Tensoren

Andreas Slateff
mailto:slateff@netway.at

8. Mai 1999

Zusammenfassung

Der vorliegende Artikel erläutert in aller Kürze den Begriff des Tensors. Es werden lediglich Definition und Konstruktion des Tensorproduktes endlich vieler Vektorräume beschrieben. Beweise wurden beiseite gelassen. Grundlegende Kenntnisse über Vektorräume (lineare Algebra) werden vorausgesetzt.

1 Multilineare Abbildungen

Seien $V_1, \ldots, V_p, W$ Vektorräume über einem gemeinsamen kommutativen Körper $\mathbb{K}$. Skalare mögen im Folgenden durch Buchstaben des hinteren, Vektoren durch Buchstaben des vorderen Alphabets bezeichnet werden.

Eine Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_p \to W$ heißt *„multilinear“*, wenn sie in jedem Argument linear ist:

$$f(\ldots, x \cdot a_i + y \cdot b_i, \ldots) = x \cdot f(\ldots, a_i, \ldots) + y \cdot f(\ldots, b_i, \ldots) \tag{1}$$

Ist der Bildraum W der Skalarkörper $\mathbb{K}$, so heißt f eine *„Multilinearform“*. Die Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \ldots \times V_p \to W$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_p; W)$.

Ist $p = 1$, so ist f eine *„lineare Abbildung“* oder ein *„Vektorraum-Homomorphismus“*.

Ist insbesondere $W = \mathbb{K}$, also f skalarwertig, so heißt f eine *„Linearform“*. Die Menge $\mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ aller Linearformen $V \to \mathbb{K}$ nennen wir den zu V *„dualen Vektorraum“* V^*.

Beispiele:

1. $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^3$
   $f : (a_1, a_2) \mapsto a_1 \times a_2$
   $\times$-Produkt, „bilineare Abbildung“

2. V_2 beliebig, $V_1 = V_2^*$, $W = \mathbb{K}$
   $V_2^* \times V_2 \to \mathbb{K}$
   $(a^*, a) \mapsto a^*(a) =< a^*, a >$ „kanonische Paarung“

3. $V_1 = V_2 = V$
   $f : V \times V \to \mathbb{K}$
   „Bilinearform“

2 Tensorprodukt

Seien $V_1, \ldots, V_p$ Vektorräume über $\mathbb{K}$. Die Menge $\mathfrak{M}$ *aller* Abbildungen $V_1 \times \ldots \times V_p \to \mathbb{K}$ bildet mit punktweise erklärter Addition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
(\phi_1 + \phi_2)(a_1, \ldots, a_p) &:= \phi_1(a_1, \ldots, a_p) + \phi_2(a_1, \ldots, a_p) \\
(x\phi)(a_1, \ldots, a_p) &:= x \cdot \phi(a_1, \ldots, a_p) \\
&\forall \phi, \phi_1, \phi_2, \forall x \in \mathbb{K}
\end{aligned}$$

Als *„Träger“* supp ϕ einer Abbildung $\phi \in \mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Menge aller Tupel $(a_1, \ldots, a_p)$, deren Bild unter ϕ von 0 verschieden ist:

$$\text{supp } \phi := \{(a_1, \ldots, a_p) \,|\, \phi(a_1, \ldots, a_p) \neq 0\} \tag{2}$$

Sei M die Menge aller Funktionen aus $\mathfrak{M}$ mit endlichem Träger. Die Funktionen in M sind fast überall gleich 0. M bildet mit den von $\mathfrak{M}$ induzierten punktweisen Operationen einen Unterraum von $\mathfrak{M}$.

Zu jedem festen p-Tupel $(a_1, \ldots, a_p) \in V_1 \times \ldots \times V_p$ definieren wir eine δ-Funktion wie folgt:

$$\begin{aligned}
\delta_{a_1, \ldots, a_p} : V_1 \times \ldots \times V_p &\to \mathbb{K} \\
(a_1, \ldots, a_p) &\mapsto 1 \\
\text{sonst} &\mapsto 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Der Träger einer jeden δ-Funktion ist nur $(a_1, \ldots, a_p)$, daher sind die δ-Funktionen in M enthalten (endlicher Träger). Die δ-Funktionen bilden eine Basis von M.

Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mu : V_1 \times \ldots \times V_p &\to M \\
(a_1, \ldots, a_p) &\mapsto \delta_{a_1, \ldots, a_p},
\end{aligned} \tag{4}$$

welche jedem p-Tupel $a_1, \ldots, a_p$ „seine“ δ-Funktion zuweist, ist niemals multilinear.

Wir wollen die Abweichung der Abbildung μ von der Multilinearität untersuchen. Im Falle der Multilinearität müßte gelten:

$$\delta_{\ldots, a_i + b_i, \ldots} \quad (=) \quad \delta_{\ldots, a_i, \ldots} + \delta_{\ldots, b_i, \ldots} \tag{5}$$

$$\delta_{\ldots, x \cdot a_i, \ldots} \quad (=) \quad x \cdot \delta_{\ldots, a_i, \ldots} \tag{6}$$

Die Fehler lassen sich erfassen durch die Abbildungen

$$\delta_{\ldots, a_i + b_i, \ldots} - \delta_{\ldots, a_i, \ldots} - \delta_{\ldots, b_i, \ldots} \tag{7}$$

$$\delta_{\ldots, x \cdot a_i, \ldots} - x \cdot \delta_{\ldots, a_i, \ldots}, \tag{8}$$

welche (für alle a_i, b_i, x) einen Unterraum M_0 von M aufspannen, der die Abweichung der Abbildung μ von der Multilinearität beschreibt.

Nun gilt allerdings immer

$$\delta_{\ldots, a_i + b_i, \ldots} + M_0 = \delta_{\ldots, a_i, \ldots} + \delta_{\ldots, b_i, \ldots} + M_0 \tag{9}$$

$$\delta_{\ldots, x \cdot a_i, \ldots} + M_0 = x \cdot \delta_{\ldots, a_i, \ldots} + M_0, \tag{10}$$

da die zuvor vorhandenen Fehler durch die Rechnung mit entsprechenden Nebenklassen modulo M_0 ausgeglichen werden.

Als *„Tensorprodukt der Vektorräume $V_1, \dots, V_p$"* bezeichnen wir den Faktorraum M/M_0. Wir schreiben dafür $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$. Die Elemente des Tensorprodukts heißen *„Tensoren"*.

Tensoren der Gestalt $\delta_{a_1,\dots,a_p} + M_0$ werden als $a_1 \otimes \dots \otimes a_p$ geschrieben und heißen *„reine Tensoren"*. Nicht alle Tensoren sind reine Tensoren. Da allerdings die δ-Funktionen eine Basis von M bilden, lassen sich alle Tensoren als Linearkombination von reinen Tensoren darstellen. Die reinen Tensoren spannen das ganze Tensorprodukt auf, sind aber im Allgemeinen linear abhängig und bilden daher keine Basis.

Wir nennen jene Abbildung τ, die jedem p-Tupel $(a_1, \dots, a_p)$ den reinen Tensor $a_1 \otimes \dots \otimes a_p$ zuordnet, die *„kanonische Abbildung"*:

$$\begin{aligned} \tau : V_1 \times \dots \times V_p &\rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_p \\ (a_1, \dots, a_p) &\mapsto a_1 \otimes \dots \otimes a_p \end{aligned} \tag{11}$$

Die kanonische Abbildung ist multilinear.

Als *„universelle Eigenschaft des Tensorprodukts"* bezeichnet man folgenden Sachverhalt:

Zu jeder multilinearen Abbildung $f : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $g : V_1 \otimes \dots \otimes V_p \rightarrow W$ mit $f = g \circ \tau$.

Kennt man das Tensorprodukt und alle linearen Abbildungen davon in W, so kennt man alle multilinearen Abbildungen des kartesischen Produkts in W.

Wesentlich am Tensorprodukt ist weniger dessen explizite Bauart M/M_0 als seine universelle Eigenschaft.