H. van Hees **Sommersemester 2024**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 8

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Reziproke Vektoren

Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ drei nicht-koplanare Vektoren im E^3, so dass $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$ ist. Dann definieren wir drei dazu „**reziproke Vektoren**“ durch

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{V}, \quad \vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{V}, \quad \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{V}. \tag{1}$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\vec{a}' \cdot \vec{a} = \vec{b}' \cdot \vec{b} = \vec{c}' \cdot \vec{c} = 1$,

(b) (3 Punkte) $\vec{a}' \cdot \vec{b} = \vec{a}' \cdot \vec{c} = \vec{b}' \cdot \vec{a} = \vec{b}' \cdot \vec{c} = \vec{c}' \cdot \vec{a} = \vec{c}' \cdot \vec{b} = 0$ und

(c) (4 Punkte) $\vec{a}' \cdot (\vec{b}' \times \vec{c}') = 1/V$.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Gleichung einer Ebene

Es seien P_1, P_2 und P_3 drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte und $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$ die entsprechenden Ortsvektoren. Zeigen Sie, dass dann Ortsvektoren $\vec{r}$ der Ebene durch die Gleichung

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)] = 0 \tag{2}$$

gegeben sind.

Hinweis: Argumentieren Sie, warum die Ebene eindeutig durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \lambda_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \tag{3}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ bestimmt ist, und dass (2) die Existenz von zwei reellen Zahlen λ_1 und λ_2 impliziert, so dass (3) gilt und, dass umgekehrt jeder Vektor der Form (3) auch (2) erfüllt.

Was bedeutet (2) geometrisch?
