
Klassische Mechanik

Hendrik van Hees¹
Goethe-Universität Frankfurt

19. August 2021

¹e-mail: hees@itp.uni-frankfurt.de

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
I Punktmechanik	6
1 Die Raum-Zeitstruktur der Newtonschen Mechanik	8
1.1 Die Newtonschen Grundgesetze	8
1.2 Der ungedämpfte harmonische Oszillator	12
1.3 Der gedämpfte harmonische Oszillator	16
1.3.1 Schwingfall ($\omega_0 > \gamma$)	16
1.3.2 Kriechfall ($\omega_0 < \gamma$)	18
1.3.3 Aperiodischer Grenzfall ($\omega_0 = \gamma$)	19
1.3.4 Direkte Lösung im aperiodischen Grenzfall	19
1.4 Der harmonisch getriebene gedämpfte Oszillator	20
1.4.1 Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung	21
1.4.2 Amplitudenresonanzfrequenz	22
1.4.3 Energieresonanz	23
1.4.4 Lösung des Anfangswertproblems	25
1.4.5 Getriebener harmonischer Oszillator mit beliebiger äußerer Kraft	26
1.4.6 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale	28
1.5 Symmetrien der Galilei-Newtonschen Raum-Zeit	30
1.5.1 Einschub: Grundlegendes zur Gruppentheorie	31
1.5.2 Geometrie der Galilei-Welt	33
1.6 Die volle Galileigruppe	34
1.6.1 Die Drehgruppe	35
1.6.2 Einschub über Normalteiler und Homomorphismen	40
1.6.3 Eine andere Parametrisierung der $SO(3)$	41
1.6.4 Das Vektorprodukt	42
1.6.5 Rotierende Bezugssysteme	43
1.6.6 Der freie Fall auf der rotierenden Erde	44
2 Kanonische Mechanik	48

2.1	Die Euler-Lagrange-Gleichungen	48
2.1.1	Beispiel: Freier Fall im homogenen Schwerfeld	51
2.2	Das Hamiltonsche Prinzip	52
2.3	Zwangsbedingungen	54
2.3.1	Beispiel: Schiefe Ebene	56
2.3.2	Das Foucault-Pendel	57
2.4	Das Noether-Theorem	60
2.5	Symmetrien von Raum und Zeit	61
2.5.1	Zeitliche Translationsinvarianz und Energieerhaltung	62
2.5.2	Räumliche Translationsinvarianz und Impulserhaltung	62
2.5.3	Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung	62
2.5.4	Galileiboostinvarianz und Schwerpunktsatz	63
2.6	Das Kepler-Problem	64
2.7	Hamiltonsche Mechanik	70
2.8	Kanonische Transformationen	72
2.9	Die Hamilton–Jacobische Differentialgleichung	74
2.10	Die symplektische Struktur des Phasenraums	75
2.11	Das Noether-Theorem in Hamiltonscher Formulierung	77
2.12	Liegruppen und Liealgebren	79
2.13	Die Galileigruppe	81
2.14	Die Symmetrien des Keplerproblems	82
2.15	Das Liouvillesche Theorem	86
3	Durchgerechnete Beispiele	88
3.1	Bewegung im homogenen Schwerfeld	88
3.1.1	Übung	89
3.2	Das Zykloidenpendel	90
3.3	Das mathematische Pendel	90
3.3.1	Kleinwinkelnäherung	91
3.3.2	Exakte Rechnung	92
3.4	Das sphärische Pendel	95
3.4.1	Die Lagrangefunktion	95
3.4.2	Kleine Schwingungen	96
3.5	Elastische Zweiteilchenstreuung	98
3.5.1	Das Schwerpunktsystem	99
3.5.2	Der Streuwinkel	101
3.6	Bewegung in rotierenden Bezugssystemen	101
3.6.1	Bewegung im Äquipotential-Paraboloiden	101
3.7	Elemente der Kreiseltheorie	103
3.7.1	Die Kinematik des starren Körpers	103
3.7.2	Freie Bewegung im homogenen Gravitationsfeld	105

Inhaltsverzeichnis

3.7.3	Der kräftefreie Kreisel	106
3.7.4	Stabilität bei Drehung um eine Hauptträgheitsachse	107
3.7.5	Einführung der Euler-Winkel	107
3.7.6	Der kräftefreie symmetrische Kreisel	108
3.7.7	Der Lagrangeformalismus für den freien symmetrischen Kreisel	111
3.7.8	Der schwere symmetrische Kreisel	113
3.7.9	Pseudoreguläre Präzession	114
3.7.10	Stabilität der Rotation um die senkrecht stehende Figurenachse	115
4	Spezielle Relativitätstheorie	117
4.1	Das spezielle Relativitätsprinzip	117
4.2	Die Raum-Zeit-Geometrie	125
4.3	Relativistische Dynamik eines Punktteilchens	130
4.3.1	Die Minkowskikraft	131
4.3.2	Der Newtonsche Grenzfall	132
4.3.3	Energie und Impuls des Punktteilchens	133
4.3.4	Das Hamiltonsche Wirkungsprinzip	134
4.4	Das Noethertheorem für die Poincarésymmetrie	139
4.5	Bewegung von Ladungen im elektromagnetischen Feld	142
4.5.1	Bewegung im homogenen elektrischen Feld	143
4.5.2	Bewegung im homogenen Magnetfeld	146
II	Mechanik der Kontinua	147
5	Einführung in die Statistische Physik	149
5.1	Die Phasenraumverteilungen	149
5.2	Die BBGKY-Hierarchie	151
5.3	Die Boltzmann-Gleichung für ein verdünntes Gas	152
5.4	Die Entropie und das H -Theorem	156
5.5	Lokales Gleichgewicht	158
5.6	Ideale Fluide	159
5.7	Thermodynamische Zustandsgrößen	159
A	Mathematischer Anhang	160
A.1	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	160
B	Kegelschnitte	163
B.1	Definition der Kegelschnitte	163
B.2	Analytische Beschreibung in der Ebene	164
B.2.1	Ellipse	164
B.2.2	Hyperbel	165

B.2.3 Parabel	168
Literaturverzeichnis	170

Teil I

Punktmechanik

Kapitel 1

Die Raum-Zeitstruktur der Newtonschen Mechanik

1.1 Die Newtonschen Grundgesetze

Wir wollen im folgenden in die Newtonsche Mechanik ohne nähere Problematisierung der dabei postulierten Begriffsbildungen, die aus der Entwicklung der Relativitäts- und Quantentheorie erwachsen sind, einführen.

Dies ist insofern gerechtfertigt, als die Newtonsche Mechanik ein in sich abgeschlossenes Begriffsgebäude darstellt, wenn man auf die nähere Begründung der wirkenden Kräfte verzichtet. Diese können in unserem Rahmen als empirisch gegeben angesehen werden, setzen allerdings die im folgenden genauer auszuführenden und mathematisch zu formalisierenden Begriffsbildungen von Raum und Zeit voraus. Wir werden auf die Veränderungen, die die Relativitätstheorie an diesem Bild von Raum und Zeit erfordern, später eingehen.

Wir beginnen mit dem **1. Newtonschen Gesetz**, der **Lex prima**:

Es existiert ein **absoluter Raum**, in dem die physikalischen Vorgänge ablaufen, der jedoch unabhängig von diesen Vorgängen existiert und durch einen orientierten dreidimensionalen euklidischen affinen Punktraum beschrieben wird.

Ferner existiert eine **absolute Zeit**, die unabhängig von den physikalischen Vorgängen abläuft und durch einen gerichteten reellen Strahl beschrieben wird.

Ein Körper, dessen äußere Ausdehnung gegenüber den Abmessungen seiner Bewegung vernachlässigt werden kann, bezeichnen wir als Massenpunkt.

Es existieren Bezugssysteme (die **Inertialsysteme**), in denen sich ein Massenpunktgeradlinig gleichförmig bewegt, solange er nicht durch äußere Einflüsse gezwungen wird, diesen Zustand der Bewegung zu verlassen.

Klarerweise müssen wir diese kurz zusammengefaßten Postulate der Raum-Zeit-Struktur mathematisch präzisieren. Zunächst betrachten wir den affinen Raum:

Ein affiner Raum ist ein Paar (E, V) , wobei E eine Menge ist, deren Elemente Punkte genannt werden und V ein endlichdimensionaler Vektorraum V , auf denen folgende algebraische Struktur definiert ist:

- (A1) Zu zwei Punkten $A, B \in E$ existiert genau ein Vektor $\vec{v}(A, B) \in V$. Zu jedem Punkt $A \in E$ und jedem Vektor $\vec{v} \in V$ existiert genau ein Punkt $B \in E$ mit $\vec{v} = \vec{v}(A, B)$.
- (A2) Für die Addition von Vektoren, die gemäß (A1) durch Paare von Punkten in E festgelegt sind,

1.1. Die Newtonschen Grundgesetze

gilt: $\vec{v}(A, B) + \vec{v}(B, C) = \vec{v}(A, C)$.

- (A3) Ein affiner Raum (E, V) heißt euklidisch, wenn V ein euklidischer Vektorraum ist, d.h. V ist ein endlichdimensionaler Vektorraum mit \mathbb{R} als Skalarenkörper, und es ist eine positiv definite Bilinearform, die euklidische Metrik, ausgezeichnet. Die Bilinearform zwischen zwei Vektoren bezeichnen wir einfach mit (\vec{x}, \vec{y}) oder $\vec{x}\vec{y}$.

Wir bemerken, daß aus fundamentalen Sätzen der linearen Algebra bekannt ist, daß wenigstens eine Orthonormalbasis existiert: Sei der Vektorraum n -dimensional. Dann ist $\{\vec{e}_j\}_{j=1\dots n}$ eine Orthonormalbasis, wenn $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$ ist. Dabei ist δ_{ij} das Kroneckersymbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Ferner wird aus (A1) unmittelbar klar, daß wir durch Festlegung eines beliebigen Punktes $O \in E$ und einer Orthonormalbasis $\{\vec{e}_j\}_{j=1\dots n}$ jedem Punkt $X \in E$ vermöge¹ $\vec{v}(O, X) = \vec{e}_j v^j$ umkehrbar eindeutig ein n -Tupel $v = (v^j) \in \mathbb{R}^n$ zuordnen können. Das Symbol v steht dabei für das n -Tupel aus den Vektorkomponenten v^j , die wir uns in einer Spalte angeordnet vorstellen:

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}. \quad (1.1.2)$$

Dabei Wir bezeichnen das Paar $(O, \{\vec{e}_j\})$ als eine **kartesische Basis des affinen euklidischen Raumes**.

- (A4) Ein beliebiger affiner Raum heißt orientiert, wenn der dazugehörige Vektorraum orientiert ist. Dabei wird eine Orientierung durch eine willkürliche Basis $\{\vec{b}_i\}_{i=1\dots n}$ bestimmt. Eine andere Basis $\{\vec{c}_j\}$ heißt gleich (entgegengesetzt) orientiert wenn die durch $\vec{c}_j = \vec{b}_i A^i_j$ festgelegte² Transformationsmatrix (A^i_j) eine positive (negative) Determinante besitzt.

Vermittels dieser algebraischen Definition des affinen euklidischen Raumes stehen uns über eine beliebige kartesische Basis sämtliche Hilfsmittel der mehrdimensionalen Analysis zur Verfügung. Andererseits müssen die Aussagen, die wir über ein physikalisches System machen, von der Wahl einer jeglichen Basis unabhängig sein.

Ebenso wie der Raum kann auch die Zeit als ein eindimensionaler affiner (euklidischer) orientierter Raum aufgefaßt werden, und wir können sie durch Auszeichnung eines Ursprungs und eines beliebigen Vektors \vec{e}_t durch die reellen Zahlen \mathbb{R} parametrisieren. Wir bezeichnen diesen „Zeitraum“ als E_t und den „Raumraum“ als E_r . Dann können wir die Raum-Zeit zu einem affinen Raum, die **Galilei-Newtonsche Raum-Zeit** oder auch kurz als die **Welt** zusammenfassen zu $E_t \times E_r$, und dieser Raum bildet in kanonischer Weise ebenfalls einen affinen Raum. Es ergibt aber aufgrund der strikt getrennten Struktur von Raum und Zeit in der Lex prima keinen Sinn, diesem Raum eine gemeinsame euklidische Struktur aufzuprägen. Die metrischen Strukturen von Raum und Zeit bleiben also ebenfalls getrennt.

¹Hier und im folgenden wird über gleichlautende Indizes von 1 bis n summiert (Einsteinsche Summationskonvention).

²Hierbei haben wir uns der Einsteinschen Summationskonvention bedient, nach der über gleichnamige Indizes zu summieren ist.

1. Die Raum-Zeitstruktur der Newtonschen Mechanik

In E_t haben wir die gewöhnliche reelle Metrik, und in E_r die euklidische dreidimensionale Geometrie als Struktur.

Nunmehr müssen wir das in der Lex prima aufgestellte kräftefreie Bewegungsgesetz mathematisch präzisieren. Wir können dies mit Hilfe der soeben eingeführten Welt $E_t \times E_r$ leicht unabhängig von jedem Bezugssystem tun. Ein kräftefreier Massepunkt bewegt sich geradlinig in E_r und gleichförmig in E_t , d.h. er legt zu gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück. Das bedeutet, daß die kräftefreie Bewegung eines Massepunktes durch eine Gerade in der Welt $E_t \times E_r$ beschrieben wird. Die Gerade wird festgelegt durch einen beliebigen Punkt und eine Richtung. Weiter benötigen wir zur Messung von Raum und Zeit noch willkürliche Skalen, die Maßeinheiten von Raum und Zeit.

Analytisch läßt sich dies durch die Wahl eines Zeitnullpunkts und einer Zeitrichtung, also eines Koordinatensystems in E_t und eine kartesische Basis in E_r , beschreiben. Bzgl. einer solchen Weltbasis können wir dann die kräftefreie Bewegung also durch

$$\vec{v}_t(O_t, T) = (t_0 + \lambda)\vec{e}_t, \quad \vec{v}_r(O_r, X) = \vec{x}_0 + \lambda\vec{u} \quad (1.1.3)$$

beschreiben. Wir können für \vec{v}_t und \vec{v}_r aber auch die Koordinaten $(t, x^1, x^2, x^3)^t$ einführen³. Dann verlieren wir zwar die Koordinatenunabhängigkeit, können jedoch die konkrete physikalische Bedeutung der bisher eingeführten Postulate noch genauer herausarbeiten. Sei also $\vec{v}_t(O_t, T) = t\vec{e}_t$ und $\vec{v}_r(O_r, X) = x^i\vec{e}_i$. Dann schreibt sich die oben parametrisierte freie Bewegung als

$$t = t_0 + \lambda, \quad x^i = x_0^i + \lambda u^i. \quad (1.1.4)$$

Dazu äquivalent ist die Formulierung mit Spaltenvektoren im \mathbb{R}^3 :

$$t = t_0 + \lambda, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{u}. \quad (1.1.5)$$

Wir können also den willkürlichen Weltparameter λ zugunsten der Zeit eliminieren und erhalten die bekannte Newtonsche Gleichung für die Bewegung eines kräftefreien Körpers:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + (t - t_0)\mathbf{u}, \quad (1.1.6)$$

wobei sich herausstellt, daß \vec{u} der Geschwindigkeitsvektor der Bewegung ist. Ein Koordinatensystem, in dem die kräftefreie Bewegung durch (1.1.6) beschrieben wird, nennen wir **galileisches Bezugssystem** oder **Inertialsystem**.

Wir können also die Lex prima dahingehend exakt formulieren, daß es ein Weltkoordinatensystem gibt, in dem sich ein kräftefreier Massepunkt gemäß (1.1.6) bewegt. Mathematisch ist diese Aussage nicht weiter kompliziert, sie wird durch die Struktur der Welt (E_t, E_r) geradezu herausgefordert, weil ja die Geraden in affinen Räumen ausgezeichnete eindimensionale Untermannigfaltigkeiten darstellen. Physikalisch ist die Sachlage allerdings alles andere als trivial. Die soeben herausgearbeitete Formulierung der Lex prima bezieht sich nämlich auf physikalisch reale Systeme, und wir müssen dies präzisieren um die Tragweite der Postulate genauer zu verstehen:

Zunächst folgt aus den obigen Annahmen über die Struktur des Raumes, daß jeder in ihm liegende Punkt zum Bezugspunkt O_r gemacht werden kann, und es existiert eine Orthonormalbasis \vec{e}_i des euklidischen Raumes, bzgl. dessen die kräftefreie Bewegung gemäß (1.1.5) beschrieben wird. Um dies für reale Massepunkte realisieren zu können, bedeutet das jedoch, daß wir die Grundkonstruktionen, wie sie in der elementaren Geometrie schon von Euklid an die Spitze gestellt werden, mit realen Körpern durchführen können müssen. Das bedeutet nicht weniger als daß wir exakt **starre Körper** besitzen

³Hierbei steht das hochgestellte t für „transponiert“, d.h. statt eines „Zeilenvektors“ ist ein Spaltenvektor zu lesen.

1.1. Die Newtonschen Grundgesetze

müssen, die als Lineal und Zirkel dienen können. Im folgenden nehmen wir einfach an, daß dies der Fall ist, wobei allerdings im Auge behalten werden sollte, daß die moderne Physik uns lehrt, daß es solche starren Körper nicht gibt, ja daß aufgrund der Quantentheorie schon die exakte Festlegung eines Einheitsmaßstabes mit realen Körpern in Strenge nicht realisierbar ist. Wir werden auf die Gültigkeitsgrenzen der Newtonschen Mechanik allerdings erst später eingehen können.

Wir können nunmehr die Messung im Raum als durch Einheitsmaßstäbe realisiert voraussetzen. Weiter ist aber auch klar, daß damit vermöge der *Lex prima* auch die Zeitmessung festgelegt ist, denn wie wir anhand der Formulierung (1.1.6) gesehen haben, ist die Zeitmessung sofort mit Hilfe eines kräftefreien Körpers auf die Messung von zurückgelegten Wegstrecken zurückgeführt. Physikalisch konkret bedeutet dies jedoch, daß wir diese Wegstrecken instantan messen können müssen, d.h. wir müssen etwa mittels einer starren Stange die Lage des Massepunktes zu einem bestimmten Zeitpunkt exakt festlegen und so mit Hilfe der euklidischen Längenmessung mit dem Einheitsmaßstab vergleichen können. Wir setzen auch dies im folgenden voraus, nicht ohne die Warnung ausgesprochen zu haben, daß dies nicht mit den Erkenntnissen der Relativitätstheorie und unserem modernen Verständnis vom Aufbau der Materie vereinbar ist. Auch hier müssen wir den Leser auf später vertrösten, bis wir in der Lage sind, die Gültigkeitsgrenzen der Newtonschen Mechanik anhand moderner physikalischer Erkenntnisse zu klären.

Kommen wir nun zur *Lex secunda*. Wir können die *Lex prima* dahingehend zusammenfassen, daß eine Änderung des Bewegungszustandes eines Massepunktes die Abweichung von der geradlinig gleichförmigen Bewegung darstellt. Die geradlinig gleichförmige Bewegung wird nach Einführung eines Galileischen Bezugssystems durch (1.1.6) beschrieben, wobei allerdings keineswegs die konkreten Bahnparameter festgelegt sind. Das ist auch konsistent mit der Forderung, daß die Beschreibung der Bewegung unabhängig vom gewählten Bezugssystem ist, denn die konkrete Wahl der t_0 , x_0 und u sowie der Maße für t und x ist durch die Wahl der Bezugspunkte von Raum und Zeit sowie deren Basisvektoren frei bestimmbar. Eine von diesen willkürlichen Parametern unabhängige Beschreibung ist durch die Bewegungsgleichung $d_t^2 x(t) = 0$ gegeben, wobei d_t die Ableitung der Bahnkurve $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ und d_t^2 entsprechend ihre zweite Ableitung nach der Zeit t bezeichnet. Klar ist, daß für eine beliebige Bahnkurve $u = d_t x$ die **momentane Geschwindigkeit** und $a = d_t u = d_t^2 x$ die **momentane Beschleunigung** des Massepunktes sind.

Die *Lex secunda* definiert nun die Kraft als Ursache der Bewegungsänderung als proportional zur Beschleunigung des Massepunktes

$$F = m d_t^2 x. \quad (1.1.7)$$

Dabei ist m eine den Massepunkt näher charakterisierende Konstante, die als **träge Masse** oder kurz als Masse bezeichnet wird. Die Festlegung der Masseneinheit geschieht (übrigens sogar tatsächlich bis dato im gesetzlichen Einheitensystem) durch Bereitstellung eines Probekörpers von eben der zu definierenden Masseneinheit. Mit der Masseneinheit ist dann aber auch die Krafteinheit eindeutig aus der Beschleunigung bestimmt.

Die *Lex tertia* schließlich besagt, daß bei Wechselwirkung zwischen zwei Massepunkten mit beliebigen Massen m_1 und m_2 folgendes gilt. Bezeichnen wir die von der Masse m_1 auf die Masse m_2 bewirkte Kraft mit F_{12} , so wirkt zwingend auf m_1 von m_2 die Kraft $F_{21} = -F_{12}$.

Damit sind die grundlegenden Gesetze der Newtonschen Mechanik ausformuliert. Es fällt allerdings auf, daß wir praktisch noch keine Bewegungsgleichung besitzen, denn es ist kein Kraftgesetz vorhanden, d.h. wir besitzen noch keine Gleichungen, die die Abhängigkeit der Kraft \vec{F} von den Raum- und Zeitkoordinaten des Massepunktes ausdrückt. Es ist noch nicht einmal unbedingt notwendig, daß sich dieses Kraftgesetz überhaupt als lokales Gesetz beschreiben läßt. Es könnte sehr wohl sein, daß die Kraftwirkung zum Zeitpunkt t von der Bewegung des Körpers zu allen davorliegenden Zeiten $t' < t$

abhängt, kurz gesagt also von der Vorgeschichte des Körpers. Daß wir Wirkungen aus der Zukunft ausschließen, also daß auch die Geschichte des Körpers zu zukünftigen Zeiten $t' > t$ die Kraftwirkungen in der Gegenwart bestimmt, ist ebenfalls ein zusätzliches Postulat, das in keiner Weise aus den eben formulierten drei Newtonschen Grundgesetzen zu folgt. Dieses **schwache Kausalitätspostulat** liegt im übrigen der gesamten Physik zugrunde.

Die fundamentalen Wechselwirkungen, auf die die Newtonsche Mechanik praktisch anwendbar ist, sind die Gravitationskraft und die elektromagnetischen Kräfte auf geladene Körper. Die quantitative Beschreibung dieser Wechselwirkungen ist im Rahmen der Newtonschen Mechanik rein empirisch festzulegen. Dies gilt auch für unsere moderne Auffassung von der Beschreibung dieser Kräfte, nämlich die relativistische Quantenfeldtheorie, die uns allerdings hier nicht zur Verfügung steht. Wir werden gleichwohl zu gegebenem Zeitpunkt eine Begründung für die Kraftgesetze angeben, die ganz im Geiste moderner Symmetrieüberlegungen steht.

1.2 Der ungedämpfte harmonische Oszillator

Bei vielen typischen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik tritt der Fall auf, daß ein Massepunkt sich in einem **Kräftepotential** bewegt. Wir betrachten eindimensionale Bewegungen entlang der x -Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Dann ist in diesem Fall die Kraft durch die Ableitung des Potentials gegeben:

$$F(x) = -V'(x). \quad (1.2.1)$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für solch einen Massenpunkt lautet demnach

$$m\ddot{x} = -V'(x). \quad (1.2.2)$$

Um die Bahn der Bewegung als Funktion der Zeit zu erhalten, müssen wir also eine **Differentialgleichung** zweiter Ordnung lösen, d.h. wir suchen die Ortskoordinate x als Funktion von t . Dabei ergibt sich eine ganze Schar von Lösungen. Um die Bewegung des Massenpunktes eindeutig festzulegen, müssen wir noch **Anfangsbedingungen** fordern, d.h. wir müssen zu einem vorgegebenen Zeitpunkt, den wir bequemlichkeitshalber bei $t = 0$ wählen, **Ort und Geschwindigkeit** des Massenpunktes vorgeben. Wir verlangen also von der Lösung der Bewegungsgleichung (1.2.2), daß die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (1.2.3)$$

erfüllt sind. Wir wissen bereits, daß für die Bewegungsgleichung (1.2.2) der **Satz von der Energieerhaltung** gilt, denn multiplizieren wir (1.2.2) mit \dot{x} und bringen alle Ausdrücke auf die linke Seite der Gleichung, erhalten wir

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}V'(x) = 0. \quad (1.2.4)$$

Es ist aber leicht zu sehen, daß dies eine totale Zeitableitung ist, denn es gilt

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = 2\dot{x}\ddot{x}, \quad \frac{d}{dt}V(x) = \dot{x}V'(x). \quad (1.2.5)$$

Wir können also (1.2.4) in der Form

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right] = 0 \quad (1.2.6)$$

1.2. Der ungedämpfte harmonische Oszillator

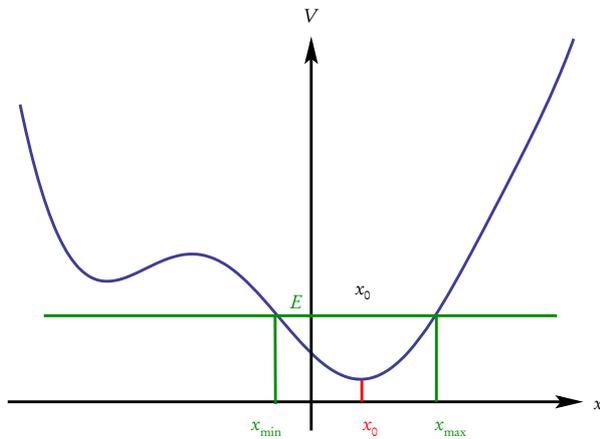
schreiben. Das bedeutet aber, daß der Ausdruck in den eckigen Klammern, die **Gesamtenergie** des Massenpunktes, für alle Lösungen der Bewegungsgleichung (1.2.2) zeitlich konstant ist:

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = \frac{m}{2} v_0^2 + V(x_0) = \text{const.} \quad (1.2.7)$$

Dabei haben wir die Anfangsbedingung (1.2.4) eingesetzt, um den Wert der Gesamtenergie zu bestimmen.

Nun ist die **kinetische Energie**

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \geq 0. \quad (1.2.8)$$



In Abb. 1.1 haben wir ein beliebiges Potential als Funktion der Ortskoordinate aufgezeichnet und den konstanten Wert der Gesamtenergie als horizontale Linie eingetragen. Da $E_{\text{kin}} \geq 0$ muß für alle Zeiten

$$E \geq V(x) \quad (1.2.9)$$

gelten. D.h. für eine durch die Anfangsbedingungen gegebene Gesamtenergie E kann sich das Teilchen nur dort aufhalten, wo das Potential unterhalb der Linie für die Gesamtenergie verläuft.

Nun kommt es oft vor, daß das Potential bei einer Stelle x_0 ein **lokales Minimum** aufweist. In diesem Minimum ist $V'(x_0) = 0$. Ist dann die Energie E so gewählt, daß die Linie $E = \text{const}$ das Potential an zwei Stellen x_{min} und x_{max} schneidet,

Abbildung 1.1: *Bewegung in einer Potentialmulde.*

muß das Teilchen in dem Bereich $[x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]$ bleiben, denn aufgrund der Differentialgleichung muß die Ortskoordinate als Funktion der Zeit mindestens zweimal differenzierbar sein und ist daher stetig. Der Massenpunkt kann also nicht über eine Potentialbarriere einfach in einen anderen Bereich springen, wo wieder $E > V(x)$ gilt. Das Teilchen ist also in dem besagten Intervall gefangen. Ist dieser Bereich nicht zu groß, reicht es weiter aus, das Potential um x_0 in eine **Potenzreihe** zu entwickeln und nur die Terme bis zur zweiten Ordnung mitzunehmen. Angenommen, das Potential ist mindestens dreimal stetig differenzierbar, können wir schreiben (**Taylor-Entwicklung**)

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}[(x - x_0)^3]. \quad (1.2.10)$$

Dabei bedeutet das **Landau-Symbol** $\mathcal{O}[(x - x_0)^3]$, daß der nächste Term in der Potenzreihenentwicklung von der Größenordnung $(x - x_0)^3$ ist. Es ist klar, daß der Term linear zu $(x - x_0)$ verschwindet, weil voraussetzungsgemäß V an der Stelle x_0 ein Minimum besitzt. Außerdem nehmen wir an, daß $V''(x_0) > 0$ ist.

Für die Kraft folgt dann

$$F(x) = -V'(x) = -V''(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}[(x - x_0)^2]. \quad (1.2.11)$$

Für nicht zu große Abweichungen der Lage des Massenpunktes von x_0 können wir also näherungsweise die vereinfachte Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -D(x - x_0) \quad \text{mit} \quad D = V''(x_0) > 0. \quad (1.2.12)$$

betrachten.

Wählen wir das Koordinatensystem noch so, daß $x_0 = 0$ ist, erhalten wir die relativ einfache Bewegungsgleichung eines **harmonischen Oszillators**:

$$m\ddot{x} = -Dx. \quad (1.2.13)$$

Wir können diese Situation durch ein reales System in sehr guter Näherung realisieren, indem wir einen Massenpunkt an eine Feder hängen. Für nicht zu große Auslenkungen der Feder aus ihrer Gleichgewichtslage ist die von der Feder ausgeübte Kraft proportional zur Auslenkung ($|F_{\text{Feder}}| = D\Delta x$, wo Δx die Dehnung der Feder aus ihrer Ruhelage ist). Der Gleichgewichtspunkt $x_0 = 0$ ist dann dadurch gegeben, daß dort die Federkraft die Schwerkraft mg gerade kompensiert. Die Feder wirkt immer der Auslenkung entgegen, und die gesamte Kraft auf den Massenpunkt ist dann durch $F_x = -Dx$ gegeben. Dabei rührt das Vorzeichen in dieser Gleichung daher, daß die Feder immer der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage entgegenwirkt.

Zur Lösung dieser Gleichung beachten wir, daß es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung handelt. Wir besprechen das Lösungsverhalten solcher Differentialgleichungen im Anhang A.1 so weit wir dies für diese Vorlesung benötigen.

Aus den dortigen Überlegungen folgt, daß die allgemeine Lösung von der Form

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \quad (1.2.14)$$

ist, wobei x_1 und x_2 irgendwelche zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung sind, d.h. es muß $x_1/x_2 \neq \text{const}$ sein, und beide Funktionen müssen die DGL lösen. Ein Blick auf (1.2.13) zeigt, daß ein Ansatz mit trigonometrischen Funktionen

$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_0 t), \quad x_2(t) = C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (1.2.15)$$

erfolgsversprechend ist, denn es gilt

$$\dot{x}_1 = -C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t), \quad \ddot{x}_1 = -C_1 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \quad (1.2.16)$$

und

$$\dot{x}_2 = C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t), \quad \ddot{x}_2 = -C_2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t). \quad (1.2.17)$$

Setzt man diese Ansätze in (1.2.13) ein, erkennt man sofort, daß beides Lösungen der Differentialgleichung sind, und zwar für

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (1.2.18)$$

Die allgemeine Lösung der DGL (1.2.13) lautet also

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t). \quad (1.2.19)$$

Um diese Lösung etwas einfacher analysieren zu können, bringen wir sie noch in eine etwas einfachere Form, und zwar versuchen wir Konstanten $\hat{x} \geq 0$ und φ_0 so zu bestimmen, daß

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (1.2.20)$$

gilt. Ausnutzen des Additionstheorems für den Cosinus liefert

$$x(t) = \hat{x} [\cos \varphi_0 \cos(\omega_0 t) + \sin \varphi_0 \sin(\omega_0 t)]. \quad (1.2.21)$$

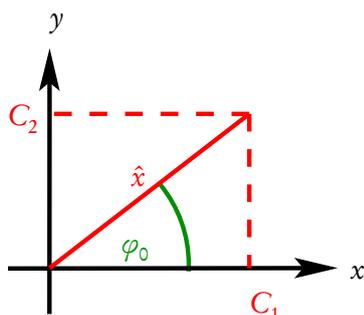


Abbildung 1.2: Zur Umrechnung von kartesischen in Polarkoordinaten

1.2. Der ungedämpfte harmonische Oszillator

Vergleicht man dies mit (1.2.19) folgt, daß dann

$$C_1 = \hat{x} \cos \varphi_0, \quad C_2 = \hat{x} \sin \varphi_0 \quad (1.2.22)$$

gelten muß. Es ist klar, daß man dies als Gleichung für die Komponenten eines Vektors (C_1, C_2) in der Ebene, ausgedrückt durch seine Polarkoordinaten (\hat{x}, φ_0) ansehen kann (s. Abb. 1.2). Quadriert man jedenfalls diese beiden Gleichungen, erhält man

$$\hat{x}^2(\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) = \hat{x}^2 = C_1^2 + C_2^2 \Rightarrow \hat{x} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \quad (1.2.23)$$

Aus dem Bild liest man weiter ab, daß

$$\varphi_0 = \text{sign } C_2 \arccos\left(\frac{C_1}{\hat{x}}\right) \in (-\pi, \pi) \quad (1.2.24)$$

gegeben ist. Das einzige Problem mit dieser Formel ist, daß für $C_2 = 0$ und $C_1 \neq 0$ ein unbestimmtes Ergebnis herauskommt. Man hat dann aber $\cos \varphi_0 = C_1/|C_1| = \pm 1$. Für $C_1 > 0$ erhält man dann immer noch eindeutig $\varphi_0 = 0$. Für $C_1 < 0$ wären aber zwei Lösungen $\varphi_0 = \pm\pi$ korrekt. Man kann in diesem Fall einfach eine von beiden Möglichkeiten wählen, z.B. $\varphi_0 = +\pi$. Diese Gleichung zur Berechnung des Polarwinkels liefert im Gegensatz zu der in der Literatur oft zu findenden Formel „ $\varphi_0 = \arctan(C_2/C_1)$ “ stets den korrekten Winkel, ohne daß man sich genauere Gedanken machen muß, in welchem Quadranten der gerade betrachtete Punkt liegt.

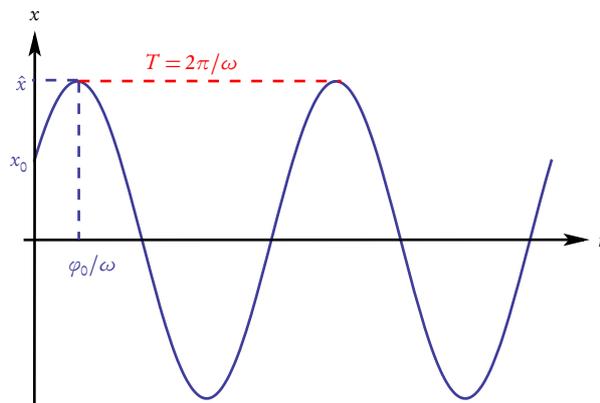


Abbildung 1.3: Lösung zum harmonischen Oszillator mit den Kenngrößen \hat{x} (Amplitude), φ_0 (Anfangsphase) und T (Periodendauer).

Die Konstanten C_1 und C_2 in (1.2.19) lassen sich aus den Anfangsbedingungen (1.2.3) bestimmen. Wir verlangen also

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= C_2 \omega_0 = v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Die Lösung für das Anfangswertproblem lautet also

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (1.2.26)$$

Für die Lösungsform (1.2.20) ergibt sich aus (1.2.23) und (1.2.24)

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \\ \varphi_0 &= \text{sign } v_0 \arccos\left(\frac{x_0}{\hat{x}}\right). \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Es ergibt sich also insgesamt eine um $\Delta t = \varphi_0/\omega_0$ entlang der t -Achse verschobene \cos -Funktion mit der **Periodendauer** T , wobei

$$\omega_0 T = 2\pi \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (1.2.28)$$

Die **Frequenz**, also die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit ist durch

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (1.2.29)$$

gegeben. Der Massepunkt schwingt zwischen den Werten $\pm \hat{x}$ hin und her. Diese Maximalabweichung von der Ruhelage \hat{x} heißt **Amplitude** der Schwingung (vgl. Abb. 1.3). Wir bemerken, daß die Periodendauer der Schwingung unabhängig von der Amplitude ist. Man bezeichnet solche Schwingungen als **harmonische Schwingungen**. Schwingungen sind nur dann strikt harmonisch, wenn die Kraft exakt proportional zur Auslenkung von der Ruhelage ist. Für allgemeineren Kraftgesetze liegt dieser Fall nur näherungsweise für **kleine Amplituden** vor.

1.3 Der gedämpfte harmonische Oszillator

Im allgemeinen wird die Bewegung eines Massepunktes auch irgendwelchen Reibungsprozessen unterliegen. Um zu sehen, welche Auswirkungen die Reibung besitzt, untersuchen wir den besonders einfachen Fall der **Stokesschen Reibung**, wo die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ ist. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x} = -Dx - \beta\dot{x}. \quad (1.3.1)$$

In die Normalform gebracht ergibt sich wieder eine lineare homogene Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{\beta}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m}. \quad (1.3.2)$$

Wir werden gleich sehen, daß die willkürlich erscheinende Einführung des Faktors 2 im Reibungsterm einige Formeln ein wenig übersichtlicher macht.

Um diese Gleichung zu lösen, bemerken wir, daß sich die Exponentialfunktion beim Differenzieren „reproduziert“. Daher erscheint der Ansatz für die Lösung der Gleichung (1.3.2)

$$x(t) = A \exp(\lambda t), \quad \lambda = \text{const} \quad (1.3.3)$$

erfolgsversprechend. In der Tat ist

$$\dot{x}(t) = A\lambda \exp(\lambda t), \quad \ddot{x}(t) = A\lambda^2 \exp(\lambda t). \quad (1.3.4)$$

Setzt man also den Ansatz (1.3.3) in (1.3.2) ein, ergibt sich

$$A \exp(\lambda t)(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) = 0. \quad (1.3.5)$$

Demnach erhalten wir also (nichttriviale) Lösungen, d.h. für $A \neq 0$, für die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow (\lambda + \gamma)^2 + \omega_0^2 - \gamma^2 = 0. \quad (1.3.6)$$

Wir müssen nun mehrere Fälle unterscheiden, je nachdem, ob die Lösungen reell oder komplex sind und ob das quadratische Polynom zwei einfache oder eine doppelte Nullstelle besitzt:

1. $\omega_0 > \gamma$: Zwei zueinander konjugiert komplexe Nullstellen,
2. $\omega_0 < \gamma$: Zwei einfache reelle Nullstellen,
3. $\omega_0 = \gamma$: Eine doppelte Nullstelle.

1.3.1 Schwingfall ($\omega_0 > \gamma$)

In diesem Fall besitzt die Gleichung (1.3.6) die beiden zueinander konjugiert komplexen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} > 0. \quad (1.3.7)$$

1.3. Der gedämpfte harmonische Oszillator

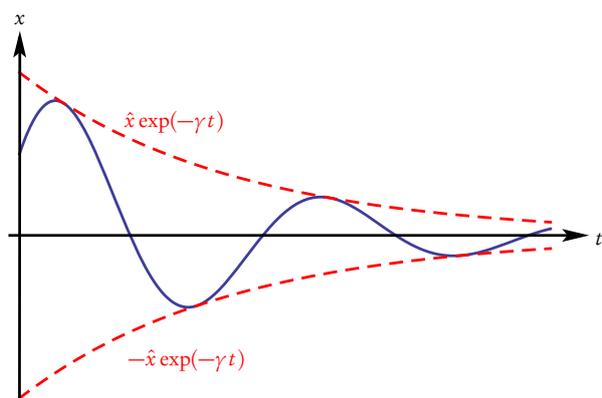


Abbildung 1.4: Lösung zum gedämpften harmonischen Oszillator. Für $\omega_0 > \gamma$ schwingt der Massenpunkt wieder sinusförmig auf und ab, aber die Amplitude ist exponentiell gedämpft. Die Dämpfungsrate ist γ .
schreiben.

Mit der Eulerschen Formel folgt

$$\operatorname{Re}[C_1 \exp(i\omega t)] = \operatorname{Re}[(C_{1,R} + iC_{1,I})(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))] = C_{1,R} \cos(\omega t) - C_{1,I} \sin(\omega t). \quad (1.3.11)$$

Benennen wir die *reellen* Konstanten zu

$$\tilde{C}_1 = 2C_{1,R}, \quad \tilde{C}_2 = -2C_{1,I} \quad (1.3.12)$$

um, erhalten wir als allgemeine *reelle* Lösung

$$x(t) = \exp(-\gamma t) [\tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t)]. \quad (1.3.13)$$

Die Anfangsbedingungen (1.2.3) gestatten wieder die eindeutige Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$x(0) = \tilde{C}_1 \stackrel{!}{=} x_0, \quad \dot{x}(0) = -\gamma \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \omega \stackrel{!}{=} v_0. \quad (1.3.14)$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist offenbar

$$\tilde{C}_1 = x_0, \quad \tilde{C}_2 = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega}, \quad (1.3.15)$$

und die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$x(t) = \exp(-\gamma t) \left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right]. \quad (1.3.16)$$

Analog zu unserem Vorgehen oben können wir die eckige Klammer auch in Form einer einzelnen Cosinus-Funktion gemäß

$$x(t) = \exp(-\gamma t) \hat{x} \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (1.3.17)$$

schreiben, wobei

$$\hat{x} = \frac{\sqrt{x_0^2 \omega^2 + (v_0 + \gamma x_0)^2}}{\omega}, \quad \varphi_0 = \operatorname{sign}(v_0 + \gamma x_0) \arccos\left(\frac{x_0}{\hat{x}}\right) \quad (1.3.18)$$

ist. Wir haben also insgesamt eine periodische Schwingung mit der durch die Dämpfung verringerten Kreisfrequenz ω , deren Amplitude exponentiell abfällt. In der **Dämpfungszeit** $t_d = 1/\gamma$ verringert sich die Amplitude um einen Faktor $1/e = \exp(-1) \approx 1/2.718$. Der Massepunkt bewegt sich stets innerhalb der Einhüllenden $\pm \hat{x} \exp(-\gamma t)$ (vgl. Abb 1.4).

Wir haben damit offenbar zwei linear unabhängige Lösungen über unseren Ansatz (1.3.3) gefunden, und die allgemeine Lösung ergibt sich als deren Linearkombination

$$x(t) = \exp(-\gamma t) [C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t)]. \quad (1.3.8)$$

Da selbstverständlich nur reelle Lösungen physikalisch sinnvoll sind, muß offenbar

$$C_1 = C_{1,R} + iC_{1,I}, \quad C_2 = C_1^* = C_{1,R} - iC_{1,I} \quad (1.3.9)$$

mit $C_{1,R}, C_{1,I} \in \mathbb{R}$ gelten. Wir können also (1.3.8) in der Form

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-\gamma t) \\ &\times \{C_1 \exp(i\omega t) + [C_1 \exp(i\omega t)]^*\} \quad (1.3.10) \\ &= \exp(-\gamma t) 2 \operatorname{Re}[C_1 \exp(i\omega t)] \end{aligned}$$

1.3.2 Kriechfall ($\omega_0 < \gamma$)

In diesem Fall besitzt die quadratische Gleichung (1.3.6) zwei *verschiedene* reelle Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (1.3.19)$$

und wir haben direkt die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung in der reellen Form

$$x(t) = C_1 \exp(-\gamma_1 t) + C_2 \exp(-\gamma_2 t). \quad (1.3.20)$$

Da offenbar $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ ist, ist $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Die Dämpfung ist hierbei so stark, daß es zu keinerlei Schwingungen kommt. Der Massepunkt läuft gegen den Gleichgewichtspunkt bei $x = 0$. Für große t dominiert der Term mit der kleineren Dämpfungskonstante γ_1 .

Die Anfangsbedingungen (1.2.3) liefern für die Integrationskonstanten C_1 und C_2 die Gleichungen

$$x(0) = C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} x_0, \quad \dot{x}(0) = -C_1 \gamma_1 - C_2 \gamma_2 \stackrel{!}{=} v_0. \quad (1.3.21)$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt

$$C_1 = -\frac{v_0 + \gamma_2 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2} = +\frac{v_0 + \gamma_2 x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, \quad C_2 = \frac{v_0 + \gamma_1 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2} = -\frac{v_0 + \gamma_1 x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}. \quad (1.3.22)$$

Die Lösung für das Anfangsproblem lautet also

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} [(v_0 + \gamma_2) \exp(-\gamma_1 t) - (v_0 + \gamma_1 x_0) \exp(-\gamma_2 t)]. \quad (1.3.23)$$

Setzt man hierin für γ_1 und γ_2 (1.3.19) ein, erhält man das Resultat in der Form

$$x(t) = \exp(-\gamma t) \left[x_0 \cosh(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \sinh(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t) \right]. \quad (1.3.24)$$

Dabei haben wir die Definition der Hyperbelfunktionen

$$\cosh z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}, \quad \sinh z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2} \quad (1.3.25)$$

benutzt, die übrigens nicht nur im Reellen sondern auch für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Daraus folgt (wieder für $z \in \mathbb{C}$)

$$\cosh(iz) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \cos z, \quad \sinh(iz) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} = i \sin z. \quad (1.3.26)$$

Wir können also die Lösung für den Schwingfall (1.3.8) gewinnen, indem wir einfach in (1.3.24) überall

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\omega \quad (1.3.27)$$

setzen. Denn dann liefert die Anwendung der Formeln (1.3.26) in (1.3.24) in der Tat sofort (1.3.8).

1.3.3 Aperiodischer Grenzfall ($\omega_0 = \gamma$)

Hier hat die quadratische Gleichung (1.3.6) nur die eine (reelle) Lösung

$$\lambda = -\gamma = -\omega_0. \quad (1.3.28)$$

Wir erhalten also auch mit dem Exponentialansatz (1.3.3) nur eine Lösung. Um die vollständige Lösung der Bewegungsgleichung zu finden, benötigen wir allerdings noch eine zweite linear unabhängige Lösung. Statt direkt eine solche Lösung zu konstruieren, ist es einfacher, für festgehaltene Anfangsbedingungen den Limes $\omega_0 \rightarrow \gamma$ von (1.3.24) zu berechnen. Dabei macht nur der zweite Term in der eckigen Klammer Probleme, weil dessen Nenner dort verschwindet. Hier führt die Potenzreihenentwicklung der sinh-Funktion zum Ziel. Es gilt

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}. \quad (1.3.29)$$

Auf den fraglichen Term in (1.3.24) angewandt, ergibt diese Reihenentwicklung

$$\frac{\sinh(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t)}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t + \mathcal{O}(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}^3)}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} = t + \mathcal{O}\left[\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)^2\right]. \quad (1.3.30)$$

Die übrigen Terme in (1.3.24) sind unproblematisch, und wir können für diese einfach $\omega_0 = \gamma$ setzen, weil alle vorkommenden Funktionen stetig sind. Wenden wir also (1.3.30) in (1.3.24) an und führen den Grenzwert $\omega_0 \rightarrow \gamma$ aus, erhalten wir schließlich

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t] \exp(-\gamma t). \quad (1.3.31)$$

Man prüft leicht nach, daß diese Funktion tatsächlich die Bewegungsgleichung (1.3.2) für $\omega_0 = \gamma$ löst und die Anfangsbedingungen (1.2.3) erfüllt.

Auch hier fällt die Auslenkung des Massenpunktes unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit stets zum Gleichgewichtspunkt $x = 0$ ab, denn sowohl die Funktion $\exp(-\gamma t)$ als auch $t \exp(-\gamma t)$ streben gegen 0 für $t \rightarrow \infty$. Es zeigt sich, daß insgesamt das Abklingen der Anfangsauslenkung und -geschwindigkeit im aperiodischen Grenzfall am schnellsten vonstatten geht. Dies hat praktische Bedeutung für die Konstruktion von Meßinstrumenten wie (analogen) Galvanometern zur Spannungs- und Strommessungen in der Elektrotechnik.

1.3.4 Direkte Lösung im aperiodischen Grenzfall

Alternativ zu der im vorigen Abschnitt vorgestellten Methode, den aperiodischen Grenzfall des gedämpften Oszillators als Grenzwert für den überdämpften Fall zu behandeln, können wir auch die Differentialgleichung direkt lösen. Setzen wir also in (1.3.2) $\omega_0 = \gamma$, erhalten wir

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0. \quad (1.3.32)$$

Der Exponentialansatz (1.3.3) liefert nur die eine Lösung für $\lambda = -\gamma$. Um die vollständige Lösung, also eine zweite linear unabhängige Lösung zu finden, machen wir stattdessen den Ansatz („**Variation der Konstanten**“)

$$x(t) = f(t) \exp(-\gamma t). \quad (1.3.33)$$

Die Ableitungen sind wegen der Produktregel

$$\dot{x} = (\dot{f} - \gamma f) \exp(-\gamma t), \quad \ddot{x} = (\ddot{f} - 2\gamma \dot{f} + \gamma^2 f) \exp(-\gamma t). \quad (1.3.34)$$

Setzen wir also unseren Ansatz in (1.3.32) ein, erhalten wir

$$\exp(-\gamma t)[\ddot{f} - 2\gamma \dot{f} + \gamma^2 f + 2\gamma(\dot{f} - \gamma f) + \gamma^2 f] = \exp(-\gamma t)\ddot{f} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.3.35)$$

Das bedeutet, daß f die Differentialgleichung

$$\ddot{f} = 0 \quad (1.3.36)$$

erfüllen muß. Ihre allgemeine Lösung finden wir durch zweimaliges Integrieren nach der Zeit. Es ergibt sich

$$f(t) = C_1 + C_2 t, \quad (1.3.37)$$

und demnach lautet die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung (1.3.32)

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) \exp(-\gamma t). \quad (1.3.38)$$

Anpassung der Integrationskonstanten C_1 und C_2 an die Anfangsbedingungen (1.2.3) liefert wieder die bereits oben gefundene Lösung (1.3.31).

1.4 Der harmonisch getriebene gedämpfte Oszillator

Wir schließen unsere Betrachtung der harmonischen Oszillatoren mit der Behandlung der Bewegungsgleichung für den Fall, daß zusätzlich zur Reibungs- und harmonischen Kraft noch eine zeitabhängige äußere **treibende Kraft** an dem Massenpunkt angreift. Dabei beschränken wir uns auf den Fall einer **harmonischen Zeitabhängigkeit der äußeren Kraft**. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - 2m\gamma\dot{x} + mA \cos(\Omega t). \quad (1.4.1)$$

Dies in die Normalform für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung gebracht liefert die **inhomogene Gleichung**

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\Omega t). \quad (1.4.2)$$

Wir bemerken als erstes, daß wegen der Linearität des Differentialoperators auf der linken Seite die Differenz zweier Lösungen dieser inhomogenen Gleichung wieder die homogene Gleichung löst. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also durch die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer beliebigen speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben:

$$x(t) = C_1 x_1^{(\text{hom})}(t) + C_2 x_2^{(\text{hom})}(t) + x^{(\text{inh})}(t). \quad (1.4.3)$$

Dabei sind x_1 und x_2 beliebige zueinander linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung, die wir im vorigen Abschnitt für die drei Fälle (Schwingfall, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall) gefunden haben:

$$\begin{cases} x_1(t) = \exp(-\gamma t) \cos(\omega t), & x_2(t) = \exp(-\gamma t) \sin(\omega t) & \text{für } \omega_0 > \gamma, \\ x_1(t) = \exp(-\gamma_1 t), & x_2(t) = \exp(-\gamma_2 t) & \text{für } \omega_0 < \gamma, \\ x_1(t) = \exp(-\gamma t), & x_2(t) = t \exp(-\gamma t) & \text{für } \omega_0 = \gamma. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

1.4. Der harmonisch getriebene gedämpfte Oszillator

Dabei ist im Schwingfall $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ und im Kriechfall $\gamma_{12} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

Diese Lösungen werden allesamt für $t \gg 1/\gamma$ (bzw. im Kriechfall für $t \gg 1/\gamma_2$) exponentiell weggedämpft werden. Für große Zeiten wird die Lösung also durch die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung dominiert. Man spricht vom **eingeschwungenen Zustand**, und wir interessieren uns im folgenden für diesen Zustand.

1.4.1 Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Das Auffinden einer speziellen Lösung für die inhomogene Gleichung wird nun dadurch wesentlich erleichtert, daß sowohl die unabhängige Variable, die Zeit t , als auch die Koeffizienten auf der linken Seite in (1.4.2) reelle Zahlen sind. Wir können also die linke Seite der Gleichung (1.4.2) als Realteil derselben Gleichung einer komplexen Funktion $z(t) = x(t) + iy(t)$ ansehen:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \text{Re}(\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z). \quad (1.4.5)$$

Die rechte Seite der Gleichung können wir aber auch als Realteil ausdrücken, denn wegen der Eulerschen Formel gilt

$$A \cos(\Omega t) = \text{Im}[A \exp(-i\Omega t)]. \quad (1.4.6)$$

Wir können also die etwas einfacher zu lösende komplexe Gleichung

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = A \exp(-i\Omega t) \quad (1.4.7)$$

betrachten. Die Wahl des negativen Vorzeichens im Exponenten auf der rechten Seite ist dabei willkürlich und entspricht der in den meisten Lehrbüchern verwendeten Konvention in der theoretischen Physik.

Jedenfalls legt die Form der Gleichung (1.4.7) den Ansatz

$$z(t) = AB \exp(-i\Omega t) \quad (1.4.8)$$

nahe. Dabei ist B eine zu bestimmende komplexwertige Konstante. Setzen wir also (1.4.8) in (1.4.7) ein, finden wir

$$AB \exp(-i\Omega t)(-\Omega^2 - 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) = A \exp(-i\Omega t). \quad (1.4.9)$$

Auflösen nach B liefert

$$B = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega}. \quad (1.4.10)$$

Um nun einfacher $x(t) = \text{Re } z(t)$ bestimmen zu können, machen wir noch den Zähler reell, indem wir den Bruch mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitern:

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}. \quad (1.4.11)$$

Wir können nun B in die Polardarstellung bringen:

$$B = |B| \exp(i\varphi_0), \quad |B| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \quad \varphi_0 = + \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{|B|}\right). \quad (1.4.12)$$

Setzen wir dies in unseren Ansatz ein, ergibt sich für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung schließlich

$$x^{(\text{inh})}(t) = \text{Re } z(t) = A|B| \text{Re} \{ \exp[-i(\Omega t - \varphi_0)] \} = A|B| \cos(\Omega t - \varphi_0). \quad (1.4.13)$$

1. Die Raum-Zeitstruktur der Newtonschen Mechanik

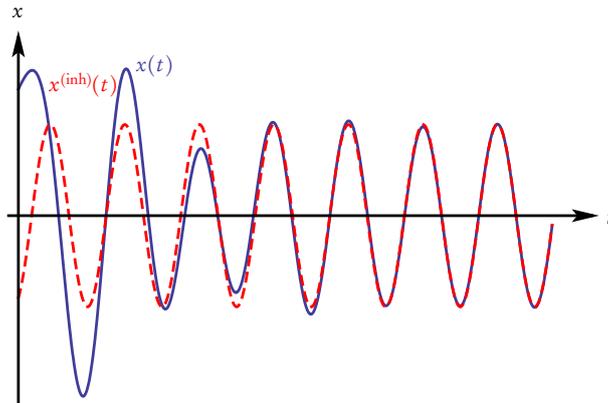


Abbildung 1.5: Lösung zum getriebenen gedämpften harmonischen Oszillator im Schwingfall $\omega_0 > \gamma$. Für $t \gg 1/\gamma$ werden die Eigenschwingungen, also der Anteil der Lösung der homogenen Gleichung in (1.4.3) merklich gedämpft, und die Bewegung geht in den durch die spezielle Lösung der inhomogenen Schwingung eingeschwungenen Zustand über.

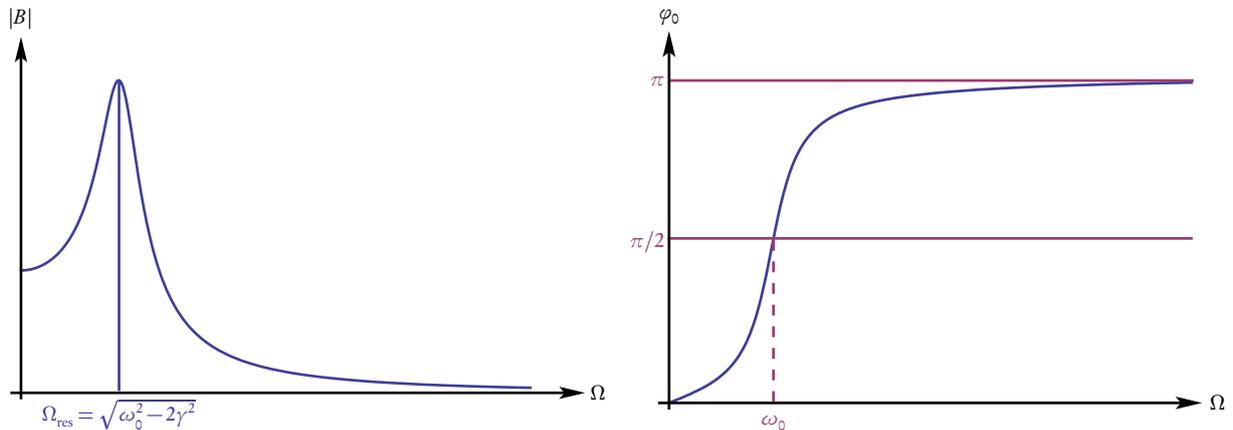


Abbildung 1.6: Amplitudenfaktor (links) $|B|$ und Phasenverschiebung φ_0 für den eingeschwungenen Zustand (1.4.13).

Im eingeschwungenen Zustand schwingt also der Massenpunkt mit derselben Frequenz wie die äußere harmonische Kraft, und zwischen der Kraft und der Schwingung des Massenpunktes besteht eine *stets positive* Phasenverschiebung φ_0 (vgl. Abb 1.6, rechts). Als Funktion von Ω ist φ_0 monoton wachsend. Für $\Omega = \omega_0$ wird $\varphi_0 = \pi/2$, und für $\Omega \rightarrow \infty$ strebt $\varphi_0 \rightarrow \pi$.

Bei vorgegebener Amplitude der äußeren Kraft mA ist die Amplitude des eingeschwungenen Zustands durch $|B|$ gemäß (1.4.12) gegeben. In Abb. 1.6 (links) haben wir diesen Proportionalitätsfaktor als Funktion der Kreisfrequenz der antreibenden Kraft Ω geplottet. Er weist in dem gewählten Fall ein ausgeprägtes Maximum bei einer **Resonanzfrequenz** Ω_{res} auf, die wir im nächsten Abschnitt ausrechnen werden.

1.4.2 Amplitudenresonanzfrequenz

Die Lösung (1.4.13) zeigt, daß die Amplitude der Schwingung im eingeschwungenen Zustand zur Amplitude der äußeren Kraft proportional ist und der Proportionalitätsfaktor $|B|$ gemäß (1.4.12) durch die

1.4. Der harmonisch getriebene gedämpfte Oszillator

Parameter des gedämpften freien Oszillators, also ω_0 und γ und die Kreisfrequenz Ω der äußeren Kraft allein bestimmt ist (s. Abb 1.6, links).

Wir untersuchen nun, für welches Ω dieser Proportionalitätsfaktor maximal wird, d.h. für welche Frequenz der äußeren Kraft die Amplitude der Schwingung bei festgehaltener Amplitude der äußeren Kraft am größten wird.

Dazu müssen wir das Minimum des Ausdrucks unter der Wurzel in (1.4.12) suchen, d.h. wir müssen die Funktion

$$f(\Omega) = (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2 \quad (1.4.14)$$

untersuchen. Dazu bilden wir die Ableitung

$$\frac{d}{d\Omega}f(\Omega) = f'(\Omega) = 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2). \quad (1.4.15)$$

Mögliche Minima ergeben sich als die Nullstellen dieser Ableitung. Offenbar ist die Lösung entweder $\Omega = 0$, d.h. es wirkt eine zeitlich konstante äußere Kraft. Es liegt dann offenbar ein Minimum vor, wenn $\omega_0^2 < 2\gamma^2$ ist, denn es gilt

$$f''(\Omega) = 4(2\gamma^2 - \omega_0^2 + 3\Omega^2). \quad (1.4.16)$$

Es ist also $f''(0) = 4(2\gamma^2 - \omega_0^2)$, und dies ist positiv für $\omega_0^2 < 2\gamma^2$.

Falls $\omega_0^2 > 2\gamma^2$, nimmt (1.4.15) eine Nullstelle bei der **Resonanzfrequenz**

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (1.4.17)$$

an. Dort gilt $f''(\Omega_{\text{res}}) = 8(\omega_0^2 - 2\gamma^2) > 0$, und es liegt also auch in diesem Fall ein Minimum für f und also ein Maximum der Amplitude vor.

Man nennt daher Ω_{res} die **Amplitudenresonanzfrequenz**, weil dies die Frequenz ist, wo die Amplitude der eingeschwingenen Bewegung maximal wird. Interessanterweise ist sie weder durch die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators ω_0 noch durch die Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ im Schwingfall $\omega_0 > \gamma$ gegeben sondern durch die kleinere Amplitudenresonanzfrequenz (1.4.17).

1.4.3 Energieresonanz

Eine andere Frage ist es, bei welcher Frequenz der äußeren Kraft, diese die größte mittlere Leistung aufbringen muß, um den Massenpunkt in dem erzwungenen eingeschwingenen Schwingungszustand zu halten. Dazu berechnen wir die über eine Periode $T = 2\pi/\Omega$ gemittelte Leistung der äußeren Kraft

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T dt mA \cos(\Omega t) \dot{x}^{(\text{inh})}(t). \quad (1.4.18)$$

Nun ist gemäß (1.4.13)

$$P(t) = mA \cos(\Omega t) \dot{x}^{(\text{inh})}(t) = -mA^2|B|\Omega \cos(\Omega t) \sin(\Omega t - \varphi_0). \quad (1.4.19)$$

Mit dem Additionstheorem für den Sinus ist

$$P(t) = -mA^2|B|\Omega \cos(\Omega t) [\sin(\Omega t) \cos \varphi_0 - \cos(\Omega t) \sin \varphi_0]. \quad (1.4.20)$$

1. Die Raum-Zeitstruktur der Newtonschen Mechanik

Zur einfacheren Integration bemerken wir, daß

$$\cos(\Omega t) \sin(\Omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\Omega t), \quad \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\Omega t)] \quad (1.4.21)$$

gilt, was man sofort durch Anwendung der Additionstheoreme nachweist. Da weiter

$$\int_0^T dt \sin(2\Omega t) = -\frac{\cos(2\Omega t)}{2\Omega} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0, \quad \int_0^T dt \cos(2\Omega t) = \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0 \quad (1.4.22)$$

gilt erhalten wir durch Einsetzen von (1.4.20) in (1.4.18) für die mittlere Leistung

$$\bar{P} = \frac{1}{2} mA^2 |B| \Omega \sin \varphi_0. \quad (1.4.23)$$

Aus (1.4.12) folgt, daß $\varphi_0 \in [0, \pi]$ und also $\sin \varphi_0 > 0$

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0} = \frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} = 2\gamma\Omega |B|. \quad (1.4.24)$$

Damit wird (1.4.23)

$$\bar{P} = mA^2 |B|^2 \gamma \Omega^2. \quad (1.4.25)$$

Wir fragen nun, bei welcher Kreisfrequenz Ω der äußeren Kraft bei vorgegebenen Parametern des Oszillators und der Amplitude A der äußeren Kraft maximal wird. Man spricht in diesem Fall von **Energieresonanz**, denn dort ist die mittlere Leistungsaufnahme des Massenpunktes aus der äußeren Kraft maximal. Wir haben also diesmal das Maximum der Funktion

$$g(\Omega) = \Omega^2 |B|^2 = \frac{\Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \quad (1.4.26)$$

zu suchen. Nach einiger Rechnung findet man für die Ableitung

$$g'(\Omega) = \frac{2\Omega(\Omega^4 - \omega_0^4)}{[(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2]^2}. \quad (1.4.27)$$

Offenbar liegt bei $\Omega = 0$ ein Minimum vor, denn dort ist g' lokal monoton fallend. Ein Maximum erhalten wir bei $\Omega = \omega_0$, denn dort ist g' offenbar lokal monoton wachsend. Die größte mittlere Leistung wird also vom Oszillator aufgenommen, wenn $\Omega = \omega_0$ ist, also die Schwingungsfrequenz der äußeren Kraft der Eigenfrequenz des *ungedämpften* Oszillators entspricht. Wie (1.4.12) zeigt, ist dort gerade die Phasenverschiebung der eingeschwungenen Bewegung gegenüber der Phase der antreibenden Kraft $\varphi_0 = \pi/2$.

Wir bemerken noch, daß für verschwindende Dämpfung $\gamma = 0$ bei $\Omega = \omega_0$ der Faktor $|B|$ unendlich wird. Das ist die sogenannte **Resonanzkatastrophe**. Dieser Fall ist gesondert zu behandeln.

Wir gehen dazu wieder von der komplexen Gleichung (1.4.7) mit $\gamma = 0$ und $\Omega = \omega_0$ aus:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = A \exp(-i\omega_0 t). \quad (1.4.28)$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz

$$z(t) = C(t) \exp(-i\omega_0 t). \quad (1.4.29)$$

1.4. Der harmonisch getriebene gedämpfte Oszillator

Gehen wir mit diesem Ansatz in (1.4.28) ein, erhalten wir

$$\ddot{C} - 2i\omega_0 \dot{C} = A. \quad (1.4.30)$$

Wir benötigen nur eine beliebige Lösung dieser Gleichung. Offensichtlich führt der Ansatz

$$C(t) = Bt \quad (1.4.31)$$

zum Ziel. Dann liefert (1.4.30)

$$-2i\omega_0 B = A \Rightarrow B = \frac{iA}{2\omega_0}. \quad (1.4.32)$$

Setzen wir dies in (1.4.29) ein und beachten, daß die Lösung für die inhomogene Lösung der reellen Gleichung $x = \operatorname{Re} z$ ist, folgt

$$x^{(\text{inh})}(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{iA}{2\omega_0} t \exp(-i\omega_0 t) \right] = \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t). \quad (1.4.33)$$

Die allgemeine Lösung lautet also in diesem Fall

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t). \quad (1.4.34)$$

Unabhängig von der Anfangsbedingung ist also für große t die Lösung eine gegenüber der äußeren Kraft um $\pi/2$ verschobene harmonische Schwingung, wobei allerdings die Amplitude linear mit der Zeit wächst. Es gibt also i.a. keine stationäre physikalische Lösung, denn gewöhnlich ist die rücktreibende Kraft nicht für beliebig große Amplituden proportional zur Auslenkung.

Die Anpassung der Integrationskonstanten C_1 und C_2 an die Anfangsbedingungen (1.2.3) liefert übrigens

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t). \quad (1.4.35)$$

1.4.4 Lösung des Anfangswertproblems

Wir kommen schließlich auf die Lösung des Anfangswertproblems für den getriebenen harmonischen Oszillators zurück, die zur vollständigen Beschreibung der Bewegung bei beliebig vorgegebenen Anfangsbedingungen (1.2.3) dient und nicht nur den eingeschwungenen Zustand liefert. Man spricht auch vom **Einschwingvorgang**.

Wir müssen nur für die allgemeine Lösung (1.4.3) die Integrationskonstanten C_1 und C_2 aus den Anfangsbedingungen (1.3.1) durch Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems zu bestimmen. Wir geben das Ergebnis für die oben diskutierten drei Fälle an

Schwingfall ($\omega_0 > \gamma$):

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[x_0 - \frac{A(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \cos(\omega t) \right] \exp(-\gamma t) \\ & + \frac{1}{\omega} \left[v_0 + \gamma x_0 - \frac{A\gamma(\Omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \right] \sin(\omega t) \exp(-\gamma t) \\ & + A \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \cos(\Omega t) + \frac{2A\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

Kriechfall ($\omega_0 < \gamma$): Setzen wir zur Abkürzung $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, erhalten wir für diesen Fall

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[x_0 - \frac{A(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \cosh(\alpha t) \right] \exp(-\gamma t) \\ & + \frac{1}{\alpha} \left[v_0 + \gamma x_0 - \frac{A\gamma(\Omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \right] \sinh(\alpha t) \exp(-\gamma t) \\ & + A \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \cos(\Omega t) + \frac{2A\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (1.4.37)$$

Zu dieser Lösung können wir auch wieder gelangen, indem wir in (1.4.36) $\omega = i\alpha$ setzen und die bekannten Formeln

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i \sinh z \quad (1.4.38)$$

verwenden.

Aperiodischer Grenzfall ($\omega_0 = \gamma$):

$$\begin{aligned} x(t) = & \exp(-\gamma t) \left[x_0 - \frac{A(\gamma^2 - \Omega^2)}{(\gamma^2 + \Omega^2)^2} + \left(v_0 + \gamma x_0 - \frac{A\gamma}{\gamma^2 + \Omega^2} \right) t \right] \\ & + A \frac{(\gamma^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t) + 2\gamma\Omega \sin(\Omega t)}{(\Omega^2 + \gamma^2)^2}. \end{aligned} \quad (1.4.39)$$

1.4.5 Getriebener harmonischer Oszillator mit beliebiger äußerer Kraft

Schließlich beschäftigen wir uns noch mit der Frage, wie ein harmonisch gebundener Körper unter Berücksichtigung der Reibung sich unter einer beliebig vorgegebenen von außen eingepprägten Kraft $F_{\text{ext}}(t)$ verhält.

Schreiben wir zur Abkürzung $a(t) = F_{\text{ext}}(t)/m$, lautet nun die zu lösende Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = a(t). \quad (1.4.40)$$

Nehmen wir nun an, wir hätten zwei Lösungen x_1 und x_2 dieser Gleichung gefunden und bilden $y = x_1 - x_2$. Wegen der Linearität der Differentialgleichung erfüllt y die oben gelöste Gleichung für die Bewegung ohne äußere Kraft (die **homogene Gleichung**), d.h. wir müssen nur eine einzige spezielle Lösung der obigen Gleichung finden, denn wir besitzen ja bereits die vollständige Lösung für die homogene Gleichung.

Besonders bequem ist diejenige spezielle Lösung x_i , die die Anfangsbedingungen

$$x_i(t) = 0, \quad \dot{x}_i(t) = 0 \quad (1.4.41)$$

erfüllt. Wegen der Linearität der Gleichung können wir weiter davon ausgehen, daß diese Lösung **linear in der eingepprägten Kraft** sein wird. Weiter kann die Lösung zur Zeit t aufgrund des **Kausalitätsprinzips** nur von Werten von $a(t)$ zu Zeiten $t' < t$ abhängen. Das führt uns zu dem Ansatz

$$x_i(t) = \int_0^t dt' G(t, t') a(t'). \quad (1.4.42)$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (1.4.41) ein, folgt

$$\int_0^t dt' (\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2) G(t, t') a(t') = a(t). \quad (1.4.43)$$

1.4. Der harmonisch getriebene gedämpfte Oszillator

Damit muß $G(t, t')$ der inhomogenen Gleichung mit einer δ -Distribution als eingepprägter Kraft genügen:

$$(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2)G(t, t') = \delta(t - t'). \quad (1.4.44)$$

Man bezeichnet G als die zu dem linearen Differentialoperator in der Klammer gehörige **Green-Funktion**.

Die rechte Seite hängt nur von der Differenz der Zeiten $t - t'$ ab, so daß wir zur Lösung dieser Gleichung den Ansatz

$$G(t, t') = g(t - t') \quad (1.4.45)$$

machen können. Dann muß aber gelten

$$(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2)g(t) = \delta(t). \quad (1.4.46)$$

Um die Anfangsbedingung (1.4.41) zu erfüllen, muß offenbar

$$g(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (1.4.47)$$

gelten. Für $t > 0$ ist aber $\delta(t) = 0$, und g erfüllt die homogene Gleichung.

Wir schließen zunächst den aperiodischen Grenzfall aus, d.h. wir nehmen an $\gamma \neq \omega_0$. Damit muß gemäß der oben hergeleiteten Lösungen gelten

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ A \exp(\lambda_1 t) + B \exp(\lambda_2 t) & \text{falls } t > 0. \end{cases} \quad (1.4.48)$$

mit den beiden reellen oder zueinander konjugiert komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung (1.3.5), wobei wir den aperiodischen Grenzfall $\omega_0 = \gamma$ gesondert behandeln werden. Aufgrund der Anfangsbedingung muß nun offenbar $g(0^+) = 0$, d.h. $B = -A$ gelten, d.h. g ist in $t = 0$ stetig. Um nun auch A bestimmen zu können benötigen wir eine Bedingung an $g'(t)$ für $t \rightarrow 0^+$. Um diese zu erhalten, müssen wir nur die Differentialgleichung (1.4.46) über ein Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ für ein beliebiges $\epsilon > 0$ integrieren und dann $\epsilon \rightarrow 0^+$ zu führen. Das liefert wegen (1.4.48)

$$g'(0^+) = A(\lambda_1 - \lambda_2) = 2A\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \stackrel{!}{=} 1. \quad (1.4.49)$$

Es ist also

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}. \quad (1.4.50)$$

Damit ist also

$$g(t) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} [\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)]. \quad (1.4.51)$$

Dabei haben wir die **Heavisidesche Einheitssprungfunktion**

$$\Theta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 1/2 & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases} \quad (1.4.52)$$

Dabei ist die Festlegung des Wertes $1/2$ für $t = 0$ für unsere jetzige Anwendung irrelevant. Die eben getroffene Festlegung erweist sich aber im Zusammenhang mit Fourier-Reihen und -Integralen als bequem (vgl. z.B. [CH10]). Für den überdämpften bzw. den Schwingfall erhalten wir aus (1.4.51)

$$g(t) = \frac{\Theta(t)}{\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}} \exp(-\gamma t) \times \begin{cases} \sinh(t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) & \text{falls } \gamma > \omega_0, \\ \sin(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}) & \text{falls } \gamma < \omega_0. \end{cases} \quad (1.4.53)$$

Dabei haben wir die Beziehungen

$$\sinh z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2}, \quad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \quad (1.4.54)$$

verwendet.

Die Greensche Funktion für den aperiodischen Grenzfall $\omega_0 = \gamma$ erhalten wir wieder, indem wir in (1.4.53) den Grenzübergang $\omega_0 \rightarrow \gamma$ bilden:

$$g(t) = \Theta(t)t \exp(-\gamma t) \quad \text{falls } \omega_0 = \gamma. \quad (1.4.55)$$

1.4.6 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Die Lösung des Problems mit einer harmonischen äußeren Kraft (S. Abschnitt 1.4) kann auch für die Untersuchung allgemeinerer äußerer Kräfte genutzt werden, indem man sich der Fourierschen Methode der **harmonischen Analyse** bedient. Hat man es mit beliebigen periodischen Kräften mit Kreisfrequenz ω zu tun, kann man die Funktion in eine **Fourier-Reihe** entwickeln. Für nichtperiodische Vorgänge kann man **Fourier-Integrale** verwenden. Wir fassen uns hier kurz und verweisen für eine ausführlicherre Darstellung auf [CH10].

Sei also durch $a(t)$ eine äußere periodische Kraft mit Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ gegeben. Dann können wir sie in eine Fourier-Reihe der Form

$$a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_n \exp(-in\omega t). \quad (1.4.56)$$

Wegen

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \exp[-i(n-m)\omega t] = \begin{cases} T & \text{falls } n = m \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{falls } n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1.4.57)$$

ergeben sich die Fourier-Koeffizienten bei vorgegebenem $a(t)$ durch

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt a(t) \exp(+in\omega t). \quad (1.4.58)$$

Die stationäre Lösung der Bewegungsgleichung für eine solche periodische Kraft ergibt sich dann durch Superposition aus der Lösung (1.4.8)

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{\omega_n}(t) \quad \text{mit} \quad x_{\omega_n}(t) = \tilde{a}_n \frac{\exp(-i\omega_n t)}{\omega_0^2 - \omega_n^2 - 2i\omega_n \gamma}. \quad (1.4.59)$$

Für eine nichtperiodische Kraft können wir bei hinreichend schnellem Abfall im zeitlich Unendlichen die Darstellung als Fourier-Integral verwenden:

$$a(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{a}(\omega) \exp(-i\omega t). \quad (1.4.60)$$

1.4. Der harmonisch getriebene gedämpfte Oszillator

Die entsprechende Umkehrung ist durch

$$\tilde{a}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} dt a(t) \exp(+i\omega t) \quad (1.4.61)$$

gegeben (für Einzelheiten dazu s. wieder [CH10]). Dann finden wir die stationäre Lösung wieder durch „Superposition“ der Lösungen für den Fall einer harmonischen Kraft analog wie bei (1.4.59):

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{a}(\omega) x_{\omega}(t) \exp(-i\omega t). \quad (1.4.62)$$

Schließlich gewinnen wir noch die Greensche Funktion mit Hilfe der Fourier-Transformation. Wir gehen von der entsprechenden Differentialgleichung (1.4.46) aus und stellen $g(t)$ durch ihre Fourier-Transformierte $\tilde{g}(\omega)$ dar:

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{g}(\omega) \exp(-i\omega t). \quad (1.4.63)$$

Dann benötigen wir noch die Darstellung der δ -Distribution in der Form (s. wieder [CH10])

$$\delta(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t). \quad (1.4.64)$$

Setzen wir dies in (1.4.46) ein, erhalten wir

$$(-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \omega_0^2)\tilde{g}(\omega) = 1. \quad (1.4.65)$$

Damit ist also die Fourier-Transformierte der Green-Funktion durch eine einfache algebraische Gleichung gegeben:

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}. \quad (1.4.66)$$

Um die Greensche Funktion $g(t)$ zu gewinnen, können wir bei der Auswertung des Fourier-Integrals (1.4.63) den Residuensatz anwenden. Dazu müssen wir den Integrationsweg, der ja ursprünglich entlang reeller Werte für ω führt, in der komplexen ω -Ebene schließen. Aufgrund der Exponentialfunktion können wir dies durch jeweils einen sehr großen Halbkreis, dessen Radius wir am Ende der Rechnung gegen ∞ geführt denken dürfen, bewerkstelligen, wobei wir für $t < 0$ den Halbkreis in der oberen für $t > 0$ in der unteren Halbebene zu schließen haben, damit sein Beitrag jeweils exponential gedämpft ist und im Unendlichen verschwindet. Da (1.4.66) in der oberen ω -Halbebene keine Pole besitzt, denn es ist ja $\alpha > 0$, ist automatisch $g(t) = 0$ für $t < 0$.

Für $t > 0$ behandeln wir zunächst den Fall $\gamma \neq \omega_0$ (entsprechend dem Fall von Überdämpfung oder dem Schwingfall). Dann haben wir zwei Pole erster Ordnung bei

$$\omega_{12} = \begin{cases} -i\alpha \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} & \text{falls } \omega_0 > \gamma, \\ -i\alpha \pm i\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} & \text{falls } \omega_0 < \gamma. \end{cases} \quad (1.4.67)$$

Da der Integrationsweg im Uhrzeigersinn, also in mathematisch negativem Sinn durchlaufen wird, müssen wir die Residuen des Integranden in (1.4.63) mit $-2\pi i$ multiplizieren und aufaddieren. Wir erhalten daraus sofort wieder (1.4.53).

Im aperiodischen Grenzfall $\omega_0 = \gamma$, besitzt (1.4.65) einen Pol 2. Ordnung:

$$\tilde{g}(\omega) = -\frac{1}{(\omega + i\gamma)^2} \quad (1.4.68)$$

1. Die Raum-Zeitstruktur der Newtonschen Mechanik

Hier erhalten wir das Residuum des Fourier-Integranden am einfachsten, indem wir die Exponentialfunktion in eine Taylor-Reihe um $\omega = -i\alpha$ bzgl. ω entwickeln:

$$\tilde{g}(\omega)\exp(-i\omega t) = -\frac{1}{(\omega + i\alpha)^2} [1 - it \exp(-\alpha t)(\omega + i\alpha) + \mathcal{O}[(\omega + i\alpha)^2]]. \quad (1.4.69)$$

Wie zu erwarten, führt also auch hier der Residuensatz zum korrekten Ergebnis (1.4.55).

Im Fall für den ungedämpften Oszillator ist $\gamma = 0$, und (1.4.66) ergibt formal

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.4.70)$$

Dies ist aber problematisch, da dann zwei Pole auf der reellen Achse bei $\omega = \pm\omega_0$ zu liegen kommen, und damit das Fourier-Integral (1.4.63) nicht mehr wohldefiniert ist. Dies kuriert man einfach dadurch, daß man sehr kleine Dämpfung einbaut, so daß man die retardierte Greensche Funktion

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega^+} \quad (1.4.71)$$

für den ungedämpften Oszillator erhält. Man verschiebt dann offenbar beide Pole um ein infinitesimal kleines Stückchen in die untere komplexe ω -Halbebene, so daß auch in diesem Fall wieder der Residuensatz anwendbar ist. Die entsprechende Auswertung des Fourier-Integrals (1.4.63) liefert dann

$$g(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (1.4.72)$$

was man auch durch direkte Bildung des Limes $\gamma \rightarrow 0^+$ aus (1.4.53) erhält.

1.5 Symmetrien der Galilei-Newtonschen Raum-Zeit

In diesem Abschnitt werden wir die eben eingeführte Raum-Zeit, auf der die klassische Galilei-Newtonsche Mechanik aufbaut, mathematisch ein wenig näher untersuchen, und zwar indem wir die für die innere Konsistenz der Theorie notwendige Symmetrie unter den affinen euklidischen Koordinatentransformationen ausformulieren, die die Unabhängigkeit der Phänomene vom gewählten Bezugssystem ausdrückt. Das geeignete mathematische Hilfsmittel dazu ist die **Gruppentheorie**, die wir hier zwar in ausführlicher aber doch möglichst kurzer Form behandeln wollen. Symmetriegruppen stehen im Zentrum des Interesses der fundamentalen Grundgesetze der Physik, und daher erscheint diese frühe Einführung der allgemeinen Symmetrieprinzipien gerechtfertigt.

Wir haben aus unserer täglichen Erfahrung nur eine recht vage Vorstellung von dem, was in der Physik und Mathematik unter Symmetrie verstanden wird. Nehmen wir die Geometrie als das Gebiet der Mathematik, das der anschaulichen Bedeutung von Symmetrie am besten entspricht, können wir diese Anschauung dadurch charakterisieren, daß eine Figur symmetrisch ist, wenn sie bei bestimmten geometrischen Operationen wie z.B. dem Spiegeln an einer Achse oder einem Punkt unverändert bleibt. Mathematisch ausgedrückt heißt das aber nichts anderes, als daß wir eine Operation an der Figur ausführen.

Formulieren wir das etwas abstrakter, sehen wir, daß eine Symmetrie mathematisch dadurch charakterisiert werden kann, daß eine Abbildung bestimmter Punktfolgen des affinen Raumes, die wir dann symmetrisch bzgl. dieser Abbildung nennen, diese Punktfolgen in sich abbildet. Wir setzen weiter

voraus, daß die Abbildung bijektiv, also umkehrbar eindeutig ist. Die Symmetrie einer Punktmenge wird also dadurch definiert, daß eine bijektive Abbildung des affinen Raumes existiert, die die Punktmenge in sich abbildet.

Aufgrund der Lex prima sind die geradlinig gleichförmigen Bewegungen eines Körpers durch nichts gegenüber der Ruhe desselben physikalisch zu unterscheiden. Es ist vielmehr die Eigenschaft der Trägheit, die durch die Masse des Körpers in der Lex secunda definiert wird, wenn man die wirkenden Kräfte aufgrund außerhalb der Mechanik liegenden Naturgesetzen als gegeben ansieht. Historisch waren diese Kräfte allein aufgrund von Beobachtungen bestimmbar. Die moderne Physik hat allerdings gezeigt, daß die Betrachtung der Symmetrien einer Theorie, also die Betrachtung der Transformationen der Gleichungen, die diese invariant lassen, die Form der Kräfte sehr weitgehend bestimmt. Heute genügen Symmetrieprinzipien, die allerdings auch auf empirische Untersuchungen der Elementarteilchen zurückgehen, um die bekannten Grundkräfte der Natur in befriedigender Weise zu beschreiben.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Restriktionen, die die Symmetrie, die der Newtonschen Raum-Zeit innewohnt, der Form der Kräfte auferlegt. So kann man ein Bezugssystem, in dem die Lex secunda gilt, nicht von einem anderen Bezugssystem unterscheiden, das sich gegenüber dem ersten geradlinig gleichförmig bewegt. Das bedeutet, daß die Masse und die Kräfte sich unter einer Transformation der Form

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \quad \text{mit } \mathbf{v} = \text{const.} \quad (1.5.1)$$

nicht ändern.

Betrachten wir nun die mathematischen Gesetzmäßigkeiten, die unseren Transformationen zugrunde liegen, genauer, erkennen wir eine algebraische Struktur, die die Mathematiker eine **Gruppe** nennen. Während bisher die Struktur der physikalischen Raum-Zeit im Vordergrund unserer Überlegungen stand, sind wir jetzt bei einer Formulierung angelangt, die die Transformationen dieses Raumes in sich ins Blickfeld rückt. Die Gruppentheorie ermöglicht nun die Betrachtung dieser Transformationen ohne notwendig den zu transformierenden Raum im Auge zu haben. Diese Abstraktion hat sich für die gesamte moderne Physik, deren Entwicklung mit der Formulierung der Quantentheorie ihren derzeitig gültigen Stand erreicht hat, als außerordentlich nützlich, wenn nicht gar als unverzichtbar erwiesen.

1.5.1 Einschub: Grundlegendes zur Gruppentheorie

Wir formulieren also zunächst die wichtigsten mathematischen Grundlagen der Gruppentheorie.

Eine Menge G mit einer binären Operation $G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto ab$ heißt **Gruppe**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

- (G1) Für drei Elemente $a, b, c \in G$ gilt stets das Assoziativgesetz $(ab)c = a(bc)$.
- (G2) Es gibt genau ein **neutrales Element** $e \in G$ mit $ea = ae = a$ für alle $a \in G$.
- (G3) Zu jedem $a \in G$ existiert genau ein **inverses Element** $a^{-1} \in G$, so daß $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Gilt zusätzlich noch die Kommutativität, also für alle $a, b \in G$ die Beziehung $ab = ba$, so heißt die Gruppe **Abelsche Gruppe**.

Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt Untergruppe zu G , wenn sie mit der Gruppenmultiplikation von G wieder eine Gruppe bildet.

Die einfachsten Beispiele für Abelsche Gruppen sind die Addition in Vektorräumen bzw. Körpern (die sog. **additiven Gruppen**). Wir benötigen im folgenden vor allem Untergruppen der $GL(n)$, also der Gruppe, die durch die invertierbaren $n \times n$ -Matrizen (isomorph zur Menge aller Automorphismen des

\mathbb{K}^n , wobei \mathbb{K} den jeweils zugrundegelegten Skalarenkörper des Vektorraumes bezeichnet, für unsere Zwecke also stets \mathbb{R} oder \mathbb{C}) definiert ist. Die Gruppenmultiplikation ist dabei die übliche Matrizenmultiplikation (entsprechend der Hintereinanderausführung der Automorphismen).

Betrachten wir jedoch nun die Transformationen der Form (1.5.1), also die Galileiboosts. Diese bilden eine Untergruppe der vollen Galileigruppe, die wir kurz als Boostuntergruppe bezeichnen wollen. Das läßt sich leicht einsehen, wenn wir die Hintereinanderausführung zweier Boosts betrachten:

$$t' = t, \quad x' = x - v_1 t, \quad t'' = t', \quad x'' = x' - v_2 t' \Rightarrow t'' = t, \quad x'' = x - (v_1 + v_2)t. \quad (1.5.2)$$

Das wesentliche für die behauptete Gruppenstruktur ist, daß diese Hintereinanderausführung zweier Boosts wieder ein Boost ist. Die resultierende Boostgeschwindigkeit ist einfach die Summe der Boostgeschwindigkeiten der einzelnen Transformationen. Hier sehen wir wieder ein Charakteristikum für die Gruppen, die uns hier in der klassischen Mechanik begegnen: Jedes Gruppenelement, in diesem Falle also jede Boosttransformation, läßt sich durch einen Satz kontinuierlicher Parameter, hier der Boostgeschwindigkeit v , eindeutig beschreiben. Mehr noch, vermöge der Euklidischen Norm des \mathbb{R}^3 besitzt der Parameterraum eine Metrik, und die Transformationen lassen sich sogar bzgl. der Parameter differenzieren. Gruppen, die eine topologische Struktur besitzen, bzgl. der die Gruppenoperationen stetig sind, heißen **topologische Gruppen**, und solche, die sogar differenzierbar in dem eben beschriebenen Sinne sind heißen **Liegruppen**.

In der klassischen Mechanik haben wir es, wie oben erwähnt, meist mit Matrixgruppen, also Untergruppen der $GL(n)$ zu tun, und da versteht sich die Differenzierbarkeitsstruktur wie in endlichdimensionalen Räumen üblich komponentenweise, so daß wir hier auf die mathematisch äußerst interessante aber auch nicht ganz einfache Theorie der allgemeinen Liegruppen nicht näher eingehen werden. Wir werden allerdings so oft als möglich, die gruppentheoretische Sprechweise und auch die typische Schlußweise benutzen, um physikalische Resultate zu erhalten, weil dies die der modernen Auffassung der Physik adäquate Sprache ist. Wir werden auch die abstrakte Theorie der **differenzierbaren Mannigfaltigkeiten** parallel entwickeln, weil dies das der später zu behandelnden Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins angepaßte Ausdrucksmittel darstellt. Auch erweist sich die moderne Theorie des Cartankalküls als bei weitem übersichtlicher als die ältere Vektoranalysis, die wir hier nur insoweit einführen werden (und immer parallel zu der modernen Version) als sie zum Verständnis der Lehrbuchliteratur unentbehrlich und praktischen Rechnungen förderlich erscheint.

Jetzt wollen wir sogleich die Galileiboosts in eine andere Darstellung, nämlich als Untergruppe der $GL(4, \mathbb{R})$, bringen. Wir definieren dazu vierdimensionale Spaltenvektoren

$$\underline{x} = (t, x_1, x_2, x_3)^t = (t, \mathbf{x})^t. \quad (1.5.3)$$

Ein Blick auf (1.5.1) zeigt uns, daß wir dann einen Boost mit Geschwindigkeit v mit Hilfe von Matrizen wie folgt darstellen können:

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} t' \\ x_1' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x_1 - v_1 t \\ x_2 - v_2 t \\ x_3 - v_3 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 & 1 & 0 & 0 \\ -v_2 & 0 & 1 & 0 \\ -v_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = G_B(v) \underline{x}. \quad (1.5.4)$$

Wir nennen diese vierdimensionalen Vektoren **Galileische Weltvektoren** und die Punkte im dazugehörigen vierdimensionalen affinen Punktraum **Ereignisse**. Wir bemerken weiter, daß nunmehr tatsächlich die Galileiboosts vermöge der eben definierten Boostmatrizen $G_B(v)$ als (Abelsche) Untergruppe der $GL(4, \mathbb{R})$ dargestellt werden. Es gilt nämlich

$$G_B(v)G_B(w) = G_B(w)G_B(v) = G_B(v + w), \quad G_B(v)^{-1} = G_B(-v), \quad (1.5.5)$$

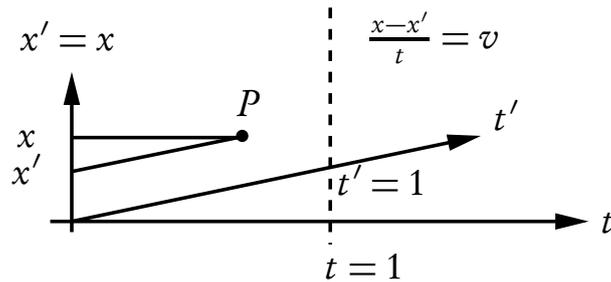


Abbildung 1.7: Die Galileitransformation $x' = x - vt$ für jeden Weltpunkt P ist unmittelbare geometrische Folgerung aus der Konstruktion der Zeitachse und Zeiteinheit des Bezugssystems Σ' aus den entsprechenden Festlegungen für die willkürliche Wahl derselben für das Bezugssystem Σ .

so daß alle Gruppenaxiome unter Einschränkung auf Boostmatrizen erfüllt werden und zudem noch Kommutativität der Gruppenmultiplikation gilt. Die Einführung dieser vierdimensionalen Weltvektoren im Galileischen Kontext ist eigentlich nicht notwendig, erlaubt aber eine sehr einfache Implementierung der Galileigruppe in das Computersystem `Mathematica`, so daß wir einige lästige Rechenarbeit dem Computer überlassen können.

1.5.2 Geometrie der Galilei-Welt

Bevor wir nun die Gruppe der affinen Transformationen des \mathbb{R}^4 auf die Symmetriegruppe der Galileischen Welt reduzieren (wir haben als die physikalisch interessanteste Untergruppe bisher nur die Boosts identifiziert), wollen wir eine etwas geometrischere Vorstellung von dieser Welt gewinnen.

Wir beschränken uns dabei auf die Darstellung einer eindimensionalen Bewegung, reduzieren also die vierdimensionale Welt auf die tx -Ebene. Dazu tragen wir t in horizontaler und x in vertikaler Richtung der Ebene auf. Die Rechtwinkligkeit dieses Koordinatensystems ist dabei reine Willkür und durch nichts in der Struktur der Raum-Zeit selbst in irgendeiner Weise ausgezeichnet. Wir werden auch sogleich sehen, daß die Darstellung eines geboosteten Koordinatensystems diese Rechtwinkligkeit notwendig zerstört.

Betrachten wir nun in diesem System Σ ein gegen dieses mit der Geschwindigkeit v bewegtes Bezugssystem Σ' , d.h. $t' = t$ und $x' = x - vt$. Die x' -Achse ist dann durch $t = t' = 0$ gegeben und fällt infolgedessen mit der alten x -Achse zusammen. Die t' -Achse ist hingegen durch $x' = 0$, also bzgl. Σ durch $x = vt$ gegeben und wird folglich als Gerade mit der Steigung v in unserem Diagramm dargestellt.

Nunmehr haben wir in dem neuen Koordinatensystem die Einheiten zu konstruieren. In Σ legen wir diese willkürlich fest. Wegen $t' = t$ muß die Linie der gleichzeitigen Ereignisse parallel zur $x' = x$ -Achse verlaufen, so daß der Schnittpunkt der Parallele durch $t = 1$ mit der t' -Achse, deren Zeiteinheit eindeutig festlegt. Diese Konstruktion wird in Abb. 1.7 gezeigt.

In ihr ist auch die Darstellung eines beliebigen Ereignisses P bzgl. der beiden Systeme Σ und Σ' abzulesen. Diese Darstellung zeigt auch, daß mit Einführung der Galileischen Raum-Zeit die Annahme gemacht wurde, daß die Zeit durch instantane Signale vom Bezugssystem Σ auf das dazu bewegte Bezugssystem Σ' übertragen werden kann.

Wir wollen nun einige kinematische Folgerungen aus den eingeführten Galileidiagrammen ziehen. So selbstverständlich diese uns erscheinen mögen, die analogen Konstruktionen werden uns in einem späteren Kapitel, in dem wir die Raum-Zeit, die der speziellen Relativitätstheorie zugrundeliegt, zu schein-

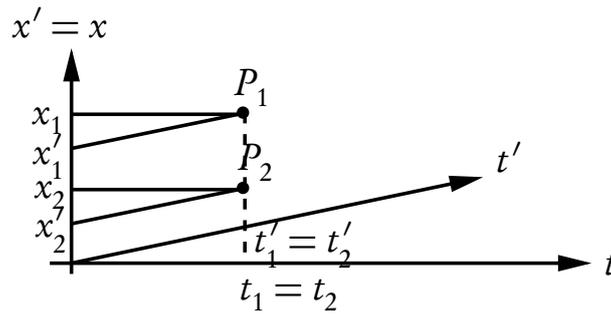


Abbildung 1.8: Bzgl. Σ gleichzeitige Ereignisse sind auch gleichzeitig bzgl. dem dazu gleichförmig geradlinig bewegten Bezugssystem Σ' .

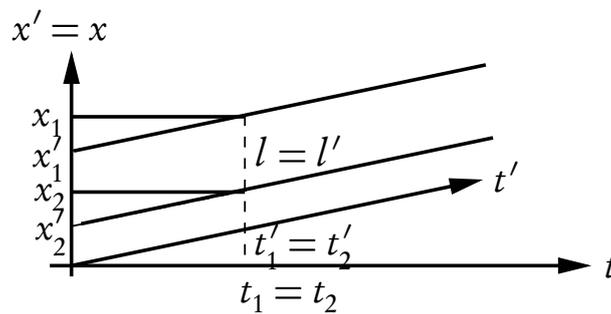


Abbildung 1.9: Längenmessung eines bzgl. Σ' ruhenden Stabes: Gezeichnet sind die Weltlinien von Anfangs- und Endpunkt des Stabes. Die Längenmessung erfordert die gleichzeitige Festlegung von Anfangs- und Endkoordinate des Stabes. Die Zeichnung zeigt unmittelbar, daß $l' = |x'_1 - x'_2| = |x_1 - x_2| = l$ ist.

bar paradoxen Ergebnissen führen.

Beginnen wir mit der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse P_1 und P_2 . Gleichzeitigkeit in Σ bedeutet, daß die Ereignisse im Galileidiagramm auf einer Parallele zur x -Achse liegen. Konstruieren wir wie in Abb. 1.7 das bzgl. Σ gleichförmig geradlinig bewegte Bezugssystem Σ' , finden wegen der Übereinstimmung von x - und x' -Achse die beiden Ereignisse erwartungsgemäß auch in Σ' gleichzeitig statt. Als nächstes betrachten wir die Längenmessung eines bzgl. Σ' ruhenden Stabes, der sich also bzgl. Σ geradlinig gleichförmig bewegt. Die Längenmessung bedeutet dabei definitionsgemäß, daß die Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt des Stabes gleichzeitig im jeweiligen Bezugssystem zu bestimmen sind. Abb. 1.9 zeigt sofort das bereits erwartete Resultat, nämlich, daß die Länge des Stabes in beiden Bezugssystemen gleich ist. Als letztes Beispiel betrachten wir den Zeitunterschied zweier bzgl. Σ am gleichen Ort stattfindender Ereignisse. Die Abb. 1.10 zeigt nach Anwendung des Strahlensatzes unter Berücksichtigung der wie in Abb. 1.7 zu konstruierenden Zeiteinheit, daß erwartungsgemäß der Zeitunterschied in Σ' gleich ist wie in Σ .

1.6 Die volle Galileigruppe

Nach diesem Ausflug in die geometrische Darstellung der auf eine räumliche Koordinate reduzierten Raumzeit in Galileidiagrammen, die mehr der Vorbereitung auf die spezielle Relativitätstheorie diene, kehren wir nun zur mathematischen Untersuchung der Symmetrie der vollen vierdimensiona-

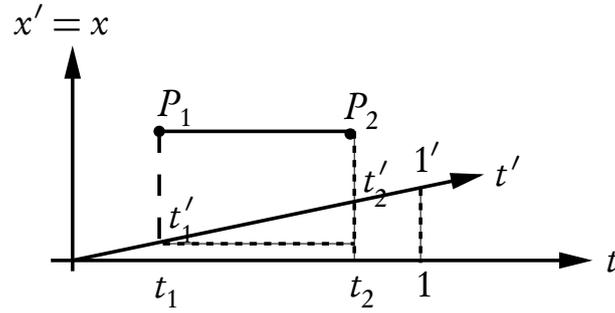


Abbildung 1.10: Zeitabstand zweier bzgl. Σ am gleichen Ort stattfindender Ereignisse P_1 und P_2 . Aus dem Strahlensatz liest man unmittelbar ab, daß $(t'_2 - t'_1)/1' = (t_2 - t_1)/1$ gilt. Da beide Beobachter jeweils ihren Zeitmaßstab benutzen, messen sie also beide den gleichen Zeitabstand zwischen beiden Ereignissen. Klarerweise finden die Ereignisse bzgl. Σ' nicht am gleichen Ort statt, sondern sie liegen entsprechend der Bewegung des Systems Σ' gegenüber dem System Σ auseinander.

len Raum-Zeit zurück.

1.6.1 Die Drehgruppe

Zunächst ist klar, daß der dreidimensionale euklidische Punktraum keine Richtung auszeichnet. Das kann man auch so ausdrücken, daß alle kartesischen Koordinatensysteme gleichberechtigt sind. Insbesondere berechnet sich das Skalarprodukt zweier Vektoren bzgl. zweier kartesischer Koordinatensysteme stets als das kanonische Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 . Seien nämlich $\{e_i\}_{i=1\dots 3}$ und $\{e'_i\}_{i=1\dots 3}$ orthonormierte Basissysteme, dann gilt (wir verwenden wieder die Einsteinsche Summationskonvention, d.h. über gleichlautende Indizes wird summiert) nämlich:

$$xy = x^i e_i y^j e_j = x^i y^j \delta_{ij} = x'^i e'_i y'^j e'_j = x'^i y'^j \delta_{ij}. \quad (1.6.1)$$

Wir können die e'_i natürlich als Linearkombinationen der e_i ausdrücken. Daraus ergibt sich dann die Umrechnung der Koordinaten von Vektoren wie folgt:

$$e'_j = O^i_j e_i \Rightarrow x = x'^j e'_j = x'^j O^i_j e_i \Rightarrow x^i = O^i_j x'^j. \quad (1.6.2)$$

Dieses Transformationsverhalten der Vektorkomponenten gilt für beliebige Basistransformationen und berücksichtigt noch nicht, daß sowohl die e'_i als auch die e_i orthonormierte Vektoren sein sollen. Klar ist, daß dieser Zusammenhang Bedingungen an die Transformationsmatrix $\hat{O} = (O^i_j)$ stellt. Diese Bedingungen lassen sich sehr leicht aus der Forderung, daß beide Basissysteme orthonormiert sind, herleiten:

$$\delta_{ij} = e'_i e'_j = O^k_i O^l_j e_k e_l = O^k_i O^l_j \delta_{kl}. \quad (1.6.3)$$

Dies können wir in Matrixschreibweise wie folgt zusammenfassen:

$$\hat{O}^t \hat{O} = \mathbb{1} \Leftrightarrow \hat{O}^{-1} = \hat{O}^t. \quad (1.6.4)$$

Man nennt durch solche Matrizen dargestellte Automorphismen des \mathbb{R}^3 **orthogonale Transformationen**. Es ist klar, daß diese Transformationen, die allein dadurch gekennzeichnet sind, daß sie Orthonormalbasen in Orthonormalbasen abbilden, eine Untergruppe der $GL(3, \mathbb{R})$ bilden, die **Orthogonale Gruppe des dreidimensionalen Raumes**, kurz $O(3)$. Wie wir sehen werden, ist sie nichtabelsch.

Aus dem Determinantenmultiplikationssatz folgt sofort, daß

$$1 = \det \hat{O}^T \hat{O} = (\det \hat{O})^2 \Rightarrow \det \hat{O} = \pm 1 \quad (1.6.5)$$

sein muß. Da die Determinante stetig von den Matrixelementen abhängt, zerfällt $O(3)$ in zwei Teile, nämlich diejenigen Transformationen, die durch infinitesimale orthogonale Transformationen aus der Identität erzeugt werden können, nämlich die mit der Determinante 1, und solche, für die eben dies nicht möglich ist. Offensichtlich bilden die orthogonalen Transformationen mit der Determinante 1 eine Untergruppe der $O(3)$, die **spezielle orthogonale Gruppe** des \mathbb{R}^3 , kurz $SO(3)$, genannt wird.

Wir wollen nun die geometrische Bedeutung der orthogonalen Transformationen, zunächst beschränken wir uns auf die $SO(3)$, untersuchen. Das charakteristische Polynom einer reellen 3×3 -Matrix, also $P_{\hat{O}}(\lambda) = \det(\hat{O} - \lambda 1)$ besitzt reelle Koeffizienten und ist vom dritten Grade und besitzt folglich mindestens einen reellen Eigenwert. Der dazugehörige Eigenvektor wird unter der Wirkung der Transformation mit dem Eigenwert multipliziert. Da es sich um eine $SO(3)$ -Transformation handelt, behält er dabei seine euklidische Länge bei, und das bedeutet, daß $\lambda^2 = 1$ und folglich $\lambda = \pm 1$ ist.

Ist der Eigenwert -1 , muß das Produkt der beiden anderen Eigenwerte $\lambda_2 \lambda_3 = -1$ sein, weil ja $\det O = +1$ ist. Da das charakteristische Polynom der Matrix reell ist, müssen entweder $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, oder sie sind konjugiert komplex zueinander. Letzteres scheidet aber aus, da dann ihr Produkt ≥ 0 sein müßte. Da weiterhin mit derselben Begründung wie für den ersten Eigenwert oben $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 1$ sein muß, muß also ein weiterer Eigenwert -1 und der andere entsprechend $+1$ sein.

Daraus ergibt sich aber endlich, daß jede $SO(3)$ -Matrix mindestens einen Eigenwert 1 besitzt und folglich einen Einheitsvektor ungeändert läßt. Diesen Einheitsvektor machen wir zur 3-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. In diesem System hat die Transformationsmatrix die Gestalt

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (1.6.6)$$

Wegen $\det \hat{O} = 1$ folgt zunächst $ad - bc = 1$. Weiter folgt aus der Orthogonalitätsforderung (1.6.5) und der Inversionsformel für eine beliebige Matrix:

$$\hat{O}^t = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{O}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b & 0 \\ -c & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.6.7)$$

Das bedeutet, daß $a = d$ und $c = -b$ sein muß. Die Matrix besitzt also die Gestalt:

$$O = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \det O = a^2 + b^2 = 1. \quad (1.6.8)$$

Aus der letzten Gleichung folgt $a \in [-1, 1]$, d.h. wir können $a = \cos \phi$ mit $\phi \in [0, 2\pi[$ setzen. Dann liegt bis auf das Vorzeichen auch $b = \pm \sin \phi$ fest. Wir wählen willkürlich $b = -\sin \phi$. Die allgemeine Gestalt der Matrix ist also

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.6.9)$$

Aus Abb. 1.11 lesen wir mit Hilfe der Definition (1.6.2) ab, daß diese Transformation eine Drehung um die Dreiachse mit dem Drehwinkel ϕ beschreibt. Wir bemerken, daß wir hier und im folgenden

1.6. Die volle Galileigruppe

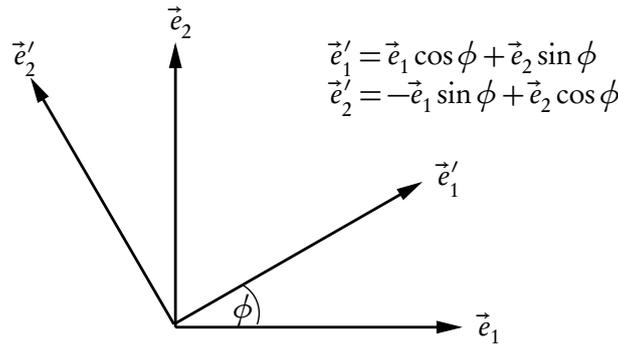


Abbildung 1.11: Die Wirkung einer $SO(3)$ -Transformation auf ein orthonormales System, für das der 3-Basisvektor Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, entspricht der einer Drehung des Systems Σ um die 3-Achse mit dem Drehwinkel ϕ , wodurch sich das System Σ' ergibt.

stets die sogenannte „Rechte-Handregel“ anwenden. Zunächst bestimmen wir das kartesische Koordinatensystem so, daß e_1 , e_2 und e_3 ein **rechtshändiges Dreibein** bilden, d.h. richtet man den Daumen der rechten Hand in Richtung von e_1 , den Zeigefinger in Richtung von e_2 , so orientieren wir e_3 in Richtung des Mittelfingers. In Abb. 1.11 weist also die Dreiachse aus der Papierebene hinaus. Die Drehung um die Dreiachse haben wir dann so definiert, daß die Basisvektoren im Gegenuhrzeigersinn um den Drehwinkel ϕ gedreht werden. Allgemein erfolgt die Drehung um eine beliebige durch einen Einheitsvektor n definierte Achse entsprechend der **Rechte-Handregel**: Richtet man den Daumen der rechten Hand in Richtung von n , geben die gekrümmten Finger die Drehrichtung an. Entsprechend dieser Regel lauten die Drehmatrizen für die Drehung um die drei Koordinatenachsen eines rechtshändigen Koordinatensystems

$$\begin{aligned} \hat{D}_1(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \\ \hat{D}_2(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}, \\ \hat{D}_3(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

Man rechnet aus der expliziten Darstellung (1.6.9) für $k = 3$ sofort nach, daß

$$\hat{D}_k(\phi_1)\hat{D}_k(\phi_2) = \hat{D}_k(\phi_1 + \phi_2), \quad \hat{D}_k(0) = 1, \quad \hat{D}_k(\phi)^{-1} = \hat{D}_k(\phi)^t = \hat{D}_k(-\phi). \tag{1.6.11}$$

Dies zeigt, daß die Menge aller Drehungen um eine feste Achse eine Abelsche Untergruppe der $SO(3)$ bilden, nämlich die Drehungen der Ebene senkrecht zu k . Diese bilden die Gruppe $O(2)$ (orthogonale Gruppe des \mathbb{R}^2). Sie ist isomorph zur additiven Gruppe \mathbb{R} , wobei aber modulo 2π zu rechnen ist.

Im folgenden zeigen wir, daß wir jede Drehung durch drei solche speziellen Drehungen ausdrücken können, und zwar fassen wir dies in dem sog. **Satz von den Euler-Winkeln** zusammen:

Jede Matrix $\hat{O} \in SO(3)$ läßt sich durch die Hintereinanderausführung dreier Drehungen wie folgt zusammensetzen:

$$\hat{O} = \hat{D}(\psi, \theta, \varphi) := \hat{D}_3(\psi)\hat{D}_1(\theta)\hat{D}_3(\varphi) \text{ mit } \psi, \varphi \in [0, 2\pi[, \theta \in [0, \pi]. \tag{1.6.12}$$

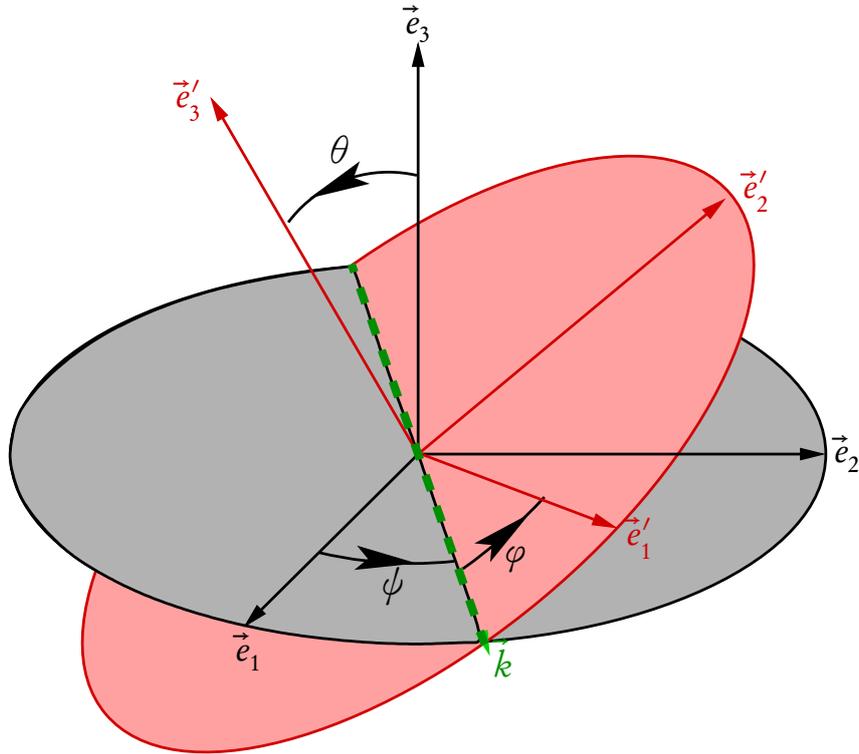


Abbildung 1.12: Zur Definition der Euler-Winkel (s. Text).

Wie wir sehen werden, ist die Zuordnung der Winkel ψ , θ und φ zu einer gegebenen Drehmatrix \hat{O} nicht notwendig eindeutig.

Zunächst machen wir uns die anschauliche Bedeutung der drei Winkel deutlich. Wir können die Drehung offenbar dadurch charakterisieren, daß wir von einem rechtshändigen kartesischen Dreibein e_j ausgehen und ein neues kartesisches Dreibein e'_j durch (1.6.2) definieren. Betrachten wir nun die geometrischen Verhältnisse dieser beiden kartesischen Dreibeine gemäß Abb. 1.12. Die Schnittlinie der 12- mit der 1'2'-Ebene definiert die sogenannte Knotenlinie, die wir gestrichelt grün eingezeichnet haben. Der in ihre Richtung weisende Einheitsvektor k ist nach der Rechte-Handregel so orientiert, daß bei der Drehung des Systems e_j um diese Achse die 3-Achse in die 3'-Achse gedreht wird, und zwar so, daß der Drehwinkel ins Intervall $\theta \in [0, \pi]$ zu liegen kommt. Das Dreibein e_j wird durch die drei Eulerdrehungen (1.6.12) sukzessive in das Dreibein e'_j verdreht, und zwar wie folgt: Zunächst erfolgt eine Drehung um die Dreiachse um den Drehwinkel $\psi \in [0, 2\pi)$, so daß die neue Einsachse e''_1 mit dem Knotenlinienvektor k zusammenfällt:

$$\vec{e}''_j = \vec{e}_k [D_3(\psi)]^k_j. \quad (1.6.13)$$

Sodann erfolgt die Drehung um diese Achse $\vec{k} = \vec{e}''_1$ um den Winkel θ , die dafür sorgt, daß die neue Dreiachse \vec{e}'''_3 nunmehr mit der 3'-Achse koinzidiert:

$$\vec{e}'''_l = \vec{e}''_j [D_1(\theta)]^j_l = \vec{e}_k [D_3(\psi)]^k_j [D_1(\theta)]^j_l. \quad (1.6.14)$$

Schließlich wird noch um die Achse $\vec{e}'''_3 = \vec{e}'_3$ um den Winkel φ gedreht, so daß schließlich auch die

1.6. Die volle Galileigruppe

neuen Eins- und Zweiachsen jeweils auf \vec{e}'_1 und \vec{e}'_2 zu liegen kommen:

$$\vec{e}'_m = \vec{e}'_l [D_3(\phi)]^l_m = \vec{e}_k [D_3(\psi)]^k_j [D_1(\theta)]^j_l [D_3(\phi)]^l_m = \vec{e}_k [\hat{D}_3(\psi) \hat{D}_1(\theta) \hat{D}_3(\phi)]^k_m = \vec{e}_k D^k_m. \quad (1.6.15)$$

Für einen beliebigen Vektor x folgt dann

$$\vec{x} = \vec{e}'_m x'^m = \vec{e}_k D^k_m x'^m \Rightarrow x^k = D^k_m x'^m \quad (1.6.16)$$

oder in Matrix-Vektor-Notation mit $x = (x^1, x^2, x^3)^t$ und $x' = (x'^1, x'^2, x'^3)^t$

$$x = \hat{D} x' \quad \text{mit} \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} D^1_1 & D^1_2 & D^1_3 \\ D^2_1 & D^2_2 & D^2_3 \\ D^3_1 & D^3_2 & D^3_3 \end{pmatrix}. \quad (1.6.17)$$

Kommen wir nun zum **Beweis** der Existenz der Euler-Winkel für eine beliebig vorgegebene Drehmatrix. Sei also \hat{O} eine beliebige $SO(3)$ -Matrix.

Wir schreiben nun zunächst die Euler-Winkelmatrix explizit auf:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.6.18)$$

Wir versuchen nun, die Winkel ψ , θ und φ so zu wählen, daß diese Matrix mit \hat{O} übereinstimmt. Soll dies möglich sein, müssen diese drei Winkel durch die dritte Zeile und die dritte Spalte bestimmt sein: Der Vergleich mit \hat{O} zeigt zunächst, daß θ so gewählt werden muß, daß $O^3_3 = \cos \theta$ ist. Wegen der Orthonormalitätsrelation (1.6.3) für $i = j = 3$ gilt

$$\sum_{j=1}^3 (O_j^3)^2 = 1 \Rightarrow |O^3_3| \leq 1, \quad (1.6.19)$$

so daß in der Tat ein eindeutig bestimmter Winkel $\theta \in [0, \pi]$ existiert, so daß $O^3_3 = \cos \theta$.

Nehmen wir nun zunächst an, daß $\theta \notin \{0, \pi\}$, d.h. $O^3_3 \neq \pm 1$. Dann ist $\sin \theta \neq 0$, und aus den verbliebenen Matrixelementen der letzten Zeile der Eulermatrix (1.6.18) ergibt sich eindeutig der Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ aus den Gleichungen

$$\cos \varphi = \frac{O^3_2}{\sin \theta}, \quad \sin \varphi = \frac{O^3_1}{\sin \theta}. \quad (1.6.20)$$

Dabei ist wegen (1.6.19) und der Festlegung $O^3_3 = \cos \theta$ gesichert, daß $(O^3_1)^2 + (O^3_2)^2 = \sin^2 \theta$ ist, was der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Existenz des Winkels φ entspricht. In genau analoger Weise läßt sich ψ so bestimmen, daß auch die beiden ersten Elemente der dritten Spalte von (1.6.18) mit der gegebenen $SO(3)$ -Matrix \hat{O} übereinstimmen.

Nun verwenden wir die so bestimmten Winkel und drücken die Matrixelemente der dritten Zeile und dritten Spalte durch die Winkel so aus, wie wir sie gerade festgelegt haben und bilden die Matrix $\hat{B} = \hat{O} \hat{D}^{-1}(\psi, \theta, \varphi)$. Lösen wir dann das lineare Gleichungssystem

$$B^1_2 = B^1_3 = B^2_1 = 0, \quad B^2_2 = 1 \quad (1.6.21)$$

nach O^1_1, O^1_2, O^2_1 und O^2_2 auf, erhalten wir genau die Einträge in (1.6.18). Allerdings ist dann \hat{B} noch nicht vollständig bestimmt, denn wir haben unsere Matrixelemente O^j_k durch die Winkel ψ, θ und φ derart bestimmt, daß $\hat{B} = \text{diag}(B^1_1, 1, 1)$. Nun wissen wir jedoch, daß $\det \hat{O} = 1$ ist. Da weiter auch $\det \hat{D}(\psi, \theta, \varphi) = 1$ ist, muß also $\det \hat{B} = 1$ und ergo $B^1_1 = 1$ sein. Folglich ist in der Tat $\hat{O} = \hat{D}(\psi, \theta, \varphi)$, womit die Darstellbarkeit der Matrix \hat{O} durch die Eulermatrix gezeigt ist.

Nun müssen wir noch die Fälle $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ behandeln. Wir hatten oben aber θ aus der Bedingung $\cos \theta = O^3_3$ bestimmt, d.h. es handelt sich um die Fälle $O^3_3 = \pm 1$. Nehmen wir zunächst an, daß $O^3_3 = 1$. Dann haben wir oben gezeigt, daß wir stets einen Winkel χ so angeben können, daß $\hat{O} = \hat{D}_3(\chi)$ ist. Da wir $\theta = 0$ gesetzt haben, sind die Winkel ψ und φ in der Eulermatrix in diesem Falle nicht eindeutig bestimmt, denn wir müssen nur $\psi + \varphi = \chi$ setzen, um die Bedingung zu erfüllen, daß $\hat{O} = \hat{D}_3(\psi)\hat{D}_1(\theta)\hat{D}_3(\varphi)$ ist. Die Darstellbarkeit der Drehung durch Euler-Winkel ist also auch in diesem Fall gegeben, nur ist diese nicht eindeutig.

Sei schließlich $O^3_3 = -1$. Wegen der Orthonormalität von \hat{O} , muß dann $O^3_1 = O^3_2 = O^1_3 = O^2_3 = 0$ sein. Bilden wir dann wieder die Matrix $\hat{B} = \hat{O}\hat{D}^{-1}(\psi, \theta = \pi, \varphi)$, können wir wegen $\det \hat{O} = \det \hat{B} = 1$ die Winkeldifferenz $\chi = \psi - \varphi$ so wählen, daß die Gleichungen $\cos \chi = O^2_2$ und $\sin \chi = O^1_2$ erfüllt sind. Schließlich ist wegen $\det \hat{O} = 1$ wieder $\hat{B} = 1$ und also die Darstellbarkeit von \hat{O} durch eine Matrix der Gestalt (1.6.18), wobei in diesem Falle $\theta = \pi$ und weiter nur die Winkeldifferenz $\chi = \psi - \varphi$ bestimmt ist. Auch hier ist die Parametrisierung der Drehmatrix durch Euler-Winkel also nicht eindeutig. Es ist aber gezeigt, daß jedenfalls für jede $SO(3)$ -Matrix stets eine Parametrisierung mit Euler-Winkeln möglich ist, d.h. die Euler-Winkel stellen eine vollständige Parametrisierung der Drehgruppe dar, die lediglich für Drehungen, die die Dreiachse ungeändert lassen oder in die entgegengesetzte Richtung bringen, unbestimmt ist.

Wir bemerken noch die wichtige Tatsache, daß die Parametrisierbarkeit der vollen Gruppe $SO(3)$ durch Euler-Winkel beweist, daß die $SO(3)$ tatsächlich die stetig mit der Identität zusammenhängende Untergruppe der $O(3)$ ist.

Ist schließlich $\hat{O} \in O(3) \setminus SO(3)$, also $\det \hat{O} = -1$, so ist $\hat{P}\hat{O} = \hat{O}\hat{P} \in SO(3)$, wobei $P = -1$ der **Paritätsoperator** ist, der geometrisch die Spiegelung des rechtshändigen Dreibeins e_j am Koordinatenursprung bewirkt. Man macht sich leicht klar, daß in diesem Fall e'_j ein linkshändiges Dreibein ist.

1.6.2 Einschub über Normalteiler und Homomorphismen

Eine Untergruppe U einer Gruppe G heißt Normalteiler, wenn für alle $g \in G$ gilt $gU = Ug$.

Sind G und G' Gruppen, so heißt jede Abbildung $\phi : G \rightarrow G'$ **Homomorphismus** genauer **Gruppenhomomorphismus**, wenn gilt:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2). \quad (1.6.22)$$

Z.B. ist $\det : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$ aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes ein Gruppenhomomorphismus. Dabei bezeichnet $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ die multiplikative Gruppe des um 0 verminderten Skalarenkörpers, und $GL(n, \mathbb{K})$ ist wieder die Menge aller $n \times n$ -Matrizen mit Elementen aus \mathbb{K} (hierbei verstehen wir wie immer unter \mathbb{K} jeweils \mathbb{R} oder \mathbb{C} , je nach Kontext).

Man definiert für einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow G'$ $\text{kern}(\phi) = \phi^{-1}(\{1\}) = \{g \in G | \phi(g) = 1\}$.

Wir zeigen, daß $U = \text{kern}(\phi)$ ein Normalteiler von G ist: Dazu ist nur zu zeigen, daß für ein beliebiges $u \in U$ auch $gug^{-1} \in U$ für alle $g \in G$ ist. Das ist aber trivial, denn es gilt $\phi(gug^{-1}) =$

$\phi(g)\phi(u)\phi(g)^{-1}$, weil ϕ Gruppenhomomorphismus ist. Wegen $u \in \text{kern}(\phi)$ ist $\phi(u) = 1$ und damit auch $\phi(gug^{-1}) = 1$, also $gug^{-1} \in U$, und das war zu zeigen.

1.6.3 Eine andere Parametrisierung der $SO(3)$

Um nun explizit zu zeigen, daß alle $SO(3)$ -Matrizen Drehungen um eine bestimmte Drehachse mit einem bestimmten Winkel ϕ bedeuten, wollen wir eine andere Parametrisierung für Drehmatrizen finden. Dazu bedienen wir uns einer Methode, die im folgenden noch oft zur Anwendung kommen wird, nämlich die der infinitesimalen Transformationen.

Betrachten wir zunächst noch einmal $\hat{D}_3(\phi)$. Für $n \in \mathbb{N}$ können wir schreiben

$$\hat{D}_3(\phi) = \left[\hat{D}_3\left(\frac{\phi}{n}\right) \right]^n = \left[1 + \frac{\phi}{n} \hat{t}_3 + O\left(\frac{\phi}{n}\right)^2 \right]^n \quad \text{mit } \hat{t}_3 = \partial_\phi \hat{D}_3(0). \quad (1.6.23)$$

Für große n können wir den in ϕ/n quadratischen Term vernachlässigen und erhalten:

$$\hat{D}_3(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\phi}{n} \hat{t}_3 \right)^n = \exp(\phi \hat{t}_3). \quad (1.6.24)$$

Dabei ist die Exponentialfunktion formal über die Potenzreihe definiert. Wir können dies einfach dadurch beweisen, daß wir die Potenzreihe ausrechnen. Aus der expliziten Form von \hat{D}_3 erhalten wir durch Ableitung und Matrizenmultiplikation

$$\hat{t}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{t}_3^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{t}_3^3 = -\hat{t}_3 \dots \quad (1.6.25)$$

Schreibt man die Exponentialreihe aus, folgt daraus

$$\begin{aligned} \exp(\phi \hat{t}_3) &= 1 + \hat{t}_3^2 + \hat{t}_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \phi^{2k+1} - \hat{t}_3^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \phi^{2k} \\ &= 1 + \hat{t}_3 \sin \phi + (1 - \cos \phi) \hat{t}_3^2 = \hat{D}_3(\phi). \end{aligned} \quad (1.6.26)$$

Damit läßt sich die Ableitung von \hat{D}_3 in Form der folgenden Differentialgleichung schreiben:

$$\partial_\phi \hat{D}_3(\phi) = \hat{t}_3 \hat{D}_3(\phi). \quad (1.6.27)$$

Sei nun $\hat{D}_n(\phi)$ die Drehung mit Drehwinkel ϕ um die durch den Einheitsvektor \mathbf{n} gegebene Richtung. Aufgrund der Isotropie des Raumes gelten nun offensichtlich für solche Drehungen dieselben Beziehungen wie für die eben im Spezialfall $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ hergeleiteten, also

$$\hat{D}_n(\phi) = \exp(\phi \hat{t}_n) \quad \text{mit } \hat{t}_n = \partial_\phi \hat{D}_n(0). \quad (1.6.28)$$

Die Drehachse ist dadurch charakterisiert, daß Vektoren in ihre Richtung unter der Drehung ungeändert bleiben, d.h. es gilt

$$\hat{D}_n(\phi) \mathbf{n} = \mathbf{n}. \quad (1.6.29)$$

Ableitung dieser Gleichung nach ϕ ergibt damit

$$\hat{t}_n \mathbf{n} = 0. \quad (1.6.30)$$

Weiter folgt aus der Orthogonalität der Drehungen

$$\hat{D}\hat{D}^t = 1 \Rightarrow 0 = (\partial_\phi \hat{D})\hat{D}^t + \hat{D}(\partial_\phi \hat{D}^t) = (\partial_\phi \hat{D})\hat{D}^t + [(\partial_\phi \hat{D})\hat{D}^t]^t. \quad (1.6.31)$$

Andererseits ist

$$\hat{t}_n = [\partial_n \exp(\phi \hat{t}_n)] \exp(-\phi \hat{t}_n) = \partial_\phi \hat{D}_n(\phi) \hat{D}_n^{-1}(\phi). \quad (1.6.32)$$

Zusammen mit der vorigen Gleichung folgt, daß $\hat{t}_n = -\hat{t}_n^t$ ist, also daß die \hat{t}_n antisymmetrische 3×3 -Matrizen sind. Diese bilden einen dreidimensionalen Vektorraum im Raum der 3×3 -Matrizen. Damit sind wegen ihrer linearen Unabhängigkeit die Matrizen

$$\hat{t}_k = \partial_\phi \hat{D}_k(0) \text{ für } k = 1, 2, 3 \quad (1.6.33)$$

eine Basis dieses Vektorraums, und es muß folglich

$$\hat{t}_n = x^k \hat{t}_k \quad (1.6.34)$$

für geeignete reelle Zahlen x^k gelten. Wie man leicht nachrechnet, ist

$$(\hat{t}_k)^i_j = -\epsilon_{kij} \text{ mit } \epsilon_{kij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } (kij) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{falls } (kij) \text{ ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{falls wenigstens zwei der Zahlen } k, i, j \text{ gleich sind.} \end{cases} \quad (1.6.35)$$

Damit folgt aber sofort, daß

$$x_k \hat{t}_k \mathbf{x} = \mathbf{e}_i x^k (\hat{t}_k)^i_j x^j = 0. \quad (1.6.36)$$

Damit also (1.6.34) gilt, muß $\mathbf{x} = \mathbf{n}$ sein, denn \mathbf{n} muß Eigenvektor von \hat{t}_n zum Eigenwert 0 sein.

Das ergibt die wichtige Parametrisierung der Drehgruppe

$$\hat{D}_n(\phi) = \exp(\phi \mathbf{n} \hat{t}) \text{ mit } \mathbf{n} \hat{t} = n^k \hat{t}_k. \quad (1.6.37)$$

Dabei charakterisiert \mathbf{n} als Einheitsvektor einen Punkt auf der Einheitssphäre des \mathbb{R}^3 und wird durch zwei Parameter (z.B. Polar- und Azimutwinkel eines Kugelkoordinatensystems) eindeutig bestimmt. Damit ist jede Drehung wiederum durch drei Parameter bestimmt, wie es sein muß. Der Parameterraum ist dabei die Kugel vom Radius π in \mathbb{R}^3 , wobei gegenüberliegende Punkte auf der Sphäre vom Radius π identifiziert werden müssen, weil sie jeweils die gleiche Drehung um den Drehwinkel π bewirken. Diese Mannigfaltigkeit bezeichnen wir mit $K^*(\pi)$, wobei der Stern die Verheftung der gegenüberliegenden Randpunkte kennzeichnen soll. In dieser Parametrisierung schreiben sich also die Drehungen

$$\hat{D}(\phi) = \exp(\phi \hat{t}) \text{ mit } \phi \in K^*(\pi). \quad (1.6.38)$$

1.6.4 Das Vektorprodukt

Wie wir eben gesehen haben, tritt im Zusammenhang mit Drehungen die Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ auf, die mit Hilfe der „Tangentenvektoren“ \hat{t}_k an die 1 der Drehgruppe wie folgt definiert wird:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \hat{t}) \mathbf{b}. \quad (1.6.39)$$

In Komponenten bzgl. eines rechtshändigen Orthonormalsystems schreibt sich dies gemäß (1.6.35):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^k = a^j (\hat{t}_j)^k_l b^l = -\epsilon_{jkl} a^j b^l = \epsilon_{kjl} a^j b^l. \quad (1.6.40)$$

1.6. Die volle Galileigruppe

Eine Rechnung, die genau analog zu der mit \hat{D}_3 durchgeführten erfolgt, ergibt dann

$$\hat{D}_n(\phi)x = \exp(\phi \mathbf{n} \hat{t})x = (\mathbf{n}x)\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times x) \times \mathbf{n} \cos \phi + (\mathbf{n} \times x) \sin \phi. \quad (1.6.41)$$

Wir können daraus unmittelbar die Differentialgleichung einer Drehung eines Vektors x um eine feste Richtung \mathbf{n} herleiten:

$$x(\phi) = \hat{D}_n(\phi)x(0) \Rightarrow \frac{d}{d\phi}x(\phi) = \mathbf{n} \hat{t} \hat{D}_n(\phi)x(0) = \mathbf{n} \times x(\phi). \quad (1.6.42)$$

Für das Kreuzprodukt gilt weiter die folgende Formel:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (1.6.43)$$

Dazu bemerken wir, daß das Levi-Civita-Symbol die Beziehung

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (1.6.44)$$

erfüllt. Zum Beweis brauchen wir nur zu überlegen, daß die Summe nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn $\{j, k\} = \{l, m\}$ und wenn j, k und l, m jeweils Paare verschiedener Zahlen sind. Haben (jk) und (lm) die gleiche Reihenfolge, ist die Summe schließlich 1, andernfalls -1 , und genau das drückt die rechte Seite mit Hilfe der Kronecker-Deltas aus. Der Vollständigkeit halber merken wir noch die daraus durch Kontraktion über das Indexpaar (j, l) entstehende Gleichung

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km} \quad (1.6.45)$$

an.

Jetzt stellen wir die Frage, wie sich ein Vektorprodukt unter Drehungen verhält. Es liegt ja nahe zu vermuten, daß sich mit x und y auch $x \times y$ wie die Komponenten eines Vektors transformiert. Das läßt sich auch leicht durch Ableitung von $(\hat{D}_n(\phi)x) \times (\hat{D}_n(\phi)y)$ zeigen. Setzen wir der Abkürzung halber

$$x(\phi) = \hat{D}_n(\phi)x \text{ und } y(\phi) = \hat{D}_n(\phi)y, \quad (1.6.46)$$

folgt durch Ableiten nach ϕ vermöge (1.6.42) und zweimalige Anwendung der Gleichung (1.6.43):

$$\partial_\phi[x(\phi) \times y(\phi)] = [\mathbf{n} \times x(\phi)] \times y(\phi) + x(\phi) \times [\mathbf{n} \times y(\phi)] = \mathbf{n} \times [x(\phi) \times y(\phi)]. \quad (1.6.47)$$

Das ist aber genau die Differentialgleichung, die die Drehung von $x \times y$ zur Lösung hat. Es gilt also für beliebige Drehungen \hat{D} :

$$\hat{D}(x \times y) = (\hat{D}x) \times (\hat{D}y). \quad (1.6.48)$$

1.6.5 Rotierende Bezugssysteme

Im folgenden betrachten wir als Anwendung der eben behandelten Drehgruppe die Newtonsche Bewegungsgleichung wie sie von einem rotierenden Bezugssystem aus erscheint. Da rotierende Bezugssysteme keine Inertialsysteme sind, wird sich ergeben, daß aufgrund der Beschleunigung des rotierenden Bezugssystems gegenüber einem Inertialsystem zusätzliche äußere Kräfte auftreten, die proportional zur Masse des Körpers sind, die **Trägheitskräfte** genannt werden.

Seien also $\mathbf{x} = (x^j)$ die Komponenten des Ortsvektors eines Massepunktes bzgl. eines Inertialsystems und $\mathbf{x}' = (x'^j)$ der Ortsvektor bzgl. eines mit dem rotierenden Bezugssystem verbundenen Koordinatensystems. Der Einfachheit halber wollen wir eine Drehung konstanter Drehgeschwindigkeit betrachten. Dieser Spezialfall hat die wichtige Anwendung, die Auswirkungen der Erddrehung auf Bewegungsvorgänge zu studieren. Es gilt gemäß (1.6.46)

$$\mathbf{x} = \hat{D}_n(\omega t)\mathbf{x}', \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \omega \times \hat{D}\mathbf{x}' + \hat{D}\frac{d\mathbf{x}'}{dt} \quad \text{mit } \hat{D} = \hat{D}_n(\omega t), \quad \omega = \omega\mathbf{n}, \quad (1.6.49)$$

wobei wir den Ursprung beider Koordinatensysteme auf die Drehachse gelegt haben. Darin bezeichnet ω die konstante Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Koordinatensystems Σ' gegenüber dem Inertialsystem Σ um die Drehachse \mathbf{n} , zusammengefaßt zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega\mathbf{n}$. Wir haben ferner die Ableitungsregel (1.6.42) angewandt. Hinzu kommt aber noch die Zeitabhängigkeit von \mathbf{x}' , der wir im zweiten Term auf der rechten Seite Rechnung getragen haben. Wenden wir nun (1.6.48) an, folgt

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \hat{D}\left(\omega' \times \mathbf{x}' + \frac{d\mathbf{x}'}{dt}\right). \quad (1.6.50)$$

Nochmalige Ableitung nach t und Multiplikation mit der Masse m des Massepunktes ergibt unter Anwendung der Ableitungsregel (1.6.42) sowie (1.6.48) zufolge der Newtonschen Bewegungsgleichung und Einführung der Kraft $\mathbf{F} = \hat{D}\mathbf{F}'$:

$$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m \hat{D} \left[\omega' \times (\omega' \times \mathbf{x}') + 2\omega' \times \frac{d\mathbf{x}'}{dt} + \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} \right] = \mathbf{F} = \hat{D}\mathbf{F}'. \quad (1.6.51)$$

Multiplikation mit \hat{D}^{-1} eliminiert formal jeden Bezug zu der der Newtonschen Mechanik zugrundeliegenden Klasse von Inertialsystemen und ergibt die Bewegungsgleichung wie sie ein Beobachter im rotierenden Bezugssystem (z.B. auf der Erde) wahrnimmt:

$$m \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = \mathbf{F}' - m \left[2\omega' \times \frac{d\mathbf{x}'}{dt} + \omega' \times (\omega' \times \mathbf{x}') \right]. \quad (1.6.52)$$

Ein Beobachter im rotierenden Bezugssystem konstatiert also die Rotation seines Bezugssystems über die Winkelgeschwindigkeit ω , und neben den äußeren Kräften \mathbf{F}' (z.B. Gravitationskräften der Erde oder elektromagnetischen Kräften, die auf den Massepunkt einwirken) erfährt der Massepunkt noch die Trägheitskräfte, die von der Rotation seines Bezugssystems relativ zur Klasse der Inertialsysteme herrühren. Diese Trägheitskräfte zerlegen sich in den zur Winkelgeschwindigkeit und Geschwindigkeit des Massepunktes proportionalen Anteil (**Coriolis-Kraft**) und einen zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit und zum Abstand des Massenpunktes von der Drehachse proportionalen Anteil (**Zentrifugalkraft**).

