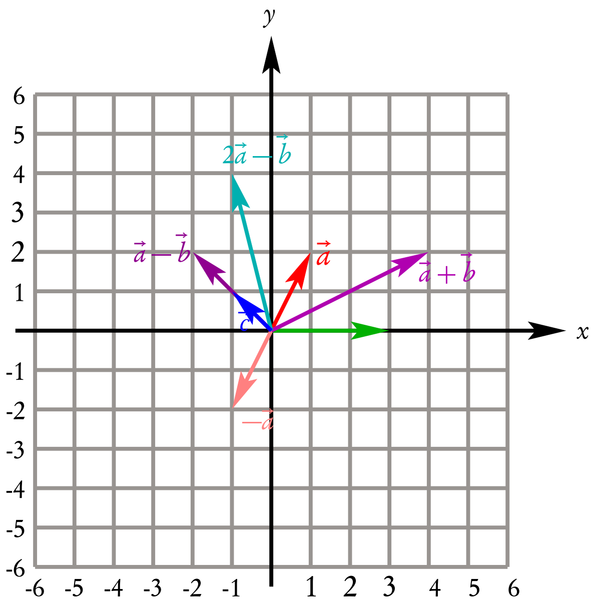
Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 6

Aufgabe 1: Vektoralgebra in der Ebene

Gegeben seien die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in der x-y-Ebene bzgl. einer kartesischen Basis: $\vec{a} = (1,2)^{\mathrm{T}}$, $\vec{b} = (3,0)^{\mathrm{T}}$, $\vec{c} = (-1,1)^{\mathrm{T}}$.

(a) Zeichnen Sie die drei Vektoren in ein Koordinatensystem.



(b) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$.

(c) $-\vec{a} = (-1,-2)$, $\vec{a}+\vec{b} = (4,2)$, $\vec{a}-\vec{b} = (-2,2)$ und $2\vec{a}-\vec{b} = (-1,4)$.

(d) $\vec{e}_c = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

(e) $\vec{a}\cdot\vec{e}_c = 1/\sqrt{2}$, $\vec{b}\cdot\vec{e}_c = -3/\sqrt{2}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}_c = -\sqrt{2}$.

(f) Die Gleichung für α und β ist $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} = (\alpha+3\beta, 2\alpha) = \vec{c} = (-1,1)^{\mathrm{T}}$. Wir müssen also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= -1 \\ 2\alpha &= 1 \end{aligned}$$

lösen. Aus der zweiten Gleichung folgt $\alpha = 1/2$. Setzen wir das in die erste Gleichung ein, ergibt sich $\beta = -1/2$.

Aufgabe 2: Winkel im Skalarprodukt

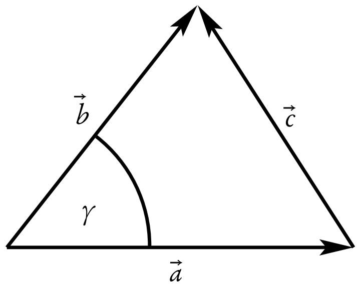
Allgemein gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma,$$

wobei γ den von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

(a) $2(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \Rightarrow \cos\gamma = 1/2 \Rightarrow \gamma = \pi/3$.

(b) Wir zeichnen das Dreieck mit den Seiten als Vektoren:



Aus der Zeichnung liest man ab, dass $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$ und also $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$ ist. Daraus folgt

$$c^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{b}-\vec{a})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

QED

(c) $|(\vec{a}\cdot\vec{b})| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\gamma| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Man kann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch rein algebraisch beweisen. Es ist klar, dass für $\vec{a}=0$ oder $\vec{b}=0$ die Ungleichung (mit dem Gleichheitszeichen) erfüllt ist. Seien also $\vec{a}\neq 0$ und $\vec{b}\neq 0$.

Dazu betrachten wir das quadratische Polynom

$$f(\lambda) = (\vec{a}+\lambda\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \lambda^2\vec{b}^2 + 2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}, \quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Da das Skalarprodukt positiv definit ist, d.h. es ist $f(\lambda)\geq 0$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}$. Das bedeutet, es kann allenfalls ein doppelte reelle Nullstelle λ_0 geben.

Die Lösung der quadratischen Gleichung lautet nun

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}^2} \pm \frac{1}{\vec{b}^2}\sqrt{(\vec{a}\vec{b})^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2}. \tag{2}$$

Damit es höchstens eine doppelte reelle Nullstelle gibt, muss der Ausdruck unter der Wurzel

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2 \leq 0 \tag{3}$$

sein. Demnach ist also

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|, \tag{4}$$

und das war zu zeigen.

Weiter kann wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts $f(\lambda)=0$ nur sein, wenn für ein $\vec{a}+\lambda\vec{b}=0$ ist, d.h. wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind.