

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 2

Aufgabe 1: Berechnen von Ableitungen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und berechnen Sie deren Ableitungen.

(a) $f(x) = (x^2)^{-1/3}$

Lösung: Die Funktion ist offenbar in $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Nach der Kettenregel ist die Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2)^{-4/3} 2x = -\frac{2x}{3}(x^2)^{-4/3} = -\frac{2}{3x}(x^2)^{-1/3}. \quad (1)$$

(b) $f(x) = (x^4 - 1)/(x^2 - 1)$

Lösung: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Bevor wir die Funktion ableiten, vereinfachen wir sie, indem wir im Zähler die „3. binomische Formel“ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ mit $a = x^2$ und $b = 1$ anwenden:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x. \quad (2)$$

Bemerkung: In diesem Fall können die Definitionslücken der Funktion f bei $x = \pm 1$ „behoben“ werden. Streng genommen ist aber $\tilde{f} = x^2 + 1$ mit $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine von f verschiedene Funktion, da f nur in D definiert ist. Allerdings gilt für $x \in D$ stets $f(x) = \tilde{f}(x)$.

(c) $f(x) = \arctan(x^2)$

Lösung: Der arctan ist in ganz \mathbb{R} definiert, und damit ist für f der Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. Mit der Kettenregel folgt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^4} 2x = \frac{2x}{1+x^4}. \quad (3)$$

Aufgabe 2: Hyperbelfunktionen

Die Hyperbelfunktionen sind durch

$$\sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (4)$$

definiert. Sie heißen „sinus hyperbolicus“, „cosinus hyperbolicus“ und „tangens hyperbolicus“.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der drei Hyperbelfunktionen und berechnen Sie deren Ableitungen.

Lösung: Da $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind \sinh und \cosh ebenfalls in ganz \mathbb{R} definiert. Da weiter $\exp x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\cosh x \neq 0$ und folglich auch \tanh in ganz \mathbb{R} definiert. Es gilt $\exp'(x) = \exp x$ und folglich mit der Kettenregel $d/dx \exp(-x) = -\exp(-x)$. Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x. \quad (5)$$

Mit der Quotientenregel folgt daraus wiederum

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x. \quad (6)$$

Mit der Formel (8) kann man das auch in der Form

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (7)$$

ausdrücken.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (8)$$

gilt.

Lösung: Man kann diese Aufgabe auf zwei Arten lösen:

(i) Man verwendet einfach die Definition der Hyperbelfunktionen und wendet die binomischen Formeln an:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x &= \frac{1}{4} [\exp x + \exp(-x)]^2 = \frac{1}{4} [\exp(2x) + \exp(-2x) + 2], \\ \sinh^2 x &= \frac{1}{4} [\exp(2x) - \exp(-2x) - 2] \\ \Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

(ii) Wir definieren $f(x) = \cosh^2 x - \sinh^2 x$. Mit der Kettenregel findet man für die Ableitung $f'(x) = 2 \cosh x \sinh x - 2 \sinh x \cosh x = 0$. Eine Funktion, deren Ableitung verschwindet, ist konstant, d.h. $f(x) = f(0) = 1$.

(c) Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen arcosh , arsinh und artanh („area cosinus hyperbolicus“ usw.). Dabei ist $\operatorname{arcosh} : [1, \infty] \rightarrow [0, \infty]$. Berechnen Sie die Ableitungen mit Hilfe der Formel von der Ableitung der Umkehrfunktion.

Lösungen: (i) Wir setzen $y = \sinh x$ dann ist $x = \operatorname{arsinh} y$ und aus der Ableitungsformel für die Umkehrfunktion folgt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}. \quad (10)$$

Damit ist

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arsinh} y = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}. \quad (11)$$

(ii) Wir setzen $y = \cosh x$ dann ist $x = \operatorname{arcosh} y$ und aus der Ableitungsformel für die Umkehrfunktion folgt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}. \quad (12)$$

Damit ist

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arcosh} y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}. \quad (13)$$

(iii) Wir setzen $y = \tanh x$ dann ist $x = \operatorname{artanh} y$ und aus der Ableitungsformel für die Umkehrfunktion folgt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 - \tanh^2 x} = . \quad (14)$$

Damit ist

$$\frac{d}{dy} \operatorname{artanh} y = \frac{1}{1 - y^2}. \quad (15)$$

(d) Drücken Sie arsinh , arcosh und artanh mit Hilfe des \ln aus und bestätigen Sie die in der vorigen Teilaufgabe gefundenen Ableitungsformeln.

Lösungen: Im folgenden schreiben wir zur Abkürzung $A = \exp x$ dann ist

(i) $y = \sinh x = (A - 1/A)/2$. Wir lesen dies als Gleichung für A . Multiplizieren wir die Gleichung mit $2A$ folgt $2Ay = A^2 - 1$ und damit $A^2 - 2Ay - 1 = 0$. Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen

$$A_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}. \quad (16)$$

Da $A = \exp x > 0$, kommt nur die Lösung mit dem oberen Vorzeichen in Frage. Damit folgt

$$x = \ln A = \operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}). \quad (17)$$

Die Ableitung erfolgt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dy} \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} \right) = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} \frac{\sqrt{y^2 + 1} + y}{\sqrt{y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}. \quad (18)$$

(ii) $y = \cosh x = (A + 1/A)/2$. Wir lesen dies als Gleichung für A . Multiplizieren wir die Gleichung mit $2A$ folgt $2Ay = A^2 + 1$ und damit $A^2 - 2Ay + 1 = 0$. Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen

$$A_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}. \quad (19)$$

Offenbar muss für $y \rightarrow \infty$ auch $A \rightarrow \infty$ gehen. Also gilt wieder eindeutig das obere Vorzeichen und damit

$$x = \ln A = \operatorname{arcosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}). \quad (20)$$

Die Ableitung erfolgt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dy} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \right) = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \frac{\sqrt{y^2 - 1} + y}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}. \quad (21)$$

(iii) $y = \tanh x = (A - 1/A)/(A + 1/A) = (A^2 - 1)/(A^2 + 1)$. Multipliziert man mit $A^2 + 1$, folgt $y(A^2 + 1) = A^2 - 1$ und damit $(y - 1)A^2 + y + 1 = 0$ bzw. $A^2 - (1 + y)/(1 - y) = 0$. Damit folgt

$$x = \operatorname{artanh} y = \ln \left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right). \quad (22)$$

Mit der Ketten- und Quotientenregel erhalten wir

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1+y}{1-y}} \frac{1-y - (-1-y)}{(1-y)^2} = \frac{1}{2} \frac{1-y}{1+y} \frac{2}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1+y)(1-y)} = \frac{1}{1-y^2}. \quad (23)$$