H. van Hees

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 5

Aufgabe 1: Resonanzkatastrophe

Betrachten Sie den ungedämpften harmonischen Oszillator mit einer harmonischen äußeren Kraft, deren Kreisfrequenz der Eigenfrequenz des Oszillators entspricht, also die lineare inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega_0 t). \tag{1}$$

Sie dürfen ohne weitere Rechnung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$x_{\text{hom}}(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \tag{2}$$

als bekannt voraussetzen.

Wir suchen also nur noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

(a) Zeigen Sie, dass der Standardansatz „vom Typ der rechten Seite“

$$x_{\text{inh}}(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \tag{3}$$

nicht zum Ziel führt.

Diskutieren Sie, warum man dies aus physikalischen Gründen erwarten kann.

Lösung: Geht man mit dem Ansatz in die DGL ein, findet man für die linke Seite

$$\ddot{x}_{\text{inh}} + \omega_0^2 x_{\text{inh}} = 0 \tag{4}$$

im Widerspruch zur inhomogenen Gleichung, wonach die rechte Seite $A\cos(\omega_0 t)$ sein soll.

Zur physikalischen Erklärung des Scheiterns bemerken wir, dass selbstverständlich auch für diesen Fall die allgemeine Lösung des Problems die Form

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{inh}}(t) \tag{5}$$

besitzt. Dabei ist $x_{\text{hom}}(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung und x_{inh} irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Zum Einen haben wir in diesem Fall nun die Reibung vernachlässigt. Daher klingt die allgemeine inhomogene Lösung im Gegensatz zum Fall mit Reibung mit der Zeit nicht ab. Es ergibt sich vielmehr die harmonische Schwingung

$$x_{\text{hom}}(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t). \tag{6}$$

Nun haben wir für die Frequenz der antreibenden Kraft die Eigenfrequenz ω_0 gewählt. Dies führt dazu, dass der Massenpunkt immer im Takt der Eigenfrequenz „Kicks“ durch diese antreibende Kraft erhält. Wie wir gleich sehen werden, führt dies zu einem unbegrenzten Anwachsen der Amplitude der Schwingungen und damit zur sog. Resonanzkatastrophe.

Für den Fall, dass man die äußere Kraft in der Form $F(t) = A\cos(\Omega t)$ bzw. mit $\Omega \neq \omega_0$ ansetzt, führt der Ansatz

$$x_{\text{inh}}(t) = C_1 \cos(\Omega t) + C_2 \sin(\Omega t) \tag{7}$$

zum Ziel. Setzt man dies nämlich in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$\ddot{x}_{\text{inh}} + \omega_0^2 x_{\text{inh}} = (\omega_0^2 - \Omega^2) x_{\text{inh}} = (\omega_0^2 - \Omega^2)[C_1 \cos(\Omega t) + C_2 \sin(\Omega t)] = A\cos(\Omega t). \tag{8}$$

Der Ansatz führt also mit

$$C_1 = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad C_2 = 0 \tag{9}$$

zum Ziel, und in diesem Fall ist also eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$z_{\text{inh}}(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t). \tag{10}$$

Für $\Omega \to \omega_0$ divergiert allerdings die Amplitude.

(b) Verwenden Sie nun den Ansatz vom Typ „Variation der Konstanten“

$$x_{\text{inh}}(t) = C(t)[C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)] \tag{11}$$

um doch noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden.

Lösung: Die Ableitungen der Ansatzfunktion sind

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\text{inh}}(t) &= \cos(\omega_0 t)[C_1 \dot{C}(t) + C_2 \omega_0 C(t)] + \sin(\omega_0 t)[C_2 \dot{C}(t) - C_1 \omega_0 C(t)], \\ \ddot{x}_{\text{inh}}(t) &= \cos(\omega_0 t)[C_1 \ddot{C}(t) + 2C_2 \omega_0 \dot{C}(t) - C_1 \omega_0^2 C(t)] \\ &\quad + \sin(\omega_0 t)[C_2 \ddot{C}(t) - 2C_1 \omega_0 \dot{C}(t) - C_2 \omega_0^2 C(t)]. \end{aligned} \tag{12}$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, ergibt sich

$$\cos(\omega_0 t)[C_1 \ddot{C}(t) + 2C_2 \omega_0 \dot{C}(t)] + \sin(\omega_0 t)[C_2 \ddot{C}(t) - 2C_1 \omega_0 \dot{C}(t)] = A \cos(\omega_0 t). \tag{13}$$

Vergleicht man die Faktoren vor $\cos(\omega_0 t)$ und $\sin(\omega_0 t)$ auf der rechten und linken Seite, folgt

$$C_1 \ddot{C}(t) + 2C_2 \omega_0 \dot{C}(t) = A, \quad C_2 \ddot{C}(t) - 2C_1 \omega_0 \dot{C}(t) = 0. \tag{14}$$

Wir benötigen nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Offenbar können wir die zweite Gleichung erfüllen, indem wir $C_1 = 0$ wählen und verlangen, dass

$$\ddot{C}(t) = 0 \Rightarrow C(t) = C_1' t + C_2' \tag{15}$$

mit beliebigen Integrationskonstanten C_1' und C_2' gilt. Setzen wir dies in die erste der Gln. (14) ein, folgt

$$2C_2 \omega_0 C_1' = A \Rightarrow C_2 C_1' = \frac{A}{2\omega_0}. \tag{16}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist also gemäß unserem Ansatz (11)

$$x_{\text{inh}}(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t), \tag{17}$$

wobei wir auch noch die Konstante C_2' in (15) weggelassen haben, denn wir benötigen ja nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

(c) Lösen Sie nun unter Verwendung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (2) und der soeben gefundenen speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung das Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ und skizzieren Sie diese Lösung.

Argumentieren Sie nun nochmals physikalisch, warum man mit dem Standardansatz (3) scheitert.

Lösung: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich nun aus der Summe der allgemeinen Lösung der homogenen und unserer speziellen Lösung (17) für die inhomogene Gleichung, also

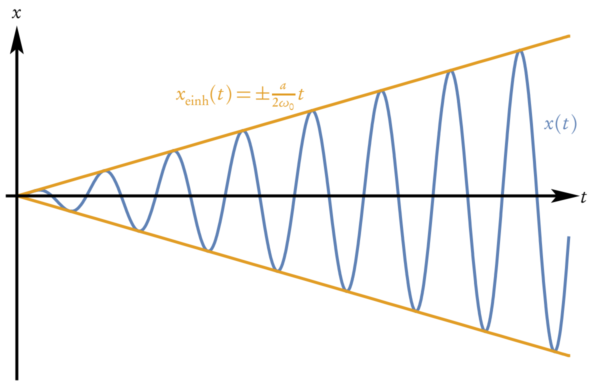
$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega t). \tag{18}$$

Mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ findet man $C_1 = C_2 = 0$, also

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t), \tag{19}$$

d.h. das Pendel schwingt mit der Resonanzfrequenz ω_0, wobei die Amplitude linear mit der Zeit anwächst.

Dies erklärt nun quantitativ, dass in der Tat für $t \to \infty$ die Lösung divergiert. Die Amplitude wird durch die treibende Kraft immer größer, d.h. für $t \to \infty$ steckt unendlich viel Energie im System. In der Realität wird freilich irgendwann die Feder zerreißen, so dass die Lösung für große Zeiten unrealistisch ist.



Aufgabe 2: Lösung mit Potenzreihenansatz (Frobenius-Methode)

Wir betrachten die homogene Lineare DGL 2. Ordnung mit *zeitabhängigen Koeffizienten*

$$t^2 \ddot{x} + 2t\dot{x} = 0. \tag{20}$$

Setzen Sie nun einen allgemeinen Potenzreihenansatz der Form

$$x(t) = t^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^j = \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^{j+\lambda} \tag{21}$$

an.

(a) Setzen Sie den Ansatz in die DGL ein und bestimmen Sie mögliche Werte für λ und damit dann Formeln für die Koeffizienten C_j.

Lösung: Wir dürfen Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzbereiches „gliedweise differenzieren“, d.h. es gilt

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j (j+\lambda) t^{j+\lambda-1}, \quad \ddot{x}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j (j+\lambda)(j+\lambda-1) t^{j+\lambda-2}. \tag{22}$$

Setzen wir dies in die DGL (20) ein, folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j (j+\lambda)(j+\lambda+1) t^{j+\lambda} = 0. \tag{23}$$

Da eine Potenzreihe genau dann 0 ist, wenn all ihre Koeffizienten 0 sind, muss also für alle $j \in \mathbb{N}$

$$(j+\lambda)(j+\lambda+1) C_j = 0 \tag{24}$$

sein.

(b) Bestimmen Sie nun zwei linear unabhängige Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, indem Sie geeignete λ und C_j bestimmen. Dabei darf man stets annehmen, dass $C_0 \neq 0$ ist (*warum?*).

Lösung: Man darf annehmen, dass $C_0 \neq 0$ ist, weil andernfalls sich einfach der Wert von λ um die entsprechende Zahl verschiebt. Ist z.B. $C_0 = 0$ aber $C_1 \neq 0$, ist

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j t^{j+\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+1} t^{j+\lambda+1}. \tag{25}$$

Benennt man dann die Koeffizienten und λ um, setzt also $C_j' = C_{j+1}$ und $\lambda' = \lambda + 1$ hat man wieder

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j' t^{j+\lambda'} \tag{26}$$

mit $C_0' \neq 0$. Wir dürfen also von vornherein annehmen, dass $C_0 \neq 0$ ist, ohne dass durch diese Annahme evtl. Lösungen verloren gehen.

Da voraussetzungsgemäß $C_0 \neq 0$ ist, folgt aus (24) für $j = 0$

$$\lambda(\lambda+1) = 0. \tag{27}$$

Diese Gleichung hat offenbar zwei Lösungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -1$. Für diese Lösungen wird (24) zu

$$\lambda = 0: \quad C_j j(j+1) = 0 \Rightarrow C_j = 0 \quad \text{für} \quad j \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}; \Rightarrow x_1(t) = C_0 = \text{const.} \tag{28}$$

bzw.

$$\lambda = -1: \quad C_j j(j-1) = 0 \Rightarrow C_j = 0 \quad \text{für} \quad j \geq 2; \Rightarrow x_2(t) = \frac{C_0}{t} + C_1. \tag{29}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$x(t) = A + \frac{B}{t}, \tag{30}$$

wobei $A, B = \text{const.}$