1.6.6 Der freie Fall auf der rotierenden Erde

Wir wenden uns nun einem Beispiel für die Bewegung eines Massepunktes auf der rotierenden Erde zu, nämlich dem **freien Fall**. Dabei tritt die Komplikation ein, daß wir den Beobachter an eine beliebige Stelle der Erde setzen wollen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir ihn auf den Längengrad 0 aber auf eine beliebige geographische Breite $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Weiter bemerken wir, daß wir für nicht zu große Fallhöhen⁴ die Gravitationskraft konstant setzen können und wegen der Kleinheit

⁴Das bedeutet in diesem Fall, daß die Fallhöhe klein gegen den Erdradius sein muß.

1.6. Die volle Galileigruppe

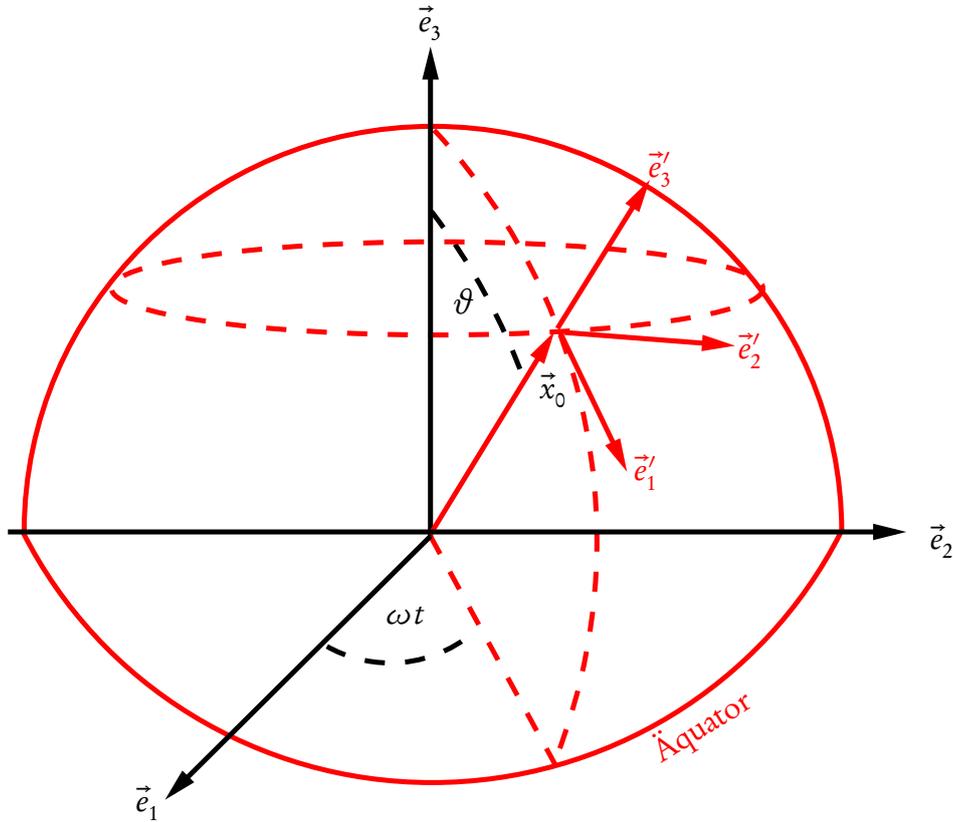


Abbildung 1.13: Koordinatensystem auf der rotierenden Erde (Erklärung im Text).

der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/\text{Tag}$ den Zentrifugalterm proportional zu ω^2 gegen den Coriolis-Term proportional zu ω vernachlässigen können. Der Hauptanteil der Kraft ist ohnehin die Gravitationskraft $m g$, wobei m wie bisher die Masse des Punktes und $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ die Fallbeschleunigung bezeichnen.

Der Beobachter bei der geographischen Breite α wird das in Abb. 1.13 gezeichnete Koordinatensystem benutzen. Dazu legen wir die Erdachse (Drehachse) in die 3-Richtung des Inertialsystems. Die 3'-Richtung des erdfesten Systems weist senkrecht aus der Erdoberfläche heraus, der Winkel θ hängt mit der geographischen Breite α gemäß $\theta = \pi/2 - \alpha$ zusammen. Die 1'-Achse ist nach Süden und die 2'-Achse nach Osten ausgerichtet.

Nun benötigen wir die Drehmatrix \hat{D} , so daß

$$e'_j = e_k D^k_j \quad (1.6.53)$$

ist. Diese erhalten wir offenbar als

$$\hat{D} = \hat{D}_3(\omega t) \hat{D}_2(\theta). \quad (1.6.54)$$

Für die Komponenten des Ortsvektors x gilt

$$x = \hat{D} x' \quad (1.6.55)$$

und für die Geschwindigkeit

$$\dot{x} = \hat{D} \dot{x}' + (d_t \hat{D}) x' = \hat{D} \dot{x}' + (d_t \hat{D}) \hat{D}^{-1} x = \hat{D} \dot{x}' + \omega \times x = \hat{D} (\dot{x}' + \omega' \times x'). \quad (1.6.56)$$

Ausführen der Zeitableitung für die Drehmatrix und Umrechnen der antisymmetrischen Matrix $(d_t \hat{D})\hat{D}^{-1}$ in die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit ergibt schließlich

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \omega' = \hat{D}^{-1} \omega = \hat{D}_2^{-1}(\vartheta) \omega = \omega \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ 0 \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \text{const.} \quad (1.6.57)$$

Leiten wir schließlich (1.6.56) nochmals nach der Zeit ab, erhalten wir für die Komponenten der Beschleunigung

$$\ddot{x} = \hat{D} [\ddot{x}' + 2\omega' \times \dot{x}' + \omega' \times (\omega' \times x')]. \quad (1.6.58)$$

Der Beobachter auf der Erde wird nun seinen Standpunkt zum Ursprung seines Koordinatensystems wählen, d.h. wir schreiben

$$x = x_0 + r, \quad (1.6.59)$$

wobei x_0 der Ortsvektor des erdfesten Beobachterstandpunkts bzgl. des Erdmittelpunkts (also des Ursprungs des raumfesten Bezugssystems) ist (vgl. 1.13). Offenbar gilt $x'_0 = \text{const}$, weil es sich ja um einen erdfesten Ortsvektor handelt. Folglich ist

$$\ddot{x} = \hat{D} [\ddot{r}' + 2\omega' \times \dot{r}' + \omega' \times (\omega' \times r') + \omega' \times (\omega' \times x'_0)]. \quad (1.6.60)$$

In Erdnähe beschreibt der Beobachter die auf den Massepunkt wirkende Kraft durch $F' = -mg(0, 0, 1)^t := -mg'$. Der Beobachter bezieht in diese Kraft jedoch auch den konstanten Anteil der Trägheitskraft, d.h. die Zentrifugalkraft

$$F'_0 = m\omega \times (\omega \times x'_0) \quad (1.6.61)$$

auf einen in seinem Standpunkt ruhenden Körper mit ein, d.h. die Bewegungsgleichung für unseren frei fallenden Körper lautet, vom erdfesten Beobachter aus betrachtet:

$$m [\ddot{r}' + 2\omega' \times \dot{r}' + \omega' \times (\omega' \times r')] = -mg. \quad (1.6.62)$$

Bringt man die Bewegungsgleichung auf die Form

$$m\ddot{r}' = -mg - m [2\omega' \times \dot{r}' + \omega' \times (\omega' \times r')], \quad (1.6.63)$$

kann man die Terme, die aufgrund der nichtinertialen Natur des rotierenden Bezugssystems auftreten, als **Trägheitskräfte** interpretieren. Diese setzen sich aus der **Coriolis-Kraft** $2\omega' \times \dot{r}'$ und der **Zentrifugalkraft** $\omega' \times (\omega' \times r')$ zusammen.

Da nun weiter $\omega \ll 1/\Delta t$, wobei $\Delta t \simeq 1$ sec die Fallzeit des betrachteten Körpers bezeichnen soll, können wir die Zentrifugalkraft $\propto r\omega^2 \ll g$ vernachlässigen.

Nach Komponenten aufgespaltet lautet die so vereinfachte Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r'^1}{dt^2} &= 2\omega \frac{dr'^2}{dt} \cos \vartheta, \\ \frac{d^2 r'^2}{dt^2} &= -2\omega \left(\frac{dr'^1}{dt} \cos \vartheta + \frac{dr'^3}{dt} \sin \vartheta \right), \\ \frac{d^2 r'^3}{dt^2} &= 2\omega \frac{dr'^2}{dt} \sin \vartheta - g. \end{aligned} \quad (1.6.64)$$

1.6. Die volle Galileigruppe

Als Anfangsbedingungen ($t = 0$) wählen wir, daß der Massepunkt aus der Höhe h mit der Geschwindigkeit 0 losgelassen wird. Ferner schreiben wir $\dot{r}'^1 = dr'^1/dt$ usw.

$$r'^1(0) = r'^2(0) = 0, \quad r'^3(0) = h, \quad \dot{r}'^1(0) = \dot{r}'^2(0) = \dot{r}'^3(0) = 0. \quad (1.6.65)$$

Integration der ersten und dritten der Bewegungsgleichungen (1.6.64) ergibt unter Berücksichtigung dieser Anfangsbedingungen

$$\dot{r}'^1 = 2\omega r'^2 \cos \vartheta, \quad \dot{r}'^3 = 2\omega r'^2 \sin \vartheta - gt. \quad (1.6.66)$$

Setzen wir dieses Resultat in die zweite Bewegungsgleichung ein, ergibt sich

$$\ddot{r}'^2 + 4\omega^2 r'^2 = 2\omega g t \sin \vartheta. \quad (1.6.67)$$

Dies ist eine inhomogene Schwingungsgleichung, deren allgemeine Lösung die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$$\ddot{r}'^2_H + 4\omega^2 r'^2_H = 0 \quad (1.6.68)$$

ist, die in reeller Form durch

$$r'^2_H(t) = C_1 \cos(2\omega t) + C_2 \sin(2\omega t) \quad (1.6.69)$$

gegeben ist, und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Der Ansatz $y'_I = Ct$ ergibt schließlich eine solche Lösung der inhomogenen Gleichung zu

$$r'^2_I(t) = \frac{gt \sin \vartheta}{2\omega}. \quad (1.6.70)$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 werden schließlich vermöge der Anfangsbedingungen (1.6.65) bestimmt, und die Lösung für r'^2 lautet schließlich:

$$r'^2(t) = \frac{gt \sin \vartheta}{2\omega} - \frac{g \sin \vartheta}{4\omega^2} \sin(2\omega t). \quad (1.6.71)$$

Einsetzen in (1.6.66) erfordert nur noch eine Integration unter Berücksichtigung von (1.6.65), um zum gesuchten Resultat zu gelangen:

$$\begin{aligned} r'^1(t) &= g \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{\cos(2\omega t) - 1}{4\omega^2} + \frac{t^2}{2} \right), \\ r'^3(t) &= g \sin^2 \vartheta \left(\frac{\cos(2\omega t) - 1}{4\omega^2} + \frac{t^2}{2} \right) - \frac{g}{2} t^2 + h. \end{aligned} \quad (1.6.72)$$

Im Gegensatz zum freien Fall in einem Inertialsystem, die einfach eine beschleunigte Bewegung mit der Fallbeschleunigung g in z -Richtung ergeben hätte, ist auf der rotierenden Erde sowohl eine **Ostabweichung** als auch eine **Südabweichung** feststellbar. Durch Taylorentwicklung bis zu Gliedern der Ordnung ω^2 , erhält man

$$\begin{aligned} r'^1(t) &= \frac{g}{6} \cos \vartheta \sin \vartheta \omega^2 t^4 + O(\omega^4), \\ r'^2(t) &= \frac{g}{3} \sin \vartheta \omega t^3 + O(\omega^3), \\ r'^3(t) &= h - \frac{g}{2} t^2 + \frac{g}{6} \sin^2 \vartheta \omega^2 t^4 + O(\omega^4). \end{aligned} \quad (1.6.73)$$

Ein historisch wichtiges Experiment für den direkten Nachweis der Erddrehung, das ebenfalls auf Inertialeffekten beruht, ist der **Foucaultsche Pendelversuch**, den wir im folgenden Kapitel behandeln werden, wenn uns der mächtige mathematische Apparat der kanonischen Mechanik zur Verfügung steht.

Kapitel 2

Kanonische Mechanik

Die Grundlagen der Mechanik sind nunmehr formuliert, und im Prinzip ist alles gesagt, was es zur Newtonschen Mechanik zu sagen gibt. Allerdings hat sich herausgestellt, daß die im folgenden dargestellte mathematische Ausformulierung der Theorie in Form von Extremalprinzipien nicht nur eine mathematisch elegantere Beschreibung von konkreten Problemen und eine systematische Bewältigung des Integrationsproblems für Bewegungsgleichungen darstellt, sondern auch unverzichtbar für das Verständnis der Quantentheorie ist.

Wir nähern uns der Theorie zunächst von der Fragestellung her, wie wir auf einfache Weise die Bewegungsgleichungen in beliebigen Koordinaten formulieren können. Bisher waren wir auf kartesische Koordinaten angewiesen, die ja auch in gewisser Hinsicht die natürliche Beschreibungsweise für die Mechanik von Punktsystemen darstellt, ist doch der Raum ein euklidischer affiner Punktraum. Andererseits gibt es Probleme, die aufgrund ihrer Symmetrie besser durch ihnen angepaßte Koordinaten gelöst werden können. Wir suchen also nach einer Formulierung der Mechanik, die es uns ermöglicht, beliebige Koordinaten q^k mit $k = 1 \dots f$ einzuführen. Die Zahl der Freiheitsgrade f des Systems muß auch nicht $3N$ betragen, können doch die Massepunkte durch bestimmte Zwangsbedingungen eingeschränkt sein, etwa beim mathematischen Pendel auf eine Kreisbahn oder beim Fadenpendel auf die Oberfläche einer Kugel.

2.1 Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Bis jetzt haben wir aber nur eine Formulierung der Mechanik in kartesischen Koordinaten eines Inertialsystems zur Verfügung, so daß wir die Transformation in kartesische Koordinaten

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q^1, \dots, q^f), \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.1.1)$$

betrachten müssen, um zu den in den **generalisierten Koordinaten** ausgedrückten Bewegungsgleichungen zu gelangen.

Zunächst gilt aufgrund der Kettenregel für jeden der Vektoren \mathbf{x}_i

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{q}^k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^k}, \quad (2.1.2)$$

wobei hier und im folgenden stets die Einsteinsche Summationskonvention zur Anwendung kommen soll. Dabei laufen die Indizes der generalisierten Koordinaten stets von 1 bis f . Jetzt ist es für die gesamte Mechanik nützlich, die Variablen \dot{q}^k als freie Variablen betrachten zu können. Wir denken uns also

2.1. Die Euler-Lagrange-Gleichungen

unsere Ausdrücke im folgenden zunächst als Funktionen der unabhängigen Variablen q^k und \dot{q}^k , und erst wenn wir totale Zeitableitungen d/dt bilden, lesen wir wieder $\dot{q}^k = dq^k/dt$. Dann folgt aus (2.1.1) die wichtige Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q^k}, \quad (2.1.3)$$

weil die Transformation (2.1.1) nur von den q^k , nicht aber von den \dot{q}^k abhängt.

Weiter gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^j = \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{\partial x}{\partial q^j} \dot{q}^j \right) = \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{dx}{dt}. \quad (2.1.4)$$

Mit diesen Beziehungen wenden wir uns nun der Newtonschen Grundgleichung für den Massepunkt zu

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F, \quad (2.1.5)$$

wobei F die Komponenten der gesamten auf den Massepunkt einwirkende Kraft ist, die sich aus der Wechselwirkung mit den übrigen Massepunkten und evtl. äußeren Kraftfeldern zusammensetzt.

Wir multiplizieren die Newtonsche Bewegungsgleichung mit $\partial x_i / \partial q^k$ und summieren über die Massepunkte:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^k} = \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial x_i}{\partial q^k} := Q_k. \quad (2.1.6)$$

Dabei bezeichnet man die Q_k als **generalisierte Kräfte**.

Für jeden Massepunkt gilt nun vermöge (2.1.3) und (2.1.4):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q^k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial q^k} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \frac{dx}{dt}. \quad (2.1.7)$$

Dies in (2.1.6) eingesetzt ergibt für die linke Seite:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q^k} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q^k} \right) - \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \frac{dx_i}{dt} \right]. \quad (2.1.8)$$

Die beiden Summanden lassen sich nun in der folgenden Weise umformen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q^k} \right) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2, \\ \sum_{i=1}^N m_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial}{\partial q^k} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Definieren wir nun die Funktion

$$T(q^k, \dot{q}^k) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2, \quad (2.1.10)$$

die **kinetische Energie** genannt wird, können wir aufgrund der obigen Umformungen für (2.1.5) schreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} = Q_k. \quad (2.1.11)$$

2. Kanonische Mechanik

Das ist ein Satz von f Differentialgleichungen 2. Ordnung für den Satz der f generalisierten Koordinaten q^k .

Diese Gleichungen lassen sich noch wesentlich einfacher formulieren, wenn die Kräfte auf jeden Massenpunkt ein Potential besitzen, d.h. wenn eine skalare Funktion $V(t, \mathbf{x}_i)$ existiert, so daß

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i}. \quad (2.1.12)$$

gilt. Aus der Vektoranalysis ist bekannt, daß dies lokal immer dann möglich ist, wenn in einer sternförmigen Umgebung um einen Punkt im N -Teilchenraum gilt

$$\nabla_i \times \mathbf{F} = \text{rot}_i \mathbf{F} = 0 \text{ für } i = 1 \dots N. \quad (2.1.13)$$

Nehmen wir also an, daß die Kräfte diese Bedingung erfüllen, läßt sich auch die rechte Seite der Gleichung (2.1.6) als Ableitung nach den q^k ausdrücken:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \nabla_i V = -\frac{\partial V}{\partial q^k}. \quad (2.1.14)$$

Definieren wir nunmehr die **Lagrangefunktion** durch

$$L(t, q^k, \dot{q}^k) = T - V \quad (2.1.15)$$

so schreibt sich die Newtonsche Bewegungsgleichung schließlich in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0. \quad (2.1.16)$$

Die Bewegung ist damit vollständig durch den Skalar L charakterisiert. Die Gleichungen (2.1.16) heißen **Euler-Lagrange-Gleichungen**.

Zur Integration der Bewegungsgleichungen leisten sie insofern gute Dienste als sie die Einführung beliebiger generalisierter Koordinaten gestatten, ohne daß sich ihre Form ändert. Dies ergibt sich unmittelbar aus unserer Herleitung. Wie wir im folgenden aber sehen werden, ergeben sich noch wesentlich wichtigere analytische Folgerungen aus ihnen. Sie gestatten insbesondere die elegante Behandlung von Symmetrien eines Problems und damit eine Möglichkeit, bereits durch die dem Problem angepaßte Wahl generalisierter Variabler die Integration der Bewegungsgleichungen bedeutend zu erleichtern.

Als wichtige Folgerung aus (2.1.16) können wir jedoch schon jetzt den einfachen Schluß ziehen, daß eine generalisierte Koordinate q^k dann besonders einfacher Gleichungen genügt, wenn die Lagrangefunktion von ihr unabhängig ist. Die Koordinate geht dann nur in dem oben genau auseinandergesetzten Sinne durch \dot{q}^k in die Lagrangefunktion ein. Für diese Koordinate sagt dann (2.1.16) nämlich

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \Rightarrow p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \text{const.} \quad (2.1.17)$$

Das bedeutet, daß in diesem Falle der sog. **generalisierte Impuls** p_k eine **Erhaltungsgröße** entlang der Trajektorie $q^j(t)$ des Systems ist. Eine solche generalisierte Koordinate heißt **zyklisch**. Diese Namensgebung werden wir aber erst später genauer begründen, wenn wir kompliziertere mathematische Methoden entwickelt haben werden. Es ist also erstrebenswert, solche generalisierte Koordinaten zu wählen, daß möglichst viele von ihnen zyklisch sind. Hängt die Lagrangefunktion eines Systems aber

2.1. Die Euler-Lagrange-Gleichungen

von einer generalisierten Koordinate nicht ab, ist dies Ausdruck einer Symmetrie dieses Systems. Wir werden weiter unten den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen noch systematisch untersuchen.

Wir wenden uns nun der Zeit zu, die ja keine generalisierte Koordinate ist, sondern der Parametrisierung der Trajektorien dient. Betrachten wir die Zeitableitung der Lagrangefunktion entlang einer beliebigen Bahn, die nicht unbedingt Lösung der Bewegungsgleichung sein muß, so haben wir die Zeitabhängigkeit der Lagrangefunktion, die durch die Zeitabhängigkeit der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten und eventuell eine explizite Zeitabhängigkeit zu berücksichtigen. Das bedeutet nach der Kettenregel

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \ddot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.1.18)$$

Für die Trajektorie des Systems gelten die Euler-Lagrange-Gleichungen, so daß wir für sie schreiben können

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \ddot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.1.19)$$

Ist nun L nicht explizit zeitabhängig, d.h. verschwindet die explizite Zeitableitung auf der rechten Seite der vorigen Gleichung, ergibt sich sogleich, daß die Größe

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L \quad (2.1.20)$$

eine Erhaltungsgröße entlang der Trajektorie des Systems ist. Diese Erhaltungsgröße heißt **Energie** des Systems. Falls L homogen von zweitem Grade in den \dot{q}^k ist, wie es für die Newtonsche Mechanik der Fall ist, so gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V. \quad (2.1.21)$$

Daher heißt das Potential der Kraft V in diesem Zusammenhang auch die **potentielle Energie** und T **Translations- oder kinetische Energie**.

2.1.1 Beispiel: Freier Fall im homogenen Schwerfeld

An diesem sehr einfachen Beispiel wollen wir die Bedeutung der obigen Entwicklungen aufzeigen, wie wir die unmittelbar geometrisch einleuchtende Symmetrie durch Wahl geeigneter Koordinaten ausnutzen können.

Klar ist, daß sich in diesem Fall kartesische Koordinaten anbieten, wobei durch das homogene Schwerfeld eine Richtung ausgezeichnet ist. Das Problem ist komplett symmetrisch in der Ebene senkrecht zur Richtung des Schwerfeldes. Die kartesischen Koordinaten bieten weiter den Vorteil, daß T nicht von den generalisierten Koordinaten abhängt. Es erscheint also sinnvoll, das Koordinatensystem so zu legen, daß das Schwerfeld in z -Richtung verläuft $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. Mit anderen Worten wird durch das homogene Kraftfeld die volle Symmetrie des euklidischen Raumes durch Auszeichnung einer Vorzugsrichtung gebrochen, und es ist sinnvoll, in dieser Vorzugsrichtung einen Basisvektor \mathbf{e}_z des Koordinatensystems zu legen, weil dann zu erwarten ist, daß die Lagrangefunktion nicht von den beiden anderen Koordinaten abhängen wird. Stellen wir also die Lagrangefunktion in dieser Parametrisierung des Problems auf. Gemäß (2.1.10) und (2.1.12) gilt:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \mathbf{F} = -\nabla V = -mg\mathbf{e}_z \Rightarrow V = mgz. \quad (2.1.22)$$

2. Kanonische Mechanik

Damit folgt

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (2.1.23)$$

Wie wir wegen der Symmetrie des Problems bereits erwartet haben, sind x und y zyklische Koordinaten, und das bedeutet gemäß (2.1.17), daß die dazugehörigen generalisierten Impulse

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{const}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{const} \quad (2.1.24)$$

Konstanten der Bewegung sind. Damit sind aber die Gleichungen für x und y unmittelbar integrierbar:

$$x(t) = \frac{p_x}{m}t + x_0, \quad y(t) = \frac{p_y}{m}t + y_0. \quad (2.1.25)$$

Weiter wissen wir aus (2.1.20) und (2.1.21), daß auch die Energie eine Erhaltungsgröße ist, weil die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt. Folglich ist also

$$H = p_k \dot{q}^k - L = T + V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = E = \text{const}. \quad (2.1.26)$$

Ersetzen wir \dot{x} und \dot{y} durch die Konstanten p_x und p_y , läßt sich auch die Gleichung für z unmittelbar integrieren:

$$z = -\frac{g}{2}(t - c)^2 + \frac{1}{mg} \left[E - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} \right]. \quad (2.1.27)$$

Die Lösung enthält entsprechend den Anfangsbedingungen, die festzulegen sind, 6 Integrationskonstanten. Davon sind p_x , p_y und E die Erhaltungsgrößen (1. Integrale der Bewegung) aus der Symmetrie der Lagrangefunktion und x_0 , y_0 und c die bei der Lösung der verbleibenden Differentialgleichungen 1. Ordnung anfallenden Integrationskonstanten.

Es ist klar, daß in diesem einfachen Fall die unmittelbare Integration der Newtonschen Bewegungsgleichung $m d_t^2 x = -mg e_z$ viel schneller zu dem gleichen Resultat geführt hätte. Das trifft aber nicht mehr zu, wenn man es mit komplizierteren Bewegungen zu tun hat, bei denen die Einführung nichtkartesischer Koordinaten vorteilhaft sein kann.

2.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Im folgenden wollen wir die Lagrangegleichung von einem höheren Standpunkt aus beleuchten, der im folgenden große analytische Vorzüge gegenüber dem direkten Studium der Bewegungsgleichungen bietet. Wir können nämlich die Bewegungsgleichungen auch als Extremalprinzip formulieren.

Dazu betrachten wir zunächst einmal die einfachste Grundaufgabe der Variationsrechnung. Es sei mit $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ der Raum der mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Es ist klar, daß die Bahnkurven der Newtonschen Mechanik als Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genau in diese Klasse fallen, zumindest dann, wenn die Bahn fern von Stellen bleibt, an denen die Kräfte ggf. singularär werden.

Sei nun weiter durch die Abbildung

$$I : C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} : \quad I[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt F[\phi(t), \dot{\phi}(t), t] \quad \text{mit } F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2.1)$$

2.2. Das Hamiltonsche Prinzip

das Funktional I gegeben, wobei F eine wenigstens zweimal stetig nach ihren unabhängigen Veränderlichen differenzierbare Funktion sein soll. Wir fragen nun, welche Trajektorie ϕ durch fest gegebene Punkte $y_1 = \phi(t_1)$ und $y_2 = \phi(t_2)$ dieses Funktional extremal macht. Dazu variieren wir die Trajektorie ϕ um $\delta\phi(t) = \lambda\eta(t)$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\eta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ beliebig mit $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ ist. Damit ϕ eine extremale Bahn bei den gegebenen Randbedingungen sein kann, muß notwendig für alle diese „erlaubten“ η gelten:

$$\frac{d}{d\lambda} I[\phi + \lambda\eta]_{\lambda=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial F}{\partial \phi^k} \eta^k + \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}^k} \dot{\eta}^k \right] = 0. \quad (2.2.2)$$

gelten.

Durch partielle Integration des zweiten Summanden unter Ausnutzung der Randbedingungen $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ erhalten wir

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial F}{\partial \phi^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}^k} \right] \eta_k = 0. \quad (2.2.3)$$

Da die η_k völlig unabhängig voneinander sind, können wir alle bis auf eines (etwa η_1) zu 0 machen. Das heißt es muß gelten

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial F}{\partial \phi^1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}^1} \right] \eta_1 = 0. \quad (2.2.4)$$

Nun benötigen wir den folgenden Satz:

Satz 1 (Fundamentallemma der Variationsrechnung) Sei f eine stetige Funktion $f : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt dann für jede beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t_1) = g(t_2) = 0$

$$\forall C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \int_{t_1}^{t_2} dt f(t)g(t) = 0, \quad (2.2.5)$$

so gilt $f(t) = 0$ für alle $t \in (t_1, t_2)$.

Beweis:

Als ersten Schritt beweisen wir, daß die Funktion

$$m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : m(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

eine überall beliebig oft stetig differenzierbare Funktion ist. Sie erfüllt dies mit Sicherheit in den offenen Mengen $(-1, 1)$, $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$. An den Stellen $x = \pm 1$ besitzt die für das Intervall $(-1, 1)$ zur Definition benutzte Funktion Ableitungen, die das Produkt einer rationalen Funktion mit Polen bei $x = \pm 1$ multipliziert mit dem Differentialausdruck darstellen. Der Exponentialausdruck konvergiert allerdings für $x \rightarrow \pm 1$ stärker gegen 0 als jedes Polynom, so daß der Grenzwert jeweils 0 ergibt. Damit sind aber alle Ableitungen von m wie m selbst stetig bei $x = \pm 1$.

Zum Beweis des Satzes nehmen wir nun an, es gäbe eine Stelle $t_0 \in (t_1, t_2)$ mit $f(t_0) \neq 0$. Da f nach Voraussetzung stetig ist, existiert eine Umgebung $U_a(t_0) = [t - a, t + a] \cap (t_1, t_2)$, in der f beständig dasselbe Vorzeichen besitzt wie an der Stelle t_0 .

Die Funktion

$$\mu(t) = m\left(\frac{t - t_0}{a}\right) \quad (2.2.7)$$

2. Kanonische Mechanik

ist nun in der besagten Umgebung $U_a(t_0)$ positiv und beliebig oft differenzierbar. Im Widerspruch zur Voraussetzung gilt also offenbar

$$\int_{t_1}^{t_2} dt f(t) \mu(t) = \int_{U_a(t_0)} dt f(t) \mu(t) \neq 0, \quad (2.2.8)$$

denn der Integrand besitzt im Integrationsbereich gemäß unserer Konstruktion beständig dasselbe Vorzeichen und ist nicht beständig 0. Da aber das Integral nach Voraussetzung verschwindet, muß die Annahme, daß für irgendein $t_0 \in (t_1, t_2)$ gilt $f(t_0) \neq 0$, falsch sein, also ist $f \equiv 0$ in (t_1, t_2) . q.e.d.

Wenden wir das Lemma nun auf unsere Forderung (2.2.4) an. Demnach muß die Klammer des Integranden in $[t_1, t_2]$ identisch verschwinden, da η_1 willkürlich aus $C^2 \supseteq C^\infty$ gewählt werden kann. Damit folgt aber, daß die das Funktional I extremierende Funktion ϕ^k notwendig die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \phi^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}^k} = 0 \quad (2.2.9)$$

erfüllen muß. Das sind die **Eulerschen Gleichungen der Variationsrechnung**.

Sie stimmen nun genau mit den Euler-Lagrange-Gleichungen der Mechanik überein. Wir gelangen damit zu einer Beschreibung der Trajektorien eines mechanischen Systems als Extremalprinzip, dem **Hamiltonschen Prinzip**:

Ein dynamisches System sei mit f unabhängigen generalisierten Koordinaten q^k formuliert, und es existiere eine im obigen Sinne erklärte Lagrange-Funktion $L = T - V$. Dann verläuft die tatsächliche Bewegung so, daß das **Wirkungsfunktional**

$$I[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L[q(t), \dot{q}(t), t] \quad (2.2.10)$$

unter den Nebenbedingungen

$$q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2 \quad (2.2.11)$$

extremal wird.

2.3 Zwangsbedingungen

Die soeben gegebene Formulierung der Mechanik als Extremalprinzip erlaubt die einfache Erweiterung der behandelten dynamischen Systeme auf sogenannte **erzwungene Bewegungen**. Diese Erweiterung gibt aber weitere Erkenntnisse hinsichtlich der formalen Struktur der Mechanik. Durch Einführung generalisierter Koordinaten für ein mechanisches System von n Massepunkten, deren Bewegung auf eine in \mathbb{R}^{3n} eingebettete differenzierbare f -dimensionale Mannigfaltigkeit eingeschränkt wird, haben wir nämlich nichts anderes als eine Karte dieser f -dimensionalen Mannigfaltigkeit definiert. Wir können uns z.B. vorstellen, daß die Bewegung eines Massepunktes auf eine Kugeloberfläche eingeschränkt wird, etwa indem er an einer (masselos gedachten) starren Stange befestigt wird, die in einem Kugellager aufgehängt frei um einen Punkt rotieren kann. In diesem Falle ist die Untermannigfaltigkeit eine Kugelfläche, also $f = 2$.

Wir wenden uns nun der formalen Behandlung solcher Bewegungen im Rahmen des Hamiltonschen Prinzips zu. Dabei nehmen wir an, daß die Mannigfaltigkeit des Systems nicht allein durch eine Karte, also die Einführung generalisierter Koordinaten, sondern auch durch Zwangsbedingungen der Form

$$\sum_{k=1}^f f_k^{(i)}(q, t) dq^k = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad r < f \quad (2.3.1)$$

2.3. Zwangsbedingungen

bestimmt wird.

Dabei sind dq^k die sog. Koordinatendifferentiale. Auf eine mathematisch einwandfreie Definition dieses Begriffs gehen wir in Anhang A näher ein. Ein Spezialfall liegt vor, wenn es eine Funktion $\Phi^{(i)} : \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$f_k^{(i)}(q, t) = \frac{\partial \Phi^{(i)}(q, t)}{\partial q^k} \quad (2.3.2)$$

gilt. In diesem Falle nennen wir die Zwangsbedingungen **holonom**, andernfalls **anholonom**. Die Mannigfaltigkeit wird dann einfach durch die Forderungen $\Phi^{(i)}(q, t) = \text{const}$ eingeschränkt. Wie wir sehen werden, stellen anholonome Zwangsbedingungen für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips keine größeren Probleme dar als solche mit holonomen Bedingungen. Eine weitere Klassifikation der Zwangsbedingungen ergibt sich, je nach dem, ob die $f_k^{(i)}$ explizit zeitabhängig sind oder nicht. Im letzteren Falle heißen sie **skleronom**, andernfalls **rheonom**.

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichung spielt all dies aber keine besondere Rolle. Betrachten wir nun noch einmal unsere Herleitung der Eulerschen Gleichung aus der Variationsrechnung. Wir hatten für das Wirkungsfunktional die Bedingung

$$\delta I := \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right] \delta q^k \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.3.3)$$

gewonnen. Hierbei bezeichnen wir die früheren Funktionen η_k suggestiv mit δq^k . Wir konnten aber dann aufgrund des Fundamentallemmas der Variationsrechnung auf das Verschwinden der Klammer für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$, also die Euler-Lagrange-Gleichungen, nur deshalb schließen, weil die δq^k voneinander unabhängig waren.

Voraussetzungsgemäß gelten aber die r Zwangsbedingungen (2.3.1). Wir haben ein Extremwertproblem mit Nebenbedingungen vor uns. Dies lösen wir dadurch, daß wir jede der Zwangsbedingungen (2.3.1) mit einem Lagrangeparameter λ_i multiplizieren und zu der Variation der Wirkung im Hamiltonschen Prinzip addieren. Es gilt dann vermöge (2.3.1) und der Stationaritätsbedingung für das Wirkungsfunktional:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} - \sum_{i=1}^r \lambda_i f_k^{(i)} \right] \delta q^k dt = 0. \quad (2.3.4)$$

Wir können uns nun die ersten $f - r$ Koordinaten als unabhängige Koordinaten vorstellen; die übrigen sind dann durch die Zwangsbedingungen festgelegt. Vermöge unserer Lagrangeparameter brauchen wir aber nicht die explizite Auflösung der letzteren nach den ersten $f - r$ Koordinaten durchzuführen, denn diese bieten die Freiheit, die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} - \sum_{i=1}^r \lambda_i f_k^{(i)} = 0 \text{ für } k = f - r + 1, \dots, f \quad (2.3.5)$$

zu verlangen. Dann folgt aus der Unabhängigkeit der δq^k für $k = 1, \dots, f - r$ das Verschwinden desselben Ausdrucks auch für die übrigen Koordinaten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} - \sum_{i=1}^r \lambda_i f_k^{(i)} = 0 \text{ für } k = 1, \dots, f - r. \quad (2.3.6)$$

Fassen wir das Ergebnis zusammen, stellen wir fest: Es sind f Bedingungsgleichungen (2.3.5-2.3.6) zu erfüllen sowie r Lagrangeparameter¹ zu bestimmen. Neben den Bewegungsgleichungen (2.3.5-2.3.6)

¹Die hier i.a. Funktionen von q und t sind!

2. Kanonische Mechanik

stehen dazu noch die r Zwangsbedingungen in der Form

$$f_k^{(i)} \dot{q}^k = 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.3.7)$$

zur Verfügung.

Falls die Zwangsbedingungen holonom sind, d.h. Funktionen $\Phi^{(i)}(q, t)$ existieren, so daß (2.3.2) gilt, wir (2.3.5, 2.3.6) zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} - \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial}{\partial q^k} \Phi^{(i)}(q, t) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, f. \quad (2.3.8)$$

Da die Zwangsbedingungen dann in der Form

$$\Phi^{(i)}(q, t) = 0 \quad (2.3.9)$$

formuliert werden können, können wir offenbar eine neue Lagrangefunktion

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, \lambda) = L + \sum_{i=1}^r \lambda_i \Phi^{(i)}(q, t). \quad (2.3.10)$$

Betrachten wir dann das Problem, die Wirkung stationär für beliebige voneinander unabhängigen Variationen δq und $\delta \lambda$ zu machen, wobei die δq an den Grenzen t_1 und t_2 des Wirkungsintegrals verschwinden, ergeben die Euler-Lagrange-Gleichungen offensichtlich gerade (2.3.5), (2.3.6) und (2.3.9). Das bedeutet, daß in diesem Falle das Hamiltonsche Variationsproblem mit Nebenbedingungen durch ein gewöhnliches Variationsproblem ohne Nebenbedingungen mit der Lagrangefunktion (2.3.10) mit zusätzlichen generalisierten Koordinaten λ formuliert werden kann.

Ein Blick auf die Bewegungsgleichungen (2.3.5-2.3.6), die in der Literatur als **Lagrangegleichungen 1. Art** bezeichnet werden, und der Vergleich mit (2.1.11) zeigt, daß die Lagrangeparameter den Zwangsbedingungen durch Zusatzterme generalisierter Kräfte, die i.a. auch von den \dot{q} abhängen werden, Rechnung trägt. Dies ist unmittelbar physikalisch begrifflich, erfordert doch die Aufprägung eines Zwangs auf das mechanische System wirkende Kräfte (technisch wichtig z.B. bei Lagerkräften), die daher auch **Zwangskräfte** genannt werden.

2.3.1 Beispiel: Schiefe Ebene

Wir wollen wieder auf das Beispiel eines Massepunktes im homogenen Schwerfeld der Erde zurückkommen. Diesmal soll aber der Massepunkt reibungsfrei auf einer Ebene gleiten. Wir legen den Koordinatenursprung eines kartesischen Koordinatensystems in diese Ebene, die dann durch die Zwangsbedingung

$$n x = 0 \Rightarrow n_l \delta x_l = 0 \quad (2.3.11)$$

beschrieben wird. Hierbei ist n der (willkürlich auf 1 normierte) konstante Ebenennormalenvektor. Wir haben es also hier mit einer skleronomen und holonomen Zwangsbedingung (also $r = 1$) zu tun. Legen wir die z -Achse des Koordinatensystems wieder senkrecht nach oben (also $g = -g e_z$), lautet die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - m g z, \quad (2.3.12)$$

und die Lagrangegleichungen 1. Art ergeben sich mit dem Lagrangeparameter λ zu

$$m \ddot{x} - n_1 \lambda = 0, \quad m \ddot{y} - n_2 \lambda = 0, \quad m \ddot{z} + m g - n_3 \lambda = 0. \quad (2.3.13)$$

2.3. Zwangsbedingungen

Wegen der Drehinvarianz des Problems können wir durch Drehung des Koordinatensystems um die z-Richtung o.B.d.A. stets erreichen, daß $n_2 = 0$ ist. Dann lautet die Zwangsbedingung, die wir zu berücksichtigen haben, also:

$$n_1 \dot{x} + n_2 \dot{z} = 0. \quad (2.3.14)$$

Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden. Sei zuerst $n_1 \neq 0$. Dann folgt aus der ersten Bewegungsgleichung

$$\lambda = \frac{m}{n_1} \ddot{x}. \quad (2.3.15)$$

Wegen $n_2 = 0$ ist die zweite unmittelbar integrierbar:

$$y = c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.} \quad (2.3.16)$$

Setzt man den Ausdruck für λ in die zweite Gleichung ein, folgt unmittelbar

$$\dot{z} = -g t + \frac{n_3}{n_1} \dot{x} + c_3, \quad c_3 = 0. \quad (2.3.17)$$

Schließlich erhalten wir x aus der Zwangsbedingung

$$x = -\frac{n_3}{n_1} z = n_1 n_3 \left[\frac{g}{2} t^2 - c_3 t \right] - \frac{n_3}{n_1} c_4. \quad (2.3.18)$$

Wir sehen, daß die Bewegung eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung in der Ebene ist:

$$\mathbf{a}(t) = d_t^2 \mathbf{x}(t) = g n_1 (n_3, 0, -n_1). \quad (2.3.19)$$

Die Beschleunigung liegt also in der Ebene und hat den Betrag $g n_1$, was geometrisch aus der Skizze unmittelbar verständlich ist. Diese Kraft heißt aus naheliegenden Gründen die **Hangabtriebskraft**. Die Ebene nimmt die Zwangskraft λn , die **Normalkraft** auf. Es folgt

$$\lambda = \frac{m}{n_1} \ddot{x} = m n_3 g. \quad (2.3.20)$$

Die Gesamtkraft ist, wie es sein muß,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{dyn}} - \mathbf{F}_Z = m d_t^2 \mathbf{x} - \lambda \mathbf{n} = -m g \mathbf{e}_z. \quad (2.3.21)$$

Der andere Fall $n_1 = 0$ ist unmittelbar einsichtig und wird auch durch die formale Rechnung ohne Schwierigkeiten bestätigt: Die Ebene kompensiert die gesamte Gewichtskraft, und der Massepunkt bewegt sich innerhalb der Ebene folglich kräftefrei.

2.3.2 Das Foucault-Pendel

Wir betrachten nun die Bewegung eines Pendels, das irgendwo auf der rotierenden Erde aufgehängt sei. Wie wir sehen werden, ist hier die Behandlung in kartesischen Koordinaten im erdfesten Bezugssystem unter Verwendung der holonomen Randbedingung, daß der Abstand zwischen Pendelkörper und Aufhängepunkt konstant sein muß, besonders einfach.

Wir beginnen mit der Bemerkung, daß man die Bewegungsgleichungen (1.6.63) aus dem Hamiltonschen Wirkungsprinzip mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} [\dot{\mathbf{r}}'^2 + 2\dot{\mathbf{r}}'(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}')] - m g r'^3 \quad (2.3.22)$$

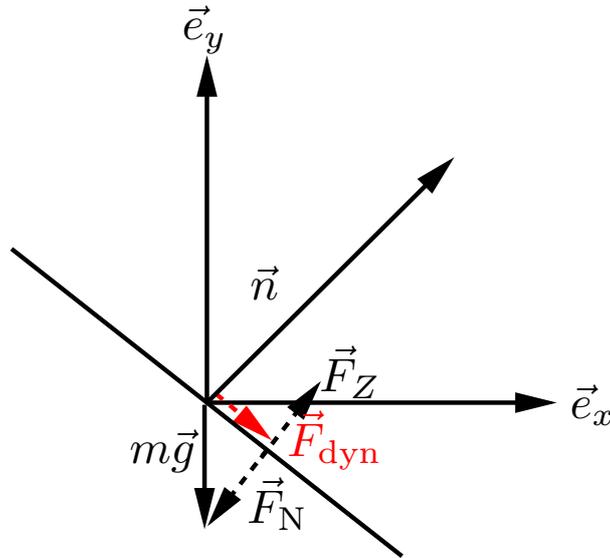


Abbildung 2.1: Die Kräfteverhältnisse an der schiefen Ebene: Die Gravitationskraft setzt sich aus der Hangabtriebskraft, die die dynamisch wirksame Kraft F_{dyn} darstellt, und der durch die von der Ebene auf den Massenpunkt ausgeübte Zwangskraft F_Z zu kompensierende Normalkraft F_N , der Normalkraft, zusammen.

erhält. Das weist man unmittelbar durch Aufstellen der Bewegungsgleichungen mittels der Euler-Lagrange-Gleichungen nach. Systematisch lässt sich (2.3.22) herleiten, indem man von (1.6.55) ausgehend die kinetische Energie durch erdfeste Koordinaten ausdrückt und dann die in Abschnitt 1.6.6 durchgeführten Näherungen vornimmt.

Wir setzen den Aufhängepunkt des Pendels bei $r'_0 = (0, 0, l)^t$ an, wobei L die Pendellänge bezeichnet. Die Koordinaten des Massepunktes schreiben wir dann als

$$r' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ l - \zeta \end{pmatrix}. \quad (2.3.23)$$

Die Zwangsbedingung können wir dann in der Form

$$\Phi = \frac{m}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - l^2) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.3.24)$$

schreiben. Da wir es hier mit holonomen Zwängen zu tun haben, können wir das Problem auf eine gewöhnliche Hamiltonsche Variationsaufgabe mit der modifizierten Lagrangefunktion (2.3.10)

$$\tilde{L} = L + \lambda\Phi(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.3.25)$$

zurückführen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für die neuen generalisierten Koordinaten $(\xi, \eta, \zeta, \lambda)$ lauten

$$\ddot{\xi} = 2\omega\dot{\eta}\cos\vartheta + \lambda\xi, \quad (2.3.26)$$

$$\ddot{\eta} = -2\omega(\dot{\xi}\cos\vartheta + \dot{\zeta}\sin\vartheta) + \lambda\eta, \quad (2.3.27)$$

$$\ddot{\zeta} = g + 2\omega\sin\vartheta\dot{\eta} + \lambda\zeta, \quad (2.3.28)$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2. \quad (2.3.29)$$

2.3. Zwangsbedingungen

Wir wollen uns weiter auf kleine Schwingungen beschränken, d.h. wir nehmen an $\xi, \eta \ll l$, so daß wir Größen der Ordnung $(\xi/l)^2$ bzw. $(\eta/l)^2$ vernachlässigen können. Aus (2.3.29) folgt dann

$$\zeta = l \sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{l^2}} = l + \mathcal{O}\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{l^2}\right). \quad (2.3.30)$$

Unter Vernachlässigung von $2\omega\dot{\eta}$ gegen g folgt dann

$$\lambda = -\frac{g}{l} := -\omega_0^2. \quad (2.3.31)$$

Dies in (2.3.26) und (2.3.27) eingesetzt, liefert schließlich

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= 2\omega'\dot{\eta} - \omega_0^2\xi, \\ \ddot{\eta} &= -2\omega'\dot{\xi} - \omega_0^2\eta \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

mit $\omega' = \omega \cos \vartheta$. Dieses Gleichungssystem können wir leicht lösen, indem wir die komplexe Variable

$$z = \xi + i\eta \quad (2.3.33)$$

eingeführen. Dann ergeben sich die Differentialgleichungen in (2.3.32) als Real- und Imaginärteil der einen Gleichung

$$\ddot{z} + 2i\omega'\dot{z} - \omega_0^2z, \quad (2.3.34)$$

in die wir mit dem Ansatz

$$z = C \exp(ikt) \quad (2.3.35)$$

eingehen. Das liefert die quadratische Gleichung

$$k^2 + 2k\omega' - \omega_0^2 = 0 \quad (2.3.36)$$

mit den Lösungen

$$k_{1,2} = -\omega' \pm \underbrace{\sqrt{\omega'^2 + \omega_0^2}}_{\omega'_0}. \quad (2.3.37)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.3.34) lautet demnach

$$z = [C_1 \exp(i\omega'_0 t) + C_2 \exp(-i\omega'_0 t)] \exp(-i\omega' t). \quad (2.3.38)$$

Wählen wir als Anfangsbedingung, daß wir zur Zeit $t = 0$ das Pendel um eine Strecke $a \ll l$ nach Süden hin auslenken und aus der Ruhe loslassen, d.h.

$$\xi(0) = a, \quad \eta(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = 0, \quad (2.3.39)$$

finden wir nach Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2

$$z(t) = a \left[\cos(\omega'_0 t) + i \frac{\omega'}{\omega'_0} \sin(\omega'_0 t) \right] \exp(-i\omega' t). \quad (2.3.40)$$

Dies bedeutet, daß das Pendel mit relativ schnellen Schwingungen (Kreisfrequenz $\omega'_0 \gg \omega'$) hin- und herschwingt, wobei sich die Schwingungsebene mit der Kreisfrequenz $\omega' = \omega \cos \vartheta$ langsam dreht. Eine vollständige Drehung hat die Dauer

$$T_{\text{rot}} = \left| \frac{2\pi}{\omega \cos \vartheta} \right|. \quad (2.3.41)$$

2. Kanonische Mechanik

Am Äquator, wo $\vartheta = \pi/2$ ist, dreht sich die Schwingungsebene überhaupt nicht, weil $\omega' = 0$, und das Pendel schwingt einfach beständig in der Nord-Südrichtung hin und her, und zwar mit der Kreisfrequenz ω_0 , d.h. am Äquator verhält sich das Pendel wie auf einer nichtrotierenden Erde. An den Polen hingegen, wo $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi$ rotiert die Pendelebene in 24 h (am Nordpol im Uhrzeigersinn, am Südpol entgegengesetzt). An anderen Orten der Erde ist die Rotationsdauer um den Faktor $1/|\cos \vartheta| = 1/|\sin(\Lambda)|$ länger. Dabei bezeichnet $\Lambda = \pi/2 - \vartheta$ den **Breitengrad** des Beobachterstandpunktes. Auf der Nordhalbkugel dreht sich die Schwingungsebene im Uhrzeigersinne, auf der Südhalbkugel entgegengesetzt.

Das wird mathematisch noch deutlicher, wenn wir die Geschwindigkeit des Massepunktes betrachten. Dazu leiten wir (2.3.40) nach der Zeit ab:

$$\dot{z}(t) = -a\omega'_0 \left(1 - \frac{\omega'^2}{\omega_0'^2}\right) \sin(\omega'_0 t) \exp(-i\omega' t). \quad (2.3.42)$$

Bei jeder Halbschwingung, also für Zeiten t_n , wo $\omega'_0 t_n = n\pi$, ist $\dot{z} = 0$, d.h. diese Zeiten markieren die Umkehrpunkte des Pendels. Der Exponentialfaktor beschreibt dabei die Rotation dieser Spitzen der Bahnkurve des Pendels, also die Drehung der Pendelebene wie oben beschrieben.

2.4 Das Noether-Theorem

Wir betrachten nun die Frage, welche Transformationen an der Lagrangefunktion vorgenommen werden dürfen, ohne daß sich die Bewegungsgleichungen, also die Euler-Lagrangegleichungen, ändern. Solche Lagrangefunktionen nennen wir im folgenden zueinander äquivalent, denn sie beschreiben das gleiche mechanische System, da ja die Euler-Lagrange-Gleichungen, also die Bewegungsgleichungen, identisch sind. Dazu ist es offenbar notwendig und hinreichend, daß die Variation des Wirkungsfunktional (2.2.10) unverändert bleibt. Aus der Rechnung oben, die zur Aufstellung der der Euler-Lagrange-Gleichungen führte, erkennen wir, daß sie für zwei Lagrangefunktionen L und L' genau dann gleich sind, wenn es eine hinreichend glatte Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} F(q, t) \quad (2.4.1)$$

gibt.

Dann gilt nämlich

$$\delta(I' - I) = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dF}{dt} = \delta F|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial F}{\partial q^k} \delta q^k|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (2.4.2)$$

weil die Variation δq nach Vorschrift des Hamiltonschen Prinzips an den Randpunkten des Intervalls verschwindet.

Wir nehmen nun an, ein Problem sei forminvariant unter einer bestimmten hinreichend oft differenzierbaren Transformation der q^k und t :

$$q' = q + \delta q, \quad t' = t + \delta t. \quad (2.4.3)$$

Dann gilt

$$\delta(dtL) = (\delta L)dt + L\delta(dt). \quad (2.4.4)$$

2.5. Symmetrien von Raum und Zeit

Im Gegensatz zur Variation beim Hamiltonschen Prinzip wird bei dieser allgemeinen Transformation die Zeit mittransformiert. Folglich müssen wir die Variation der in L vorkommenden Zeitableitungen \dot{q} bestimmen:

$$\delta \dot{q} = \frac{d(q + \delta q)}{d(t + \delta t)} - \frac{dq}{dt} = \frac{d(q + \delta q)}{dt} \left(\frac{d(t + \delta t)}{dt} \right)^{-1} - \frac{dq}{dt}. \quad (2.4.5)$$

Nutzen wir weiter aus, daß bis auf Terme erster Ordnung in δt gilt

$$\left(\frac{d(t + \delta t)}{dt} \right)^{-1} = 1 - \frac{d\delta t}{dt}, \quad (2.4.6)$$

ergibt sich daraus in erster Ordnung in δq und δt

$$\delta \dot{q} = \frac{d\delta q}{dt} - \dot{q} \frac{d\delta t}{dt}. \quad (2.4.7)$$

Weiter ergibt sich für das Zeitdifferential

$$\delta(dt) = dt' - dt = \frac{d\delta t}{dt} dt. \quad (2.4.8)$$

Damit nun die Euler-Lagrange-Gleichungen unter solchen Transformationen forminvariant bleiben, muß es gemäß (2.4.1) eine Funktion $\delta F(q, t)$ geben, so daß

$$\delta(Ldt) + \frac{d}{dt} \delta F(q, t) dt = 0 \quad (2.4.9)$$

ist. Setzen wir die oben durchgeführten Zwischenrechnungen ein, ergibt sich daraus die **Bedingung für das Vorliegen einer Symmetrie**:

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \left(\frac{d}{dt} \delta q^k - \dot{q}^k \frac{d\delta t}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{d\delta F}{dt} + L \frac{d\delta t}{dt} = 0. \quad (2.4.10)$$

Wir untersuchen nun weiter, was sich aus dem Vorliegen einer Symmetrie für die Bewegung des Systems ergibt. Setzt man die Lösungen der Bewegungsgleichungen in die Symmetriebedingung (2.4.10) ein, folgt nach einigen Umformungen

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - L \right) \delta t + \delta F \right] = 0. \quad (2.4.11)$$

Das bedeutet aber, daß die in den eckigen Klammern stehende Größe während der Bewegung des Systems zeitlich konstant ist. Das ist das **Noether-Theorem**:

Ist die Variation der Wirkung eines dynamischen Systems invariant bzgl. einer kontinuierlichen **Symmetrie**, so hat dies die Erhaltung einer aus dieser Symmetrie bestimmten Größe zur Folge. Die **Erhaltungsgröße** ist dabei bis auf additive Größen der Form $\delta F(q, t)$ eindeutig bestimmt durch die **infinitesimalen Erzeugenden** der Symmetrietransformation.

2.5 Symmetrien von Raum und Zeit

Wir haben im ersten Kapitel die Galilei-Newtonsche Raum-Zeit-Struktur durch die Tatsache, daß die zehnparametrische Galileigruppe Symmetriegruppe der Theorie ist charakterisiert. Das im vorigen Abschnitt hergeleitete Noether-Theorem gestattet uns nun, die Konsequenzen für die Physik zu ziehen, nämlich die Begründung der Gültigkeit von 10 Erhaltungssätzen.

Wir können die Transformationen, durch deren Komposition die volle Galileigruppe definiert wird, einzeln betrachten, was die Rechenarbeit deutlich übersichtlicher gestaltet.

2.5.1 Zeitliche Translationsinvarianz und Energieerhaltung

Eine Zeittranslation ist durch

$$\delta t = \text{const.}, \quad \delta q = 0 \quad (2.5.1)$$

definiert. Damit dies eine Symmetrietransformation ist, muß nach (2.4.10) gelten $\partial L / \partial t = 0$, d.h. die Lagrangefunktion darf nicht explizit von der Zeit abhängen. Ist dies der Fall, ist nach (2.4.11) die Größe

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L \quad (2.5.2)$$

während der Bewegung zeitlich konstant. Wir haben oben schon gesehen, daß diese Größe für eine Lagrangefunktion, die bzgl. der \dot{q} homogen von zweiter Ordnung ist, mit der **Gesamtenergie** $T+V$ des Systems übereinstimmt. Wir werden daher allgemein die Erhaltungsgröße, die sich aus der zeitlichen Translationsinvarianz ergibt, als **Energie** bezeichnen.

2.5.2 Räumliche Translationsinvarianz und Impulserhaltung

Wir betrachten die Parametrisierung des Systems in kartesischen Koordinaten $x^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ für Systeme aus n Massepunkten. Soll das System unter der Translation in Richtung \mathbf{n} invariant sein, d.h. unter der Transformation

$$\delta t = 0, \quad \delta x^{(i)} = n \delta r, \delta r = \text{const}, \quad (2.5.3)$$

so muß gemäß (2.4.10)

$$n \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x^{(i)}} = 0 \quad (2.5.4)$$

gelten, d.h. heißt die Summe aller Kraftkomponenten in Richtung von \mathbf{n} muß verschwinden. Die dazugehörige Erhaltungsgröße ist

$$\mathbf{p} = n \sum_{i=1}^n n^k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(i)k}}, \quad (2.5.5)$$

also die **Impulskomponente in Richtung von \mathbf{n}** .

Wir bemerken, daß diese Betrachtungen auch für verallgemeinerte Variable gelten, von denen die Lagrangefunktion nicht abhängt, d.h. L hängt für ein bestimmtes j von \dot{q}^j , nicht aber von q^j selbst ab. Dann liegt eine Symmetrie vor, die sich eben durch die „Translationsinvarianz“ bzgl. dieser generalisierten Koordinate ausdrückt. Dann ist der zu dieser **zyklischen Koordinate** gehörige Impuls erhalten oder ein sog. **erstes Integral der Bewegung**. Es ist also praktisch sinnvoll, Symmetrien durch entsprechende Wahl generalisierter Koordinaten dadurch zu berücksichtigen daß sich die Symmetrie einer Translation einer oder mehrerer dieser generalisierten Koordinaten ausdrückt.

2.5.3 Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung

Bereits in Abschnitt 1.6 haben wir gesehen, daß infinitesimale Drehungen durch antisymmetrische Matrizen dargestellt werden. Wieder in kartesischen Koordinaten geschrieben gilt

$$\delta x^{(i)k} = \delta \omega^k_l x^{(i)l}. \quad (2.5.6)$$

2.5. Symmetrien von Raum und Zeit

Die Symmetriebedingung (2.4.10) lautet also für diesen Fall

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x^{(i)k}} \delta \omega^k_l x^{(i)l} = \frac{1}{2} \delta \omega^k_l \underbrace{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial x^{(i)k}} x^{(i)l} - \frac{\partial L}{\partial x^{(i)l}} x^{(i)k} \right]}_{M^l_k} = 0. \quad (2.5.7)$$

Dabei haben wir von der Antisymmetrie der infinitesimalen Drehmatrix Gebrauch gemacht. Bis auf diese Antisymmetrie sind die Drehmatrizen aber willkürlich und folglich muß der **Gesamtdrehmomententensor** M^k_l verschwinden. Da dieser Tensor antisymmetrisch ist, können wir ihn durch Dualisieren umkehrbar eindeutig auf einen axialen Vektor, der üblicherweise als **Gesamtdrehmoment** bezeichnet wird, abbilden:

$$(M^\dagger)_m = M_m = \frac{1}{2} \epsilon_{mlk} M^{lk} \Rightarrow \mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}^{(i)} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}. \quad (2.5.8)$$

Ist das Verschwinden des Gesamtdrehmoments erfüllt, liegt also tatsächlich Rotationssymmetrie vor, ist nach (2.4.11) der **Drehimpulstensor**

$$l^l_k = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(i)k}} x^{(i)l} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(i)l}} x^{(i)k} \right] \quad (2.5.9)$$

bzw. der durch Dualisieren entstehende axiale Vektor

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}^{(i)} \times \mathbf{p}^{(i)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}^{(i)} = \frac{\partial L}{\partial (\mathbf{d}_t \mathbf{x}^{(i)})}, \quad (2.5.10)$$

der **Gesamtdrehimpuls**, während der Bewegung zeitlich konstant.

Ist die Drehinvarianz nur bei Drehung um eine feste Achse gegeben, so ist auch nur die entsprechende Komponente des Drehimpulses in Richtung dieser Drehachse erhalten, und es empfiehlt sich die Einführung einer Winkelvariable um diese Achse. Von diesem Sachverhalt rührt auch die Bezeichnung „zyklisch“ für eine Variable her, von der L nicht explizit abhängt.

2.5.4 Galileiboostinvarianz und Schwerpunktsatz

Die Parametrisierung erfolgt wieder über kartesische Koordinaten. Ein infinitesimaler Galileiboost ist durch

$$\delta t = 0, \quad \delta \mathbf{x}^{(i)} = t \delta \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \delta \mathbf{v} = \text{const} \quad (2.5.11)$$

gegeben. Als Symmetriebedingung folgt daraus mit (2.4.10):

$$\delta \mathbf{v} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} t + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] + \frac{d}{dt} \delta F = 0. \quad (2.5.12)$$

Wie wir gleich sehen werden, benötigen wir hier nämlich zwingend ein δF , das wir im übrigen auch bei der zeitlichen und räumlichen Translationsinvarianz und bei der Rotationsinvarianz hätten berücksichtigen können. Daß dies hier beim Schwerpunktsatz zwingend erforderlich wird, stellen wir hier nur fest.²

²Dies hat für die Quantentheorie eine interessante Bedeutung dahingehend, daß die Darstellung der Galileigruppe in der Quantenmechanik nicht eindeutig ist, und die üblicherweise verwendete Darstellung postuliert oder als Grenzbeziehung für kleine Geschwindigkeiten (formal $c \rightarrow \infty$) aus der Lorentzinvarianz der speziellen Relativitätstheorie hergeleitet werden muß.

2. Kanonische Mechanik

Wir nehmen weiter an, das Systems sei translationsinvariant, so daß nach dem Impulserhaltungssatz der erste Term verschwinden muß. Damit bleibt nur noch übrig:

$$\frac{d}{dt} \delta F = -\delta v \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(i)}} \quad (2.5.13)$$

Wegen der allgemeinen Form

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_k^{(i)}}{dt} \right)^2 \quad \text{folgt} \quad \delta F = -\delta v \sum_{i=1}^n m_i x^{(i)} \quad (2.5.14)$$

bis auf eine Konstante. Hierin besitzt δF in der Tat die geforderte Form, hängt also nur von den $x^{(i)}$ und nicht auch von den Geschwindigkeiten ab. Aus (2.4.11) ergibt sich die dazugehörige Erhaltungsgröße zu

$$\sum_{i=1}^n (t p_i - m_i x^{(i)}) = 0, \quad (2.5.15)$$

d.h. das mit den Massen gewichtete Mittel der Ortsvektoren der Massenpunkte, der **Schwerpunkt des Systems**, bewegt sich geradlinig gleichförmig. Zur Ausnutzung dieser Symmetrie empfiehlt sich also die Einführung der Schwerpunktskoordinaten

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.5.16)$$

und die Einführung eines Bezugssystems, in dem der Gesamtimpuls verschwindet. Dann ist der Schwerpunkt nämlich gemäß (2.5.15) eine Erhaltungsgröße. Man kann in diesem Sinne von der Erhaltung des Schwerpunktes sprechen. Bei frei gelassener Wahl des Bezugssystems bewegt sich der Schwerpunkt allerdings geradlinig gleichförmig.

Wir bemerken noch, daß wir im Rahmen der Newtonschen Mechanik annehmen, daß Galileiinvarianz gegeben ist. Das bedeutet, daß die zehn Erhaltungssätze stets erfüllt sind. Allerdings betrachtet man oft idealisierte Probleme, in denen das nicht der Fall ist, etwa wenn man die Bewegung von Teilchen in vorgegebenen elektromagnetischen Feldern beschreibt, indem man die Rückwirkung der Teilchen auf die Felder vernachlässigt. Es ist klar, daß die Felder selbst ebenfalls durch Teilchen (mit Ladungen) erzeugt werden. Betrachtet man also das Gesamtsystem, gelten wieder die 10 Erhaltungssätze. Wir sprechen daher von einem System, für das alle Erhaltungssätze gelten auch von einem **abgeschlossenen System**.

2.6 Das Kepler-Problem

Eine der ersten Anwendungen von Newtons Theorie war die Erklärung der von Kepler empirisch gefundenen Gesetze der Planetenbewegung. Daß Newtons **Principia mathematica** überhaupt geschrieben wurde verdanken wir nicht zuletzt dem bei Newton hartnäckig um eine solche umfassende Darstellung bittenden Astronomen Halley, der sogar für die Druckkosten aufkam!

Newton hatte sein Gravitationsgesetz, demzufolge sich zwei Körper mit einer Kraft anziehen, die sich aus dem Potential

$$V(x_1, x_2) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|x_1 - x_2|} \quad (2.6.1)$$

berechnet, eigentlich umgekehrt aus den Kepler-Gesetzen entwickelt, indem er nach den Kräften suchte, die die Bahnformen und Zeitabläufe korrekt beschreiben. Wir gehen hier den umgekehrten Weg

2.6. Das Kepler-Problem

und berechnen die Bewegung aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz. Die Lagrangefunktion ist in kartesischen Koordinaten durch

$$L = T - V = \frac{m_1}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \frac{K}{|x_1 - x_2|} \quad \text{mit } K = \gamma m_1 m_2 \quad (2.6.2)$$

gegeben. Zunächst können wir das Problem durch Ausnutzen von Symmetrien auf ein ebenes Einteilchenproblem zurückführen. Wegen der Translations- und Galilei-Invarianz können wir zunächst den Schwerpunktsatz anwenden. Wir führen also die Schwerpunktskoordinaten ein. Darüber hinaus benötigen wir noch drei weitere unabhängige Koordinaten, wofür wir wegen der Form des Potentials die Relativkoordinaten $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ wählen:

$$s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 = s + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 = s - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \quad \text{mit } M = m_1 + m_2. \quad (2.6.3)$$

Setzen wir dies in die Lagrange-Funktion ein, erhalten wir

$$L = \frac{M}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{K}{|\mathbf{r}|} \quad \text{mit } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.6.4)$$

Wie wir wegen des Noether-Theorems erwartet haben, ist s zyklisch. Durch einen Galilei-Boost können wir erreichen, daß der Schwerpunkt im Bezugssystem ruht, so daß die Lagrangefunktion formal auf die eines Teilchens (im folgenden **Quasiteilchen** genannt) mit der **reduzierten Masse** μ , das sich um den Ursprung des Relativkoordinatensystems (das **Quasizentrum**) bewegt, zurückgeführt ist. Es ist dies das sogenannte **reduzierte Keplerproblem**, bei dem die Sonne als feststehendes Zentrum betrachtet wird. Wie wir sehen, ist die Lösung des vollständigen Zweikörper-Keplerproblems auf die Lösung des reduzierten Problems zurückgeführt, wobei lediglich die Masse des „Planeten“ durch die reduzierte Masse des Zweikörperproblems gegeben ist.

Ein Blick auf die Gleichung für μ zeigt, daß dies näherungsweise sogar durch das ursprüngliche Problem gegeben ist, wenn die Sonne sehr viel schwerer ist als der Planet, wie dies für alle Planeten in unserem Sonnensystem der Fall ist.

Das verbliebene Einteilchenproblem wird wegen $s = \text{const}$ durch die Lagrangefunktion

$$L = \frac{\mu}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{K}{r} \quad \text{mit } r = |\mathbf{r}| \quad (2.6.5)$$

beschrieben. Wir betrachten nunmehr die Symmetrien dieses Problems. Zunächst ist L nicht explizit zeitabhängig. Wie wir oben gesehen haben, bedeutet dies die zeitliche Translationsinvarianz und damit die Erhaltung der Gesamtenergie

$$E = T + V = \frac{\mu}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{K}{r}. \quad (2.6.6)$$

Weiter setzt sich L aus Skalaren der Relativkoordinaten und deren Zeitableitung zusammen. Damit ist aber L invariant unter Drehungen, und nach dem Noether-Theorem bedeutet dies die Erhaltung des Drehimpulses des Quasiteilchens:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{l} = 0. \quad (2.6.7)$$

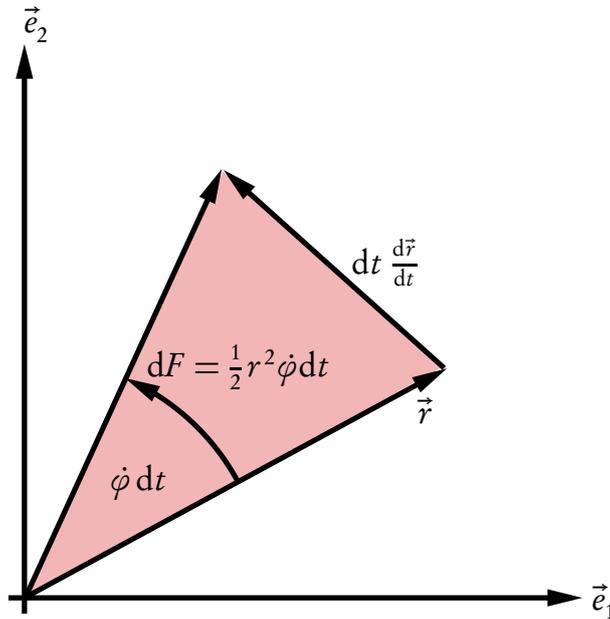


Abbildung 2.2: Zum zweiten Keplerschen Gesetz: $dF = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} dt = \frac{l}{2\mu} dt$ ist der Flächeninhalt des im Zeitinkrement dt vom Radiusvektor des Quasiteilchens überstrichene Fläche. Der Radiusvektor überstreicht also in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Da l nach dem Noether-Theorem zeitlich konstant ist, ist die Bahnkurve des Quasiteilchens eben, d.h. bleibt stets in der Ebene senkrecht zum Drehimpuls l . Um dies auszunutzen, denken wir uns das Koordinatensystem so gewählt, daß $l = l e_3$ ist. Dann bewegt sich das Quasiteilchen in der 12-Ebene dieses Koordinatensystems. Weiter wissen wir, daß das Problem rotationsinvariant ist, so daß es sinnvoll ist, Polarkoordinaten in der 12-Ebene einzuführen:

$$\begin{aligned} r &= r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, & \dot{r} &= \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + r \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}, \\ \dot{r} &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2, & l &= \mu r^2 \dot{\phi} e_3. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Dabei haben wir für die Rechnungen mit r die aufgrund der Wahl des Koordinatensystems identisch verschwindende 3-Komponente weggelassen.

Dies in die Lagrangefunktion eingesetzt ergibt, daß ϕ erwartungsgemäß tatsächlich zyklisch ist:

$$L = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{K}{r} \quad (2.6.9)$$

Damit ist $r^2 \dot{\phi} = \text{const.}$ Das ist die auf unsere Wahl des Koordinatensystems spezialisierte Form des Drehimpulserhaltungssatzes. Dieser Erhaltungssatz ist identisch mit dem **2. Keplerschen Gesetz**, dem **Flächensatz**. Dies erkennen wir durch die geometrische in Abbildung 2.2 erklärte Interpretation.

In den eben eingeführten Polarkoordinaten ergibt sich die erhaltene Energie zu

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}. \quad (2.6.10)$$

Durch die Wahl der generalisierten Variablen ϕ , die entsprechend den Symmetrien des Systems zyklisch ist, bedeutet dies die Zurückführung des Keplerproblems auf eine Differentialgleichung in einer

2.6. Das Kepler-Problem

Unbekanntes. Es handelt sich dabei um die Bewegung eines Teilchens im Halbraum $r \in \mathbb{R}_{>0}$ unter Wirkung eines effektiven Potentials, das sich aus dem ursprünglichen Zentralpotential $-K/r$ und der **Zentrifugalbarriere** $l^2/(2\mu r^2)$ zusammensetzt.

Wir beschränken uns nun jedoch zunächst auf die Bestimmung der Bahnform, indem wir die Zeitableitung \dot{r} mit Hilfe des Drehimpulssatzes $l = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{const}$ eliminieren:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{l r'}{\mu r^2} \quad \text{mit} \quad r' = \frac{dr}{d\phi}. \quad (2.6.11)$$

Dies in den Energiesatz eingesetzt, ergibt

$$E = \frac{l^2 r'^2}{2\mu r^4} + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}, \quad (2.6.12)$$

was sich durch Einführung von $s = 1/r$ wesentlich vereinfachen läßt:

$$E = \frac{l^2}{2\mu} s'^2 + \frac{l^2}{2\mu} s^2 - Ks. \quad (2.6.13)$$

Leiten wir diese Gleichung nach φ ab, erhalten wir

$$s' \left[\frac{l^2}{\mu} (s'' + s) - K \right] = 0. \quad (2.6.14)$$

Damit ist eine spezielle Lösung $s = 1/r_0 = \text{const}$. Dann ist die Bahn ein Kreis. Andernfalls muß die eckige Klammer verschwinden, d.h.

$$s'' + s = \frac{\mu K}{l^2} \Rightarrow s(\varphi) = C \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu K}{l^2}. \quad (2.6.15)$$

Dem Brauch der Astronomen folgend zählen wir im folgenden den Winkel φ von dem Punkt der Bahn an, wo der Planet der Sonne am nächsten kommt, dem sog. **Perihel**. Wegen $r = 1/s$ ergibt sich dies für die Wahl $\varphi = 0$. Nun setzen wir (2.6.15) in (2.6.12) ein, was

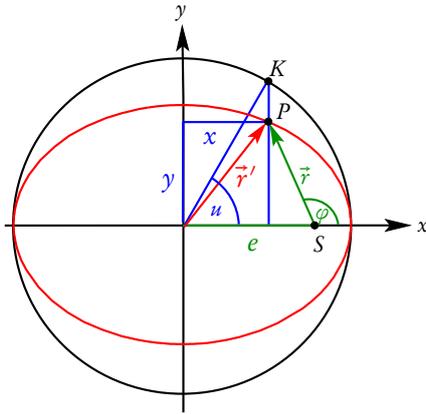
$$C = \sqrt{\frac{\mu^2 K^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}} \quad (2.6.16)$$

ergibt. Damit wird (2.6.15) zu

$$r = \frac{1}{s} = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad \text{mit} \quad p = \frac{l^2}{2\mu K}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu K^2}}. \quad (2.6.17)$$

Dies ist das **1. Keplersche Gesetz**: Die Bahn des Planeten ist ein Kegelschnitt mit einem Brennpunkt im Schwerpunkt des Planet-Sonne-Systems. Dabei ergibt sich für $E < 0$ eine Ellipse, für $E = 0$ eine Parabel und $E > 0$ eine Hyperbel. Zur Herleitung dieser **Brennpunktsform** der Kegelschnitte in Polarkoordinaten s. Anh. B.

2. Kanonische Mechanik



Wir wenden uns schließlich der Frage nach dem zeitlichen Verlauf der Planetenbewegung zu. Dies vereinfacht sich nun dadurch, dass wir mit der obigen Rechnung nunmehr die Bahnform kennen. Wir beschränken uns dabei auf die Planetenbewegung, also die gebundenen Ellipsenbahnen mit $\epsilon < 1$. Dann können wir statt des Winkels ϕ den Parameter u aus (B.2.8) einführen. In diesem astronomischen Zusammenhang nennt man u auch die **exzentrische Anomalie**. Aus der nebenstehenden Skizze lesen wir ab, dass

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a(\cos u - \epsilon) \\ b \sin u \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \mu a b \dot{u} \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \end{pmatrix}. \quad (2.6.18)$$

ist. Nun ist der Drehimpuls durch

$$l = m(r_1 \dot{r}_2 - r_2 \dot{r}_1) = \mu a b \dot{u} (1 - \epsilon \cos u) \quad (2.6.19)$$

gegeben. Wegen $l = \text{const}$ können wir die zeitliche Bewegung des Planeten auf der Bahn implizit durch

$$t = \int_0^t dt' = \frac{\mu a b}{L} \int_0^u du' (1 - \epsilon \cos u) \Rightarrow t = \frac{\mu a b}{L} (u - \epsilon \sin u) \quad (2.6.20)$$

beschreiben.

Die Gesamtumlaufdauer T ergibt sich aus dieser **Kepler-Gleichung** zu $u = 2\pi$

$$T = \frac{2\pi \mu a b}{L}. \quad (2.6.21)$$

Nun ist gemäß (B.2.14) und (2.6.17)

$$b^2 = a p = \frac{a l^2}{2\mu k} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1 + m_2)}, \quad (2.6.22)$$

wobei wir noch $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ berücksichtigt haben. Da in unserem Planetensystem die Sonne sehr viel schwerer ist ($m_2 \gg m_1$) als alle Planeten, gilt

$$\frac{T^2}{a^3} \simeq \frac{4\pi^2}{\gamma m_2}, \quad (2.6.23)$$

d.h. das Verhältnis aus dem Quadrat der Umlaufdauer und dem Kubus der großen Halbachse der Planetenbahn ist für alle Planeten gleich. Dies ist das **3. Keplersche Gesetz**.

Schließlich betrachten wir noch den Fall $l = 0$. Dann ergibt sich aus (2.6.8) $\dot{\phi} = 0$. Das bedeutet, daß $\phi = \text{const}$ und folglich die Bahn des Quasiteilchens eine Gerade durch das Quasizentrum ist. Zur Beschreibung der Bewegung des Quasiteilchens verwenden wir den Energiesatz (2.6.10). Mit $l = 0$ folgt

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\epsilon + \frac{A}{r}} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{2E}{\mu}, \quad A = \frac{2K}{\mu}. \quad (2.6.24)$$

Diese Differentialgleichung können wir durch „Trennung der Variablen“ in impliziter Form lösen

$$t = \pm \int_{r_0}^r dr' \sqrt{\frac{r'}{A + \epsilon r'}}. \quad (2.6.25)$$

2.6. Das Kepler-Problem

Dabei ist r_0 der durch die Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ vorgegebene Radius. Das Integral ist je nach dem gewählten Vorzeichen der Wurzel eine monoton wachsende bzw. fallende Funktion von $r > 0$.

Nun müssen wir eine Fallunterscheidung hinsichtlich der Energie und des Vorzeichens der Anfangsgeschwindigkeit \dot{r}_0 vornehmen.

Betrachten wir zunächst den Fall $\epsilon > 0$ und $\dot{r}_0 > 0$. Dann müssen wir in (B.1.2) das obere Vorzeichen der Wurzel verwenden, und es muß stets $r > r_0$ sein, damit $t > 0$ ist. Da der Integrand in diesem Fall für alle $r > 0$ frei von Singularitäten ist, bedeutet dies, daß sich das Teilchen monoton von $r = r_0$ bis $r \rightarrow \infty$ bewegt. Das Integral läßt sich durch die Substitution

$$r = \frac{A}{\epsilon} \sinh^2 \gamma \quad (2.6.26)$$

lösen. Das Endergebnis lautet

$$t = \frac{A}{\epsilon^{3/2}} \left[\sqrt{\frac{\epsilon r}{A}} \sqrt{1 + \frac{\epsilon r}{A}} - \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{\epsilon r}{A}} \right) - \sqrt{\frac{\epsilon r_0}{A}} \sqrt{1 + \frac{\epsilon r_0}{A}} + \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{\epsilon r_0}{A}} \right) \right] \quad (2.6.27)$$

Für $\epsilon > 0$ und $\dot{r}_0 < 0$ ist das andere Vorzeichen zu verwenden, und $t > 0$ ergibt sich nur für $r < r_0$, d.h. das Teilchen stürzt nach endlicher Zeit ins Zentrum:

$$t = -\frac{\sqrt{Ar}}{\epsilon} \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{A}r} + \frac{A}{\epsilon^{3/2}} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{\epsilon r}{A}} \right) + \frac{\sqrt{Ar_0}}{\epsilon} \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{A}r_0} - \frac{A}{\epsilon^{3/2}} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{\epsilon r_0}{A}} \right). \quad (2.6.28)$$

Für $\epsilon = 0$ läßt sich das Integral (B.1.2) am einfachsten berechnen und sogar nach r auflösen. Man erhält

$$r = \left(\frac{2r_0^{3/2} \pm 3\sqrt{At}}{2} \right)^{2/3} \begin{cases} \text{für } \dot{r}_0 > 0, \\ \text{für } \dot{r}_0 < 0. \end{cases} \quad (2.6.29)$$

Für $\dot{r}_0 > 0$ bewegt sich das Teilchen ins Unendliche fort, wo es asymptotisch zum Stillstand kommt. Dieser Fall gibt auch die **Fluchtgeschwindigkeit** eines Körpers von der Erde an. Setzt man also $r_0 = r_E$ mit dem Erdradius r_E , dann ergibt sich als minimale Geschwindigkeit für das Entweichen ins Unendliche aus der Forderung $E = 0$, d.h.

$$v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2K}{mr_E}} \simeq 11,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (2.6.30)$$

Kommen wir schließlich zum Fall $E < 0$, also $\epsilon < 0$. Dann muß wegen des Energiesatzes offenbar

$$0 < r, r_0 \leq r_{\max} \quad \text{mit} \quad r_{\max} = \frac{A}{|\epsilon|} \quad (2.6.31)$$

gelten. Gl. (B.1.2) lautet in diesem Fall wegen $\epsilon = -|\epsilon|$

$$t = \pm \int dr \sqrt{\frac{r}{A - |\epsilon|r}} = \pm \frac{A}{\epsilon^{3/2}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{|\epsilon|r}{A}} \right) - \sqrt{\frac{|\epsilon|r}{A}} \sqrt{1 - \frac{|\epsilon|r}{A}} \right] + C \quad (2.6.32)$$

mit einer Integrationskonstanten C . Falls nun $\dot{r}_0 < 0$, gilt stets das untere Vorzeichen, und wir haben $0 \leq r \leq r_0 \leq r_{\max}$, d.h. das Teilchen stürzt ins Zentrum gemäß

$$t = \frac{A}{|\epsilon|^{3/2}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{|\epsilon|r_0}{A}} \right) - \sqrt{\frac{|\epsilon|r_0}{A}} \sqrt{1 - \frac{|\epsilon|r_0}{A}} - \arcsin \left(\sqrt{\frac{|\epsilon|r}{A}} \right) + \sqrt{\frac{|\epsilon|r}{A}} \sqrt{1 - \frac{|\epsilon|r}{A}} \right]. \quad (2.6.33)$$

2. Kanonische Mechanik

Dabei haben wir die Integrationskonstante in (2.6.32) so angepaßt, daß $t(r_0) = 0$ wird. Die Bewegung endet also zur Zeit

$$t_{\text{end}} = \frac{A}{|\epsilon|^{3/2}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{|\epsilon|r_0}{A}} \right) - \sqrt{\frac{|\epsilon|r_0}{A}} \sqrt{1 - \frac{|\epsilon|r_0}{A}} \right]. \quad (2.6.34)$$

Falls $\dot{r}_0 > 0$, bewegt sich das Teilchen zunächst vom Zentrum weg, bis es den **Umkehrpunkt** $r_{\text{Umk}} = r_{\text{max}} = A/|\epsilon|$ erreicht, wo $\dot{r}_{\text{Umk}} = 0$ ist. Der Umkehrpunkt wird also zur Zeit

$$t_{\text{Umk}} = \frac{A}{|\epsilon|^{3/2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\sqrt{\frac{|\epsilon|r_0}{A}} \right) + \sqrt{\frac{|\epsilon|r_0}{A}} \sqrt{1 - \frac{|\epsilon|r_0}{A}} \right] \quad (2.6.35)$$

erreicht. Im Zeitbereich $t \in [0, t_{\text{Umk}}]$ gilt also das obere Vorzeichen in Gl. (2.6.32):

$$t = \frac{A}{|\epsilon|^{3/2}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{|\epsilon|r}{A}} \right) - \sqrt{\frac{|\epsilon|r}{A}} \sqrt{1 - \frac{|\epsilon|r}{A}} - \arcsin \left(\sqrt{\frac{|\epsilon|r_0}{A}} \right) + \sqrt{\frac{|\epsilon|r_0}{A}} \sqrt{1 - \frac{|\epsilon|r_0}{A}} \right] \quad (2.6.36)$$

Von da an gilt wieder das untere Vorzeichen, und wir haben

$$t = t_{\text{Umk}} - \frac{A}{|\epsilon|^{3/2}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{|\epsilon|r}{A}} \right) - \sqrt{\frac{|\epsilon|r}{A}} \sqrt{1 - \frac{|\epsilon|r}{A}} - \frac{\pi}{2} \right], \quad (2.6.37)$$

wobei sich das Teilchen von r_{max} auf das Zentrum zubewegt. Dort endet seine Bewegung demnach zur Zeit

$$t_{\text{end}} = t_{\text{Umk}} + \frac{\pi A}{2|\epsilon|^{3/2}} \quad (2.6.38)$$

2.7 Hamiltonsche Mechanik

In der eben behandelten Lagrangeschen Formulierung der Mechanik stand die Parametrisierung des Konfigurationsraums durch beliebige generalisierte Koordinaten im Vordergrund. Nun wenden wir uns einer zweiten dazu äquivalenten Beschreibungsweise durch ein erweitertes Hamiltonsches Prinzip zu. Wie wir beim Beweis des Noetherschen Theorems gesehen haben, sind neben den generalisierten Koordinaten q die dazugehörigen kanonisch konjugierten Impulse $\partial L / \partial \dot{q}$ geeignete Größen zur Beschreibung des Systems. Liegt nämlich eine geometrische Symmetrie bei einem gegebenen mechanischen Problem vor und wählen wir geeignete Koordinaten, die diese Symmetrie lokal durch reine Translationen beschreiben, ist der dazugehörige kanonisch konjugierte Impuls dem Noether-Theorem zufolge zeitlich konstant. Solche Koordinaten bezeichnen wir als zyklisch, und die in diesen Koordinaten ausgedrückte Lagrangefunktion zeichnet sich dadurch aus, daß sie von diesen Koordinaten nicht explizit abhängt, sondern nur von deren Zeitableitung.

Wir führen also neben den generalisierten Koordinaten q auch die kanonisch konjugierten Impulse p ein. Die Eingangsparameter der Lagrangefunktion sind aber natürlicherweise die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten \dot{q} . Bilden wir nun das Differential der Lagrangefunktion

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q^k} dq^k + p_k d\dot{q}^k + dt \partial_t L \quad \text{mit} \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}, \quad (2.7.1)$$

sehen wir, daß die durch

$$H(q, p, t) = p_k \dot{q}^k(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p), t) \quad (2.7.2)$$

definierte Funktion, die **Hamiltonfunktion**, den geeigneten Ausgangspunkt für eine solche Beschreibung darstellt, denn es gilt

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + dt \partial_t H = -\frac{\partial L}{\partial q^k} dq^k - dt \partial_t L + \dot{q}^k dp_k. \quad (2.7.3)$$

Das bedeutet, daß das Differential der Hamiltonfunktion gerade der vorausgesetzten Abhängigkeit von den q und p entspricht. Den Zusammenhang zwischen der Lagrangefunktion L und der Hamiltonfunktion H nennt man übrigens **Legendretransformation**. Sie setzt voraus, daß sich die \dot{q} durch die p ausdrücken lassen, d.h. daß ein **reguläres System** vorliegt. Auf die Behandlung **singulärer Systeme**, bei denen dies nicht der Fall ist, kommen wir weiter unten zurück, da diese in Gestalt der sogenannten **Eichfeldtheorien** in der modernen Quantenphysik der Elementarteilchen eine bedeutende Rolle spielen.

Für reguläre Systeme liest man durch Vergleich der beiden Ausdrücke für die Differentialformen die Beziehungen

$$\frac{\partial H}{\partial q^k} = -\frac{\partial L}{\partial q^k}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}^k, \quad \partial_t H = -\partial_t L \quad (2.7.4)$$

ab. Die Formulierung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Hamiltonfunktion folgt nun daraus direkt vermöge der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}, \quad \dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \quad (2.7.5)$$

Das sind die **Hamiltonschen kanonischen Gleichungen**. Es ist klar, daß damit allein nicht allzu viel gewonnen sein kann, denn es handelt sich lediglich um eine Umformulierung der Euler-Lagrangegleichungen durch Elimination der \dot{q}^k zugunsten der p_k . Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind dadurch übrigens zu Differentialgleichungen erster Ordnung geworden, was sich weiter unten noch als nützlich erweisen wird.

Nun erinnern wir uns daran, daß die Euler-Lagrange-Gleichungen aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip hergeleitet werden konnten. Betrachten wir also die Variation des Wirkungsfunktional, jetzt formuliert mit Hilfe der Hamiltonschen Funktion:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt (p_k \dot{q}^k - H) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\delta p_k \left(\dot{q}^k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) - \delta q^k \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q^k} \right) \right]. \quad (2.7.6)$$

Dabei haben wir nur benutzt, daß im Hamiltonschen Prinzip per definitionem so zu variieren ist, daß die Variationen der q an den Rändern des betrachteten Zeitintervalls verschwinden. An die \dot{q} bzw. die p haben wir keine Randbedingungen gestellt. Aus der obigen Form der Variation des Wirkungsfunktional erkennen wir nun, daß die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen (2.7.5) folgen, wenn man neben den q auch die p als unabhängige Variablen betrachtet und das Wirkungsfunktional

$$I[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} dt [p_k \dot{q}^k - H(q, p, t)] \quad (2.7.7)$$

unter an den Rändern des Integrationsbereiches verschwindenden Variationen der q extremal macht. Dies bezeichnen wir als **erweitertes Hamiltonsches Prinzip**.

Die kanonischen Impulse stellen in dieser Variationsaufgabe also unabhängige Variable dar. Daher bezeichnen wir die durch die $2f$ gebildeten kanonischen Koordinaten (q, p) parametrisierte aufgespannte Mannigfaltigkeit als **Phasenraum** und betrachten die Bewegung nicht nur als Bahnkurve im Konfigurationsraum (parametrisiert durch die q), sondern auch als **Trajektorie im Phasenraum**. Das Wirkungsfunktional ist in Abhängigkeit dieser Trajektorien zu lesen.

2.8 Kanonische Transformationen

Die Bedeutung dieser Beobachtung besteht nun darin, daß aufgrund des erweiterten Hamiltonschen Prinzips die Bewegungsgleichung nicht nur forminvariant unter allgemeinem Wechsel der Koordinaten q des Konfigurationsraums (in Gestalt der Euler-Lagrange-Gleichungen) sind, sondern auch unter allgemeineren die generalisierten Impulse einschließenden Transformationen, die die Variation des im Phasenraum formulierten Wirkungsfunktionals (2.7.7) invariant lassen. Solche Transformationen bezeichnen wir mit Hamilton als **kanonische Transformationen**.

Um die Bedingungen an eine beliebige Transformation

$$q^k = q^k(Q^k, P_k, t), \quad p_k = p_k(Q^k, P_k, t) \quad (2.8.1)$$

dafür zu finden, daß sie die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen forminvariant lassen, müssen wir nur verlangen, daß die Variation des Wirkungsfunktionals (2.7.7) in beiden kanonischen Koordinatensystemen gleich ist. Das bedeutet, daß

$$\Delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt [p_k \dot{q}^k - H - P_k \dot{Q}^k + H'], \quad (2.8.2)$$

gelesen als Wegintegral im sogenannten erweiterten von (t, q, p) parametrisierten Phasenraum, ein totales Differential sein muß:

$$dt(H' - H) + dq^k p_k - dQ^k P_k = df. \quad (2.8.3)$$

Dabei ist f gemäß der auf der linken Seite auftretenden Differentialformen als eine Funktion von q, Q und t aufzufassen. Der Vergleich zwischen der linken und rechten Seite zeigt weiterhin, daß

$$H' - H = \partial_t f, \quad p_k = \frac{\partial f}{\partial q^k}, \quad P_k = -\frac{\partial f}{\partial Q^k} \quad (2.8.4)$$

gilt. Die Transformation (2.8.1) ist also genau dann eine kanonische Transformation, wenn es eine Funktion f der alten und der neuen Koordinaten gibt, so daß die Beziehungen (2.8.4) gelten. Nach dem Lemma von Poincaré ist das wenigstens lokal nur dann der Fall, wenn

$$\frac{\partial p_k}{\partial Q^l} = -\frac{\partial P_l}{\partial q^k} \quad (2.8.5)$$

ist.

Es ist klar, daß es viel einfacher ist, wenn wir die Funktion f willkürlich vorgeben und die „alten Koordinaten“ (q, p) mit Hilfe der Bedingung (2.8.4) durch die „neuen Koordinaten“ (Q, P) ausdrücken. Wir nennen daher f auch **Erzeugende der kanonischen Transformation**. Ist f explizit zeitabhängig, dürfen wir dabei nicht vergessen, auch die Hamiltonfunktion gemäß (2.8.4) zu transformieren.

Es ist manchmal allerdings bequemer, die erzeugende Funktion mit Hilfe anderer Paare alter und neuer Koordinaten auszudrücken. Hier bewährt sich das schon bei der Herleitung der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen angewandte Prinzip der **Legendretransformation**. Als Beispiel leiten wir den

2.8. Kanonische Transformationen

für das folgende wichtigsten Fall her, daß wir die Erzeugende als Funktion g der alten Konfigurationsraumkoordinaten q und der neuen kanonischen Impulse P vorgeben. Dann schreiben wir

$$f(q, Q, t) = g_1(q, P, t) - Q^k P_k \Rightarrow df = dq^k \frac{\partial g_1}{\partial q^k} - dQ^k P_k + \left(\frac{\partial g_1}{\partial P_k} - Q^k \right) dP_k. \quad (2.8.6)$$

Das bedeutet, daß

$$Q^k = \frac{\partial g_1}{\partial P_k} \quad (2.8.7)$$

sein muß, damit f die geforderte Abhängigkeit von q und Q hat. Setzen wir (2.8.6) in (2.8.4) ein, finden wir, daß die kanonische Transformation durch g gemäß

$$H' = H + \partial_t g_1, \quad p_k = \frac{\partial g_1}{\partial q^k}, \quad Q^k = \frac{\partial g_1}{\partial P_k} \quad (2.8.8)$$

erzeugt wird. Aus der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen von g_1 nach den q und P folgt daraus die Beziehung

$$\frac{\partial p_k}{\partial P_l} = \frac{\partial Q^l}{\partial q^k}. \quad (2.8.9)$$

Als nächstes betrachten wir die Legendretransformation

$$f(q, Q, t) = g_2(p, Q, t) + q^k p_k \Rightarrow df = dp_k \left(\frac{\partial g_2}{\partial p_k} + q^k \right) + dQ^k \frac{\partial g_2}{\partial Q^k} + dq^k p_k. \quad (2.8.10)$$

Daraus folgt wieder wie im bei (2.8.6)

$$H' = H + \partial_t g_2, \quad q^k = -\frac{\partial g_2}{\partial p_k}, \quad P_k = -\frac{\partial g_2}{\partial Q^k}. \quad (2.8.11)$$

Die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitung von g_2 nach p und Q liefert damit die Bedingung

$$\frac{\partial q^k}{\partial Q^l} = \frac{\partial P_l}{\partial p_k}. \quad (2.8.12)$$

Schließlich kombinieren wir beide Legendretransformationen (2.8.6) und (2.8.10) indem wir von g_2 ausgehen:

$$g_2(p, Q, t) = g_3(p, P, t) - Q^k P_k \Rightarrow dg_2 = dp_k \frac{\partial g_3}{\partial p_k} + dP_k \left(\frac{\partial g_3}{\partial P_k} - Q^k \right) - dQ^k P_k. \quad (2.8.13)$$

Mit (2.8.11) folgt daraus

$$H' = H + \partial_t g_3, \quad q^k = -\frac{\partial g_3}{\partial p_k}, \quad Q^k = \frac{\partial g_3}{\partial P_k}. \quad (2.8.14)$$

Die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen von g_3 liefert schließlich die Bedingung

$$\frac{\partial q^k}{\partial P_l} = -\frac{\partial Q^l}{\partial p_k}. \quad (2.8.15)$$

Aus den Bedingungen (2.8.5, 2.8.9, 2.8.12, 2.8.15) können wir nun die Unabhängigkeit der Poissonklammer von der Wahl der kanonisch konjugierten Phasenraumvariablen nachweisen, also die **Kovarianz der Poissonklammer** bzgl. kanonischer Transformationen. Dazu schreiben wir für zwei beliebige Phasenraumfunktionen A und B

$$\begin{aligned} \{A, B\}_{\text{pb}}^{(Q, P)} &= \frac{\partial A}{\partial Q^k} \frac{\partial B}{\partial P_k} - (A, B) \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial Q^k} + \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q^k} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial q^m} \frac{\partial q^m}{\partial P_k} + \frac{\partial B}{\partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial P_k} \right) - (A, B), \end{aligned} \quad (2.8.16)$$

wobei (A, B) für den Ausdruck steht, der durch den voranstehenden Term durch Vertauschen von A mit B hervorgeht. Ausmultiplizieren der Klammern und Berücksichtigung der Antisymmetrisierung bzgl. Vertauschen von A und B ergibt unter Zuhilfenahme der Bedingungen (2.8.5, 2.8.9, 2.8.12, 2.8.15) in der Tat die Poissonklammer geschrieben in den „alten Variablen“ q und p . Als Beispiel für diese Rechnung betrachten wir den antisymmetrisierten ersten Term

$$\frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial B}{\partial q^m} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q^k} \frac{\partial q^m}{\partial P_k} - \frac{\partial q^m}{\partial Q^k} \frac{\partial q_j}{\partial P_k} \right) = - \frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial B}{\partial q^m} \underbrace{\left(\frac{\partial q^j}{\partial Q^k} \frac{\partial q^m}{\partial p_m} + \frac{\partial q^j}{\partial P_k} \frac{\partial p_m}{\partial p_m} \right)}_{\partial q^j / \partial p_m} = 0. \quad (2.8.17)$$

Zusammenfassen der übrigen Terme ergibt dann in der Tat

$$\{A, B\}_{\text{pb}}^{(Q, P)} = \{A, B\}_{\text{pb}}^{(q, p)} := \{A, B\}_{\text{pb}}. \quad (2.8.18)$$

2.9 Die Hamilton–Jacobische Differentialgleichung

Nachdem wir nun die Eigenschaften der kanonischen Transformationen kennen, die die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen kovariant lassen, liegt die Frage nahe, ob es uns nicht gelingen kann, solche Phasenraumkoordinaten (Q, P) zu finden, so daß die Bewegung durch $(Q, P) = \text{const}$, beschrieben werden. Wegen der Invarianz der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen bedeutet das

$$\frac{\partial H'}{\partial Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = 0. \quad (2.9.1)$$

Das bedeutet, daß $H'(Q, P, t) = F(t)$ sein muß. Ist nun aber g Erzeugende der gesuchten kanonischen Transformation der Phasenraumkoordinaten (q, p) zu den neuen Phasenraumkoordinaten (Q, P) , so ist $\tilde{g}(q, P, t) = g(q, P, t) + G(t)$ erzeugende Funktion derselben Transformation, nur der Wert von H' ändert sich zu $\tilde{H}' = H' + dG/dt$. Wählen wir also $G = -\int dt F(t)$, können wir auch o.B.d.A. fordern, daß

$$H'(Q', P', t) = 0 \quad (2.9.2)$$

sein soll. Sei nun $g(q, P, t)$ die Erzeugende der gesuchten Transformation, so folgt daraus

$$H'(Q', P', t) = H(q, p, t) + \partial_t g(q, P', t) = 0. \quad (2.9.3)$$

Von (2.8.8) wissen wir aber, daß $p = \partial_q g$ ist, so daß wir schließlich die **Hamilton–Jacobische partielle Differentialgleichung** (im folgenden der Kürze halber einfach HJpDGL genannt)

$$H\left(q, \frac{\partial g}{\partial q}, t\right) + \partial_t g = 0 \quad (2.9.4)$$

finden.

Es ist klar, daß diese partielle Differentialgleichung von $f + 1$ unabhängigen Veränderlichen, nämlich q und t , $f + 1$ Integrationskonstanten enthält. Von diesen ist aber eine irrelevant, weil sie lediglich einen konstanten Term für H bedeutet, der physikalisch offensichtlich insignifikant ist. Es bleiben also f nichttriviale Integrationskonstanten übrig, die wir mit den neuen kanonischen Impulsen P identifizieren. Hat man aber eine Lösung der HJpDGL (2.9.4) gefunden, so folgt die Bahn aus den f Gleichungen $Q = \partial g / \partial P = \text{const}$.

Im Falle konservativer Systeme, d.h. für solche, deren Hamiltonfunktion (und damit auch ihre Lagrangefunktion) nicht explizit von der Zeit abhängt, also für die $\partial_t H = -\partial_t L = 0$ gilt, vereinfacht sich die HJpDGL durch Einführung der nach dem Noether-Theorem erhaltenen Energie als kanonischem Impuls, denn dann gilt

$$\begin{aligned} H = E = -\partial_t g = \text{const} &\Rightarrow g = -Et + S(q, E, P_2, \dots, P_f), \\ Q^1 = \frac{\partial g}{\partial E} = -t + \frac{\partial S}{\partial E}, \quad Q^k = \frac{\partial S}{\partial P_k} &\text{ für } k = 2, \dots, f. \end{aligned} \quad (2.9.5)$$

2.10 Die symplektische Struktur des Phasenraums

Im folgenden verwenden wir das erweiterte Hamiltonsche Prinzip um einen Einblick in die lokale geometrische Struktur des Phasenraums zu gewinnen. Dazu gehen wir von der oben hergeleiteten Kovarianzbedingung (2.8.3) aus, die wir jedoch in der Abhängigkeit von den neuen Koordinaten (Q, P) und in seiner Gestalt in Form von Zeitableitungen anschreiben:

$$p_k \dot{q}^k - H(q^k, p_k, t) = P_k \dot{Q}^k - H'(Q^k, P_k, t) + \frac{d}{dt} F(Q, P, t). \quad (2.10.1)$$

Integration dieser Gleichung bzgl. t von t_1 bis t_2 und Substitution der (q, p) zugunsten der (Q, P) auf der linken Seite ergibt schließlich

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\dot{Q}^j \left(P_j - p_k \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} \right) - p_k \dot{P}_j \frac{\partial q^k}{\partial P_j} - \left(H' - H + p_k \frac{\partial q^k}{\partial t} \right) \right] = -F(Q, P, t) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (2.10.2)$$

Jetzt fassen wir das linksstehende Integral als Kurvenintegral im sogenannten erweiterten Phasenraum, der durch die $2f + 1$ Parameter (Q, P, t) parametrisiert wird, auf. Da die rechte Seite nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt, muß nach dem Poincaréschen Lemma der Integrand ein totales Differential sein. Dabei ist $-F$ das Potential des über die Kurve integrierten Feldes im erweiterten Phasenraum:

$$\frac{\partial(-F)}{\partial Q^j} = P_j - p_k \frac{\partial q^k}{\partial Q^j}, \quad \frac{\partial(-F)}{\partial P_l} = -p_k \frac{\partial q^k}{\partial P_l}. \quad (2.10.3)$$

Das ist aber nur der Fall, wenn die Integritätsbedingungen, die aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen von F nach den Q und P folgen, erfüllt sind:

$$(Q^j, P_l)_{\text{lb}} := \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} \frac{\partial p_k}{\partial P_l} - \frac{\partial q^k}{\partial P_l} \frac{\partial p_k}{\partial Q^j} = \delta_{jl}, \quad (Q^j, Q^l)_{\text{lb}} = (P_j, P_l)_{\text{lb}} = 0. \quad (2.10.4)$$

Das für beliebige Phasenraumtransformationen $q(Q, P, t)$, $p(Q, P, t)$ definierte Objekt $(X, Y)_{\text{lb}}$, wobei für X und Y beliebige neue Phasenraumkoordinaten (Q, P) eingesetzt werden können, heißt **Lagrangeklammer**. Eine kanonische Transformation liegt also genau dann vor, wenn die Lagrangeklammern

2. Kanonische Mechanik

invariant unter dieser Transformation sind. Es ist nämlich klar, daß für die identische Transformation $Q = q, P = p$ die Lagrangeklammerbeziehungen erfüllt sind.

Die Lagrangeklammer stellt nun aber keine besonders bequem zu berechnende Konstruktion dar, wenn es darum geht, für gegebene neue Koordinaten (Q, P) zu entscheiden, ob sie eine kanonische Transformation der (q, p) darstellen. Wir wollen die Lagrangeklammerbedingungen nun in Ableitungen der neuen Phasenraumkoordinaten nach den alten ausdrücken. Dazu betrachten wir die Jacobimatrix der inversen kanonischen Transformation

$$J = \begin{pmatrix} \partial Q^i / \partial q^j & \partial Q^i / \partial p_j \\ \partial P_i / \partial q^j & \partial P_i / \partial p_j \end{pmatrix}. \quad (2.10.5)$$

Dabei sollen die partiellen Ableitungen jeweils als $f \times f$ -Blockmatrix verstanden werden. Damit ist J insgesamt eine $(2f) \times (2f)$ -Matrix. Die Lagrangeklammerbedingungen lassen sich nun durch die inverse Matrix

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \partial q^j / \partial Q^i & \partial p_j / \partial Q^i \\ \partial q^j / \partial P_i & \partial p_j / \partial P_i \end{pmatrix} \quad (2.10.6)$$

ausdrücken. Dazu führen wir nun die sogenannte **symplektische Fundamentalmatrix**

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10.7)$$

ein. Offenbar gilt $S^{-1} = -S = S^t$. Man bezeichnet einen $2f$ -dimensionalen Vektorraum mit einer antisymmetrischen Bilinearform als **symplektischen Vektorraum**. Analog dazu, wie im euklidischen Raum die Einheitsmatrix das kanonische Skalarprodukt darstellt, gilt dies für die antisymmetrische Bilinearform eines symplektischen Vektorraums mit der symplektischen Fundamentalmatrix S .

Das Analogon zu den orthogonalen Transformationen im euklidischen Raum entsprechen bilden im symplektischen Raum die **symplektischen Abbildungen**, die entsprechend als diejenigen Automorphismen im \mathbb{R}^{2f} definiert sind, die das durch S definierte symplektische Produkt $(x, y)_s = x^t S y$ zweier beliebiger Vektoren x und y invariant lassen. Ist T die darstellende Matrix einer symplektischen Abbildung, dann muß gelten $T^t S T = S$.

Man kann nun die Lagrangeklammerbedingungen (2.10.4) kurz wie folgt schreiben:

$$(J^{-1})^t S^t J^{-1} = S^t \Rightarrow J S J^t = S. \quad (2.10.8)$$

Das bedeutet aber, daß J in jedem Punkt des Phasenraums eine symplektische Transformation ist. Das bedeutet kurz, daß eine Transformation $(q, p) \leftrightarrow (Q, P)$ genau dann kanonisch ist, wenn sie **lokal symplektisch ist**. Man bezeichnet solche lokalen symplektischen Transformationen einer Mannigfaltigkeit auch kurz als **Symplektomorphismen**.

Die in (2.10.8) letztgenannte Form der Lagrangeklammerbedingungen lassen sich in Komponenten zerlegt kurz wie folgt schreiben

$$\{Q^j, P_l\}_{\text{pb}} := \frac{\partial Q^j}{\partial q^k} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q^j}{\partial p_k} \frac{\partial P_l}{\partial q^k} = \delta_{jl}, \quad \{Q^j, Q^l\}_{\text{pb}} = \{P_j, P_l\}_{\text{pb}} = 0. \quad (2.10.9)$$

Damit ist aber eine **manifest kovariante Charakterisierung** der lokal symplektischen Struktur des Phasenraums durch die eben eingeführten Poissonklammern

$$\{A, B\}_{\text{pb}} = \frac{\partial A}{\partial q^k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q^k} \quad (2.10.10)$$

2.11. Das Noether-Theorem in Hamiltonscher Formulierung

gegeben, wobei A und B beliebige im Phasenraum definierte Funktionen sind.

Auch die Bewegungsgleichungen lassen sich leicht mit Hilfe von Poissonklammern formulieren. Die totale Zeitableitung einer im Phasenraum definierten Funktion entlang der durch die Bewegung des Systems gegebenen Trajektorie, ist nämlich offenbar durch

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial A}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial A}{\partial t} = \{A, H\}_{\text{pb}} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.10.11)$$

gegeben. Dabei haben wir die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen (2.7.5) benutzt und einer eventuellen expliziten (d.h. nicht durch die Trajektorie $[q(t), p(t)]$ eingepprägten) Zeitabhängigkeit, von A Rechnung getragen.

Übungen zur Poissonklammer

(1) Man zeige, daß die Poissonklammern auf dem linearen Funktionenraum $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$, d.h. auf dem Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, die den Phasenraum in die reellen Zahlen oder komplexen (wir haben wieder allgemein \mathbb{K} geschrieben) abbilden, ein **Lieprodukt** bilden. Neben der Tatsache, daß die Poissonklammern in beiden Argumenten linear sind bedeutet das, daß für drei beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen A , B und C die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} \{A, B\}_{\text{pb}} &= -\{B, A\}_{\text{pb}}, \\ \{A, \{B, C\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} + \{B, \{C, A\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} + \{C, \{A, B\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10.12)$$

Die zweite Zeile heißt **Jacobiidentität**. Die so definierte Algebra der Poissonklammern macht also den Funktionenraum zur **Liealgebra**.

(2) Man zeige, daß die Poissonklammern zusätzlich zur Lieproduktstruktur auch die Derivationseigenschaft

$$\{AB, C\}_{\text{pb}} = A\{B, C\}_{\text{pb}} + \{A, C\}_{\text{pb}}B, \quad (2.10.13)$$

aufweisen, wobei das Produkt zweier Funktionen punktweise aufgefaßt wird.

2.11 Das Noether-Theorem in Hamiltonscher Formulierung

Wir betrachten jetzt eine Erzeugende $F(q^k, P_k, t)$, die eine nur infinitesimal von der Identität verschiedene kanonische Transformation erzeugt:

$$F(q^k, P_k, t) = q^k P_k + G(q^k, P_k, t) \delta \alpha. \quad (2.11.1)$$

Dabei soll $\delta \alpha$ ein von den Phasenraumkoordinaten und der Zeit unabhängiger „infinitesimaler“ Parameter sein, der die Transformation parametrisiert (z.B. bei Drehungen ein infinitesimaler Drehwinkel).

Gemäß (2.8.8) gilt

$$\begin{aligned} p_k &= P_k + \frac{\partial G(q^k, P_k, t)}{\partial q^k} \delta \alpha = P_k + \frac{\partial G(q^k, P_k, t)}{\partial q^k} \delta \alpha + \mathcal{O}(\delta \alpha^2), \\ Q^k &= q^k + \frac{\partial G(q^k, P_k, t)}{\partial P_k} \delta \alpha = q^k + \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p_k} \delta \alpha + \mathcal{O}(\delta \alpha^2). \end{aligned} \quad (2.11.2)$$

2. Kanonische Mechanik

Es gilt also bis auf Größen der Ordnung $\delta\alpha^2$

$$\delta q^k = Q^k - q^k = \frac{\partial G}{\partial p_k} \delta\alpha, \quad \delta p_k = P_k - p_k = -\frac{\partial G}{\partial q^k} \delta\alpha. \quad (2.11.3)$$

Für eine beliebige Observable $O(q^k, p_k, t)$ gilt dann

$$\delta O = \delta q^k \frac{\partial O}{\partial q^k} + \delta p_k \frac{\partial O}{\partial p_k} + \mathcal{O}(\delta\alpha^2) = \{O, G\}_{\text{pb}} \delta\alpha + \mathcal{O}(\delta\alpha^2). \quad (2.11.4)$$

Für den Hamilton-Operator gilt gemäß (2.8.8)

$$H'(Q^k, P_k, t) = H(q^k, p_k, t) + \frac{\partial G(q^k, p_k, t)}{\partial t} \delta\alpha + \mathcal{O}(\delta\alpha^2). \quad (2.11.5)$$

Eine kanonische Transformation ist nun eine **Symmetrietransformation**, wenn die transformierte Hamilton-Funktion dieselbe funktionale Form wie die ursprüngliche besitzt, d.h. wenn

$$H'(Q^k, P_k, t) - H(Q^k, P_k, t) = 0 \quad (2.11.6)$$

ist. Setzt man hierin (2.11.5) ein und entwickelt bis zu Größen der Ordnung $\delta\alpha$, erhält man daraus die **Symmetriebedingung**

$$\begin{aligned} H'(Q^k, P_k, t) - H(Q^k, P_k, t) &= H(q^k, p_k, t) + \frac{\partial G(q^k, p_k, t)}{\partial t} \delta\alpha \\ &\quad - \left[H(q^k, p_k, t) + \delta q^k \frac{\partial H(q^k, p_k, t)}{\partial q^k} + \delta p_k \frac{\partial H(q^k, p_k, t)}{\partial p_k} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\delta\alpha^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.11.7)$$

Zusammengefaßt und mit (2.11.3) folgt

$$\left[\{G, H\}_{\text{pb}} + \frac{\partial G}{\partial t} \right] \delta\alpha + \mathcal{O}(\delta\alpha^2) = 0. \quad (2.11.8)$$

Bis auf Größen der Ordnung $\delta\alpha^2$ ist also

$$\{G, H\}_{\text{pb}} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad (2.11.9)$$

falls die kanonische Transformation eine Symmetrietransformation ist.

Für die Trajektorie des Punktteilchensystems im Phasenraum, die die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen erfüllen gilt dann aber wegen (2.10.11)

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\}_{\text{pb}} + \frac{\partial G}{\partial t} \stackrel{(2.11.9)}{=} 0 \quad (2.11.10)$$

und damit das **Noethersche Theorem** in der folgenden besonders eleganten Gestalt:

Ist die Hamiltonfunktion unter einer durch eine Einparameter-Lie-Gruppe³ gegebenen kanonischen Transformation invariant, so ist die Erzeugende der dazugehörigen infinitesimalen Transformation eine

³darunter verstehen wir eine Liegruppe, deren Transformationen nur durch einen Parameter bestimmt sind, z.B. die Drehung um eine feste Achse

Erhaltungsgröße der Bewegung. Umgekehrt ist jede Erhaltungsgröße Erzeugende einer Einparameter-Lie-Symmetriegruppe des Systems.

Die Zeitentwicklung selbst stellt gemäß (2.10.11) eine kanonische Transformation dar, deren infinitesimale Erzeugende die Hamiltonfunktion ist. Die Integration der Bewegungsgleichungen ergibt also eine Einparametergruppe, die man als **Zeitentwicklung des Systems** oder kurz als den **Fluß** bezeichnet. Das System ist zu jedem Zeitpunkt t vermöge der Hamiltonschen Gleichungen aus den Anfangsbedingungen $(q(0), p(0))$ bestimmt. Der Fluß ist dann die Abbildung

$$\Phi_t : \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_t(q(0), p(0)) = (q(t), p(t)). \quad (2.11.11)$$

2.12 Liegruppen und Liealgebren

Wir können nun diese physikalischen Betrachtungen mathematisch formalisieren. Dazu führen wir zu einem beliebiges Phasenraumfeld $G \in C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ die **Lieableitung** ein. Die Lieableitung ist ein linearer auf $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ definierter Differentialoperator, der durch die Poissonklammer wie folgt gegeben ist:

$$\mathfrak{L}_G O = \{O, G\}_{\text{pb}}. \quad (2.12.1)$$

Wir können nun die „infinitesimale Transformation“ (2.11.4) mathematisch korrekt wie folgt definieren. Sei G die Erzeugende der Transformation und definieren wir für jede Observable durch

$$\frac{dO_\alpha(q, p)}{d\alpha} = \mathfrak{L}_G O(q, p), \quad O_{\alpha=0}(q, p) = O(q, p) \quad (2.12.2)$$

eine Transformation $O_{\alpha=0} \rightarrow O_\alpha$, dann haben wir in der Umgebung von (q, p) bis auf Größen zweiter Ordnung in $\delta\alpha$ wieder die infinitesimale Transformation (2.11.4) erzeugt.

Daß (2.12.2) darüber hinaus auch eine Schar endlicher kanonischer Transformationen, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Scharparameter ist, definiert, erkennen wir wie folgt. Formal können wir nämlich (2.12.2) mit Hilfe der **Operatorexponentialfunktion** integrieren:

$$\begin{aligned} O_\alpha(q, p) &= O(q^\alpha, p_\alpha) = \exp(\alpha \mathfrak{L}_{G \cdot}) O(q, p) := \\ &:= O(q, p) + \alpha \{O(q, p), G\}_{\text{pb}} + \frac{\alpha^2}{2!} \{ \{O(q, p), G\}_{\text{pb}}, G \}_{\text{pb}} + \dots := \\ &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \{O, G\}_k \end{aligned} \quad (2.12.3)$$

Wir gehen auf die Diskussion der Konvergenz dieser Reihe nicht näher ein. Wir werden unten an einigen Beispielen diese Konvergenz explizit nachweisen. Wenn sie aber konvergiert, löst sie auch die Differentialgleichung (2.12.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \exp(\alpha \mathfrak{L}_{G \cdot}) O(q, p) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{k!} \{O, G\}_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \{G, O\}_{k+1} = \{ \exp(\alpha \mathfrak{L}_{G \cdot}) O, G \}_{\text{pb}} = \\ &= \{O_\alpha, G\}_{\text{pb}}. \end{aligned} \quad (2.12.4)$$

Damit ist gezeigt, daß die Einparameterliegruppen durch ihre „infinitesimalen Erzeugenden“ eindeutig definiert sind.

2. Kanonische Mechanik

Das ist nun mathematisch insofern interessant, als die infinitesimalen Generatoren zusammen mit den Poissonklammern eine **Liealgebra** bilden, wie wir oben bereits in einer Übungsaufgabe gezeigt haben, d.h. jeder Liegruppe ist eindeutig eine Liealgebra zugeordnet, und wenigstens lokal für die Einparameteruntergruppen der Liegruppe kann man durch Integration der Differentialgleichung (2.12.2) die Liegruppe aus ihrer Liealgebra rekonstruieren.

Die Einparametergruppen sind **homomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen**. Um dies zu sehen, sei G der Generator der Einparametergruppe. Dann definieren wir das Gruppenelement als den in (2.12.3) definierten Operator

$$g_\alpha = \exp(\alpha \mathcal{L}_G), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.12.5)$$

Wir wollen nun zeigen, daß für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $g_\alpha g_\beta = g_{\alpha+\beta} = g_\beta g_\alpha$. Wegen der algebraischen Produkteigenschaften der Poissonklammer gilt

$$\begin{aligned} g_\alpha g_\beta &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha \mathcal{L}_G)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\beta \mathcal{L}_G)^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(\alpha \mathcal{L}_G)^m (\beta \mathcal{L}_G)^{n-m}}{m! (n-m)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\alpha \mathcal{L}_G)^m (\beta \mathcal{L}_G)^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(\alpha + \beta) \mathcal{L}_G]^n}{n!} = \exp[(\alpha + \beta) \mathcal{L}_G]. \end{aligned} \quad (2.12.6)$$

Dies zeigt schon vollständig, daß die Abbildung $\alpha \mapsto g_\alpha$ einen Homomorphismus von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die von G erzeugte Einparametergruppe darstellt.

Wir betrachten im folgenden auch kompliziertere Gruppen, die von endlich vielen Parametern abhängig sind. Wir behandeln auch hier wieder nur solche Gruppen, die als kanonische Transformationen von Phasenraumfunktionen erzeugt werden.

Seien G_a mit $a \in \{1, 2, \dots, d\}$ linear unabhängige Phasenraumfunktionen. Ist dann der von ihnen aufgespannte Untervektorraum $U = \text{span}(G_a)_{a \in \{1, \dots, d\}}$ bzgl. der Poissonklammeralgebra abgeschlossen, so heißt U eine **Unteralgebra** der Liealgebra der Phasenraumfunktionen.

Zur algebraischen Abgeschlossenheit ist es offenbar notwendig und hinreichend, daß es für je zwei Basisfunktionen von U reelle Zahlen f^c_{ab} gibt, so daß

$$\{G_a, G_b\}_{\text{pb}} = f^c_{ab} G_c = -f^c_{ba} G_c. \quad (2.12.7)$$

Die f^c_{ab} werden als die **antisymmetrischen Strukturkoeffizienten der Liealgebra** bzw. der von ihnen erzeugten Liegruppe bezeichnet. Diese Liegruppe wird dabei definitionsgemäß durch die Elemente

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = \exp(\alpha_a \mathcal{L}_{G_a}) \quad (2.12.8)$$

algebraisch erzeugt.

Zu beachten ist, daß i.a. diese Gruppe **nicht** kommutativ ist; das ist nur der Fall, wenn die G_a wechselseitig konstante Poissonklammern besitzen. Allgemein gilt nämlich für eine beliebige Phasenraumfunktion O

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_A \mathcal{L}_B - \mathcal{L}_B \mathcal{L}_A)O &= \left\{ \{O, B\}_{\text{pb}}, A \right\}_{\text{pb}} - \left\{ \{O, A\}_{\text{pb}}, B \right\}_{\text{pb}} = \\ &= \left\{ O, \{B, A\}_{\text{pb}} \right\}_{\text{pb}} = \mathcal{L}_{\{B, A\}_{\text{pb}}} O, \end{aligned} \quad (2.12.9)$$

wobei wir von den Liealgebraeigenschaften (2.10.12) Gebrauch gemacht haben.

Dies zeigt, daß die \mathcal{L}_{G_a} genau dann vertauschen, wenn die Poissonklammern der G_a untereinander jeweils konstant sind. Dann und nur dann ist die erzeugte Liealgebra isomorph zur additiven Gruppe des \mathbb{R}^d .

Im allgemeinen Fall ist übrigens die Exponentialabbildung noch nicht einmal surjektiv auf die von den Elementen (2.12.8) algebraisch erzeugte Gruppe.

2.13 Die Galileigruppe

Wir betrachten nun die Galileigruppe, also die der Newtonschen Mechanik zugrundeliegende Symmetriegruppe von Raum und Zeit im jetzt vollständig entwickelten System des Hamiltonformalismus. Von unserer Behandlung im Rahmen des Lagrangeformalismus in Abschnitt 2.5 wissen wir, daß wir zehn unabhängige Erhaltungsgrößen besitzen, die jede eine Einparameteruntergruppe der Galileigruppe im Sinne der Liealgebra erzeugen, nämlich die Zeittranslationen (Hamiltonfunktion, also die Gesamtenergie des Systems), die Raumtranslationen (drei Impulskomponenten), die Drehungen (drei Drehimpulskomponenten) und die Galileiboosts (drei Schwerpunktskomponenten).

Wir müssen also nur die Erzeugenden der entsprechenden zehn infinitesimalen Transformationen finden. Um dieser Betrachtung allerdings etwas Neues gegenüber der Betrachtung im Lagrangeformalismus abzugewinnen, wollen wir uns zugleich mit der Auffindung möglichst allgemeiner Formen des Hamiltonoperators beschäftigen, die mit der Galileisymmetrie verträglich sind.

Dazu können wir uns elegant des Poissonklammerformalismus bedienen, indem wir die oben genannten geometrisch-kinematischen Bedeutungen der Erzeuger, die dem Noether-Theorem zufolge dann allesamt automatisch Erhaltungsgrößen sein müssen, ausnützen. Dazu verwenden wir Gl. (2.11.4). Wir gehen von einem allgemeinen N -Teilchenproblem aus, d.h. wir haben es mit einem $6N$ -dimensionalen Phasenraum, welcher durch die $6N$ kartesischen Orts- und Impulskomponenten der Teilchen parametrisiert sei, d.h. wir verwenden als Phasenraumkoordinaten $x^{(k)}$ und $p^{(k)}$, wobei $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ die Teilchen durchnummeriert.

Die Erzeugenden der Transformationen müssen nun, wie alle Observablen Funktionen dieser $6N$ Koordinaten sein. Wir beginnen mit den **räumlichen Translationen** in eine beliebige Raumrichtung n :

$$\delta t = 0, \quad \delta x^{(k)} = n \delta \alpha, \quad \delta p^{(k)} = 0. \quad (2.13.1)$$

Für die entsprechende kanonische Erzeugende $\delta \alpha P_n$ muß also gemäß (2.11.4) für eine beliebige Phasenraumfunktion O gelten

$$\delta O = n \delta \alpha \sum_{k=1}^N \frac{\partial O}{\partial x^{(k)}} = \{O, P_n\}_{\text{pb}} \delta \alpha. \quad (2.13.2)$$

Schreiben wir die Poissonklammer aus,

$$\{O, P_n\}_{\text{pb}} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial O}{\partial x^{(k)}} \frac{\partial P_n}{\partial p^{(k)}} - \frac{\partial O}{\partial p^{(k)}} \frac{\partial P_n}{\partial x^{(k)}} \right], \quad (2.13.3)$$

erkennen wir durch Vergleich von rechter und linker Seite der Gl. (2.13.2), daß gelten muß

$$\frac{\partial P_n}{\partial p^{(k)}} = n, \quad \frac{\partial P_n}{\partial x^{(k)}} = 0. \quad (2.13.4)$$

Dieses System partieller Differentialgleichungen besagt, daß die Erzeugende unabhängig von den $x^{(k)}$ sein muß, und daß

$$P_n = n \sum_{k=1}^N p^{(k)} \quad (2.13.5)$$

sein muß. Da die Translation in jede beliebige Richtung \mathbf{n} Symmetrietransformation sein muß, müssen also die Größen

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^N \mathbf{p}^{(k)} \quad (2.13.6)$$

Erhaltungsgrößen sein. Der Hamiltonoperator eines abgeschlossenen Systems muß also so beschaffen sein, daß diese Größe, die natürlich der Gesamtimpuls des Systems ist, erhalten ist. Da weiter die kanonische Transformation explizit zeitunabhängig wählbar ist, muß also gemäß (2.11.10) die Poissonklammer der Hamiltonfunktion mit allen drei Komponenten des Gesamtimpulses verschwinden. Ausführen der Poissonklammer ergibt die Bedingung

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{(k)}} = 0. \quad (2.13.7)$$

Wenden wir uns nun den **Galilei-Boosts** zu. Betrachten wir einen Boost in eine beliebige Richtung \mathbf{n} . Dann ist⁴

$$\delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{n} t \delta v, \quad \delta \mathbf{p}^{(k)} = m^{(k)} \mathbf{n} \delta v. \quad (2.13.8)$$

Die Erzeugende für solche Boosts K_n finden wir in analoger Weise wie eben für die Translationen

$$K_n = \mathbf{n} \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} = \sum_{k=1}^N (\mathbf{p}^{(k)} t - m^{(k)} \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{P} t - M \mathbf{X}. \quad (2.13.9)$$

Die aus dem Noether-Theorem zu folgernde Tatsache, daß dies eine Erhaltungsgröße ist, bedeutet, daß der Schwerpunkt

$$\mathbf{X} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m^{(k)} \mathbf{x}^{(k)}, \quad \text{mit } M = \sum_{k=1}^N m^{(k)} \quad (2.13.10)$$

sich geradlinig gleichförmig bewegt.

Für die Hamiltonfunktion bedeutet die Bedingung, daß die Boosterzeuger \mathbf{K} Erhaltungsgrößen sind

$$\sum_{k=1}^N m^{(k)} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^{(k)}} = \mathbf{P} = \sum_{k=1}^N \mathbf{p}^{(k)}. \quad (2.13.11)$$

Auf genau analoge Weise folgt, daß die Erzeuger für Drehungen die drei Gesamtdrehimpulskomponenten

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}^{(k)} \times \mathbf{p}^{(k)} \quad (2.13.12)$$

sind.

2.14 Die Symmetrien des Keplerproblems

In speziellen seltenen Fällen können mechanische Systeme neben den bisher behandelten **Raum-Zeit-symmetrien**, die in dem hier betrachteten Falle der nichtrelativistischen Theorie durch die Galileigruppe gegeben ist, auch zusätzliche dynamische Symmetrien aufweisen.

⁴Wir bemerken, daß wir hier die Annahme machen, daß der kanonische Impuls \mathbf{p} mit dem mechanischen Impuls $m\mathbf{v}$ eines jeden Teilchens identisch sei. Wie wir später noch sehen werden, ist dies nicht notwendig der Fall, z.B. bei der Bewegung von Teilchen in Magnetfeldern.

2.14. Die Symmetrien des Keplerproblems

Ein interessantes Beispiel ist das Keplerproblems, das wir ja schon in Abschnitt 2.6 im Rahmen der Lagrangeschen Formulierung behandelt haben. Wir können uns auf das restringierte Problem beschränken, d.h. wir haben bereits die Schwerpunktsbewegung absepariert, und wir können das System so behandeln, daß wir ein festes Zentrum („Sonne“), welches wir in den Koordinatenursprung eines kartesischen Koordinatensystems setzen, vor uns haben, um das sich der Körper („Planet“) der reduzierten Masse μ bewegt. Der Hamiltonoperator dieses restringierten Problems ist in kartesischen Koordinaten durch

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{K}{|\mathbf{x}|}, \quad \text{mit } K = \gamma m_1 m_2 \quad (2.14.1)$$

gegeben, wobei γ die Newtonsche Gravitationskonstante ist.

Unmittelbar ersichtlich ist zunächst die verbliebene **Rotationssymmetrie**, die freilich aus der Rotationssymmetrie des Gravitationspotentials resultiert und **jedem Zentralkraftproblem** zukommt. Wie wir wissen, sind die dazugehörigen Noetherschen Erhaltungsgrößen die drei Komponenten des Drehimpulses:

$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}. \quad (2.14.2)$$

Im Sinne der obigen Liegruppentheorie sind diese gemäß dem Noetherschen Theorem die Erzeugenden der Drehungen, d.h.

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\alpha}l}) \quad (2.14.3)$$

ist der Operator einer Drehung um die Drehachse in Richtung $\boldsymbol{\alpha}/|\boldsymbol{\alpha}|$ um den Winkel $|\boldsymbol{\alpha}|$.

Durch direktes Nachrechnen, was ein wenig Ableitungsarbeit erfordert, weist man nach, daß außer dem Drehimpuls und selbstverständlich der Hamiltonfunktion selbst auch der **Runge-Lenz-Vektor** erhalten ist, also die Poissonklammern seiner Komponenten mit der Hamiltonfunktion, verschwinden. Dieser ist durch

$$\mathbf{A} = \frac{1}{K\mu} \left(\mathbf{p} \times \mathbf{l} - \mu \mathbf{x} \frac{K}{|\mathbf{x}|} \right) \quad (2.14.4)$$

gegeben. Einfacher als die Berechnung der Poissonklammern ist die Bildung der Zeitableitung, die aufgrund der Bewegungsgleichungen verschwindet.

Zunächst ist es nunmehr trivial, die Bahnkurve anzugeben. Dazu multiplizieren wir (2.14.4) mit \mathbf{x}

$$\mathbf{x} \mathbf{A} = r |\mathbf{A}| \cos \phi = \frac{l^2}{K\mu} - r \Rightarrow r = \frac{l^2}{K\mu} \frac{1}{1 + |\mathbf{A}| \cos \phi}. \quad (2.14.5)$$

Dabei ist ϕ der Winkel zwischen dem zeitlich konstanten Runge-Lenz-Vektor \mathbf{A} und dem Ortsvektor \mathbf{x} und $r = |\mathbf{x}|$. Der Vergleich mit (B.2.14) zeigt, daß

$$p = \frac{l^2}{K\mu}, \quad \epsilon = |\mathbf{A}| \quad (2.14.6)$$

Parameter und Exzentrizität des Kegelschnittes sind.

Es ist klar, daß mit \mathbf{A} auch A^2 eine Erhaltungsgröße ist, die aber nicht unabhängig von den übrigen Erhaltungsgrößen sein kann, denn \mathbf{l} und \mathbf{A} bilden ja zusammen schon sechs Erhaltungsgrößen. In der Tat liefert die direkte Rechnung

$$A^2 = 1 + \frac{2El^2}{K^2\mu}. \quad (2.14.7)$$

2. Kanonische Mechanik

Dabei ist E die Gesamtenergie des Systems, welche natürlich auch erhalten ist. Der Vergleich von (2.14.6) zeigt vollständige Übereinstimmung mit (2.6.17), wo wir durch, verglichen mit der quasi algebraischen Methode, derer wir uns hier bedient haben, mühsame Integrationen zu diesem Resultat gelangt sind.

Mit (2.14.5) ist auch erwiesen, daß A richtungsmäßig vom Zentrum zum Perihel des Kegelschnitts zeigt, und das entspricht auch der Zählung des Winkels ϕ , der hier freilich genau wie in Abschnitt 2.6 gewählt wurde. Wir sehen wieder, daß für $l \neq 0$ die konkrete Bahnform durch das Vorzeichen der Gesamtenergie bestimmt ist:

- (1) $E < 0$: Dann ist nach (2.14.7) $0 \leq \epsilon < 1$, und der Kegelschnitt ist eine Ellipse, die sich für $\epsilon = 0$ zum Kreis spezialisiert. Kehrt man in diesem Falle das Vorzeichen von A um, erhielte man einen Vektor, der vom Zentrum zum Aphel weist, was freilich an den Resultaten und der Bedeutung von A als zusätzlichen Symmetrieoperatoren nichts ändern würde.
- (2) $E = 0$: Dann ist nach (2.14.7) $\epsilon = 0$, und die Bahn eine Parabel.
- (3) $E > 0$: Dann ist nach (2.14.7) $\epsilon > 1$, und die Bahn eine Hyperbel.

Wir haben bis jetzt letztlich durch viel einfachere Rechnung lediglich die gleichen Resultate wie in Abschnitt 2.6 erhalten. Mathematisch interessant ist im jetzigen Zusammenhang die Identifikation der Symmetriegruppe, die durch die 6 unabhängigen Erhaltungsgrößen l und a erzeugt wird. Dazu bilden wir die Poissonklammern der Komponenten von A untereinander sowie mit l , denn von l kennen wir diese bereits:

$$\{l_j, l_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} l_l. \quad (2.14.8)$$

Die Poissonklammern der Komponenten von A untereinander und mit l erhält man durch direkte Rechnung (am besten unter Zuhilfenahme eines Computer-Algebrasystems):

$$\begin{aligned} \{A_j, A_k\}_{\text{pb}} &= -\frac{2E}{K^2 \mu} \epsilon_{jkl} l_l, \\ \{l_j, A_k\}_{\text{pb}} &= \epsilon_{jkl} A_l. \end{aligned} \quad (2.14.9)$$

Letzteres wissen wir allerdings auch ohne Rechnung, denn es ist klar, daß A sich unter Drehungen wie ein Vektor verhält. Wie wir aus (2.14.8-2.14.9) ersehen, bilden l und A eine **Unterliealgebra der allgemeinen Poissonklammer-Liealgebra**. Durch Exponentiation und Bildung des algebraischen Abschluß ergibt sich also insgesamt eine durch diese sechs Generatoren erzeugte Liegruppe.

Wir wollen nunmehr die Gruppen identifizieren, welche mit jedem der drei Fälle $E < 0$, $E = 0$ und $E > 0$ verbunden sind. Wir werden auch gleich sehen, warum wir diese Fallunterscheidung durchführen müssen.

Beginnen wir mit $E < 0$. Dann können wir eine neue Basis der Liealgebra wählen, indem wir

$$a = \sqrt{-\frac{K^2 \mu}{2E}} A \quad (2.14.10)$$

einführen. Das ergibt dann die einfachere Liealgebra

$$\{l_j, l_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} l_l, \quad \{a_j, a_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} l_l, \quad \{l_j, a_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} a_l. \quad (2.14.11)$$

2.14. Die Symmetrien des Keplerproblems

Wir wollen nun zeigen, daß dies die Algebra der $SO(4)$, also der Gruppe der Rotationen im \mathbb{R}^4 ist. Das sind diejenigen linearen Abbildungen, die das euklidische Skalarprodukt in vier Dimensionen ungeändert lassen und die Determinante 1 besitzen.

Eine reelle 4×4 -Matrix M ist offenbar genau dann eine $SO(4)$ -Matrix, wenn $M^t M = 1$ ist. Daraus