehten Vektors ab. Beachten Sie weiter, daß offenbar $x_3' = x_3$ gilt.

Lösung: Die Projektion des Vektors $\vec{x}$ auf die 12-Ebene ist gemäß (7) offenbar durch

$$\vec{x}_\perp = x_1 \vec{e}_1 \tag{8}$$

gegeben. In der Projektion auf die 12-Ebene sieht die Situation also wie folgt aus:



Die Orientierung der drei Basisvektoren in dieser Zeichnung ergibt sich daraus, daß die Basis konstruktionsgemäß eine rechtshändige Basis ist. Ebenso erfolgt definitionsgemäß die Drehung um die $\vec{n} = \vec{e}_3$-Achse im Sinne der Rechte-Hand-Regel, d.h. streckt man den Daumen der rechten Hand in die Richtung von $\vec{n}$ (in der Zeichnung also aus der Zeichenebene heraus, angedeutet durch den Kreis mit Punkt), geben die Finger die Drehrichtung an. Für die Komponenten von $\vec{x}'$ ergibt sich aus der Zeichnung sofort

$$x_1' = r_\perp \cos\varphi, \quad x_2' = r_\perp \sin\varphi, \quad x_3' = x_3 = r\vec{n} \cdot \hat{x} = \vec{n} \cdot \vec{x}. \tag{9}$$

Dabei ist

$$r_\perp = |\vec{x}_\perp| = |x_1| = r\sqrt{1 - (\hat{x} \cdot \vec{n})^2}. \tag{10}$$

(d) Drücken Sie zum Schluss

$$\vec{x}' = \sum_{j=1}^{3} x_j' \vec{e}_j$$

durch die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{n}$ aus und zeigen Sie, daß das Resultat mit (1) übereinstimmt.

Lösung: Man liest die Komponenten des gedrehten Vektors aus der obigen Skizze ab, was auf (9) führt und drückt schließlich wieder die Basisvektoren mit Hilfe der Formeln (4) und (5) durch $\vec{n}$ und $\hat{x}$ aus. Man erhält dann nach einigen einfachen Umformungen

$$\vec{x}' = \sum_{j=1}^{3} x_j' \vec{e}_j = r_\perp(\vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi) + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) = (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} + \cos\varphi[\vec{n} \times (\vec{x} \times \vec{n})] + \sin\varphi(\vec{n} \times \vec{x}), \tag{11}$$

und das war zu zeigen.

Diese Formel gilt offenbar auch für den Fall, daß $\vec{x} \,||\, \vec{n}$, denn dann ist $\vec{n} \times \vec{x} = 0$, und folglich ergibt (11)

$$\vec{x}' = (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} = \vec{x}, \tag{12}$$

und das muß auch so sein, denn wenn $\vec{x} \,||\, \vec{n}$, ändert sich an dem Vektor durch Drehung um sich selbst nichts.

Bemerkung: Wir haben eben gezeigt, daß die Drehungen offenbar durch einen Drehwinkel $\varphi \in [0, \pi]$ und einen Einheitsvektor $\vec{n}$ eindeutig parametrisiert werden können. Wir können dies zusammenfassen zu dem Vektor $\vec{\varphi} = \varphi \vec{n}$, und der liegt in der abgeschlossenen Kugel $|\vec{\varphi}| \leq \pi$. Allerdings ist für $\varphi = \pi$ die Drehachse nicht eindeutig bestimmt, denn offenbar führt eine Drehung um π um die Achse $-\vec{n}$ zum gleichen Resultat wie die Drehung um die Achse $\vec{n}$. Um die Drehung um π eindeutig zu machen, müssen wir also Punkte auf dem Rand der Kugel vom Radius π identifizieren. Dieses kaum vorstellbare geometrische Konstrukt ergibt eine interessante topologische Eigenschaft, die allerdings erst in der Quantentheorie interessant wird. Für die klassische Mechanik können wir diese Subtilitäten getrost ignorieren.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://th.physik.uni-frankfurt.de/~hees/mameth-l3-WS2425/index.html`