

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 7

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Vektorprodukt

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$, $\vec{c} = (-1, -1, 3)$.

- (a) [2 Punkte] Berechnen Sie die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$.
- (b) [2 Punkte] Berechnen Sie mittels der Definition des Vektorproduktes den Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Berechnen Sie zur Probe ebenfalls den Winkel mittels des Skalarproduktes.
- (c) [2 Punkte] Berechnen Sie den Vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.
- (d) [2 Punkte] Zeigen Sie durch Berechnung der beiden Seiten, daß die Beziehung

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

die sog. “bac-cab-Regel”, erfüllt ist.

- (e) [2 Punkte] Beweisen Sie die Beziehung in (d) für beliebige Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Kronecker-Symbol

Die Indizes i, j und k können jeweils die Werte 1, 2 oder 3 annehmen. Das Kronecker-Symbol ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Vereinfachen Sie, soweit wie möglich, folgende Ausdrücke:

$$(a) \sum_{i,j=1}^3 (a_i b_j \delta_{ij}), \quad (b) \sum_{i,j=1}^3 (a_i b_j \delta_{i1} \delta_{ij}), \quad (c) \sum_{i,j,k=1}^3 (a_i b_j c_k \delta_{i2} \delta_{jk})$$

Aufgabe 3 [10 Punkte]: Levi-Civita-Symbol 1

Im folgenden können alle Indizes jeweils die Werte 1, 2 oder 3 annehmen. Das Levi-Civita-Symbol ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dazu äquivalent ist die Definition, daß $\epsilon_{123} = 1$ ist und ansonsten ϵ_{ijk} total antisymmetrisch unter Indexvertauschungen ist. Zeigen Sie (durch Nachdenken oder explizit), daß die folgenden Formeln gelten

[(a) 8 Punkte, (b) 2 Punkte]:

$$(a) \sum_{k=1}^3 (\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}) = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}, \quad (b) \sum_{j,k=1}^3 (\epsilon_{ijk} \epsilon_{mjk}) = 2\delta_{im}.$$

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/mameth-13-SS24/index.html>