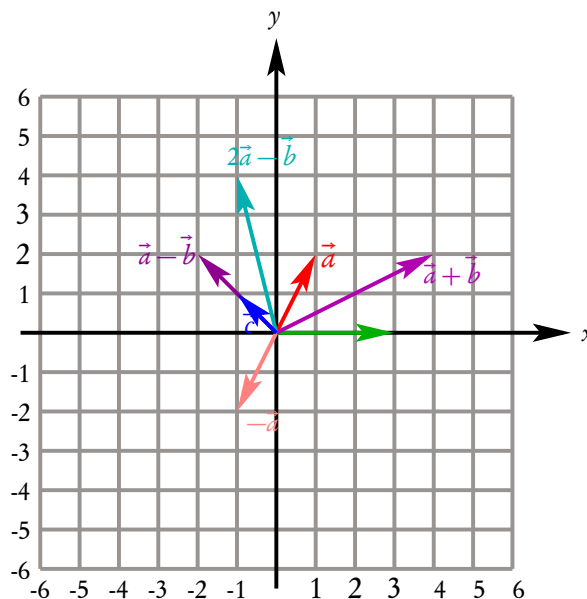


## Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 6

### Aufgabe 1: Vektoralgebra in der Ebene

Gegeben seien die drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  in der  $x$ - $y$ -Ebene bzgl. einer kartesischen Basis:  $\vec{a} = (1, 2)^T$ ,  $\vec{b} = (3, 0)^T$ ,  $\vec{c} = (-1, 1)^T$ .

(a) Zeichnen Sie die drei Vektoren in ein Koordinatensystem.



(b)  $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = \sqrt{2}$ .

(c)  $-\vec{a} = (-1, -2)$ ,  $\vec{a} + \vec{b} = (4, 2)$ ,  $\vec{a} - \vec{b} = (-2, 2)$  und  $2\vec{a} - \vec{b} = (-1, 4)$ .

(d)  $\vec{e}_c = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ .

(e)  $\vec{a} \cdot \vec{e}_c = 1/\sqrt{2}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{e}_c = -3/\sqrt{2}$ ,  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{e}_c = -\sqrt{2}$ .

(f) Die Gleichung für  $\alpha$  und  $\beta$  ist  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha + 3\beta, 2\alpha) = \vec{c} = (-1, 1)^T$ . Wir müssen also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\alpha + 3\beta &= -1 \\ 2\alpha &= 1\end{aligned}$$

lösen. Aus der zweiten Gleichung folgt  $\alpha = 1/2$ . Setzen wir das in die erste Gleichung ein, ergibt sich  $\beta = -1/2$ .

### Aufgabe 2: Winkel im Skalarprodukt

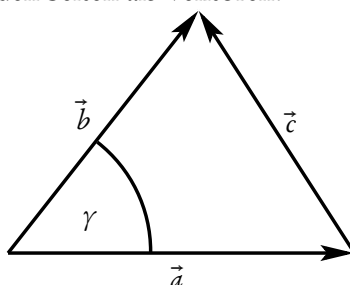
Allgemein gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma,$$

wobei  $\gamma$  den von den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

(a)  $2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos \gamma = 1/2 \Rightarrow \gamma = \pi/3.$

(b) Wir zeichnen das Dreieck mit den Seiten als Vektoren:



Aus der Zeichnung liest man ab, dass  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$  und also  $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$  ist. Daraus folgt

$$c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{b} - \vec{a})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

QED

(c)  $|(\vec{a} \cdot \vec{b})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\cos \gamma| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$

Man kann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch rein algebraisch beweisen. Es ist klar, dass für  $\vec{a} = 0$  oder  $\vec{b} = 0$  die Ungleichung (mit dem Gleichheitszeichen) erfüllt ist. Seien also  $\vec{a} \neq 0$  und  $\vec{b} \neq 0$ .

Dazu betrachten wir das quadratische Polynom

$$f(\lambda) = (\vec{a} + \lambda \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \lambda^2 \vec{b}^2 + 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Da das Skalarprodukt positiv definit ist, d.h. es ist  $f(\lambda) \geq 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Das bedeutet, es kann allenfalls ein doppelte reelle Nullstelle  $\lambda_0$  geben.

Die Lösung der quadratischen Gleichung lautet nun

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2} \pm \frac{1}{\vec{b}^2} \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \vec{b}^2}. \quad (2)$$

Damit es höchstens eine doppelte reelle Nullstelle gibt, muss der Ausdruck unter der Wurzel

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \vec{b}^2 \leq 0 \quad (3)$$

sein. Demnach ist also

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|, \quad (4)$$

und das war zu zeigen.

Weiter kann wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts  $f(\lambda) = 0$  nur sein, wenn für ein  $\vec{a} + \lambda \vec{b} = 0$  ist, d.h. wenn  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  linear abhängig sind.