H. van Hees **Wintersemester 2024/2025**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 11

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Hauptachsentransformation einer symmetrischen Matrix
Gegeben sei die symmetrische $\mathbb{R}^{3\times 3}$-Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Der Satz von der Hauptachsentransformation besagt, dass man die Matrix durch eine Drehung, also eine SO(3)-Transformation diagonalisieren kann. Dies wollen wir für die gegebene Matrix konkret ausführen.

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det(\hat{A} - \lambda \mathbb{1}). \tag{2}$$

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\hat{A}$.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie drei orthonormierte Eigenvektoren $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ so, dass sie ein rechtshändiges kartesisches Basissystem bilden.

(d) (3 Punkte) Rechnen Sie dann nach, dass die Transformationsmatrix $\hat{T}^{\mathrm{T}} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \in \mathrm{SO}(3)$ ist und dass sie tatsächlich die Matrix diagonalisiert, d.h. dass $\hat{M}' = \hat{T}\hat{M}\hat{T}^{-1} = \hat{T}\hat{M}\hat{T}^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gilt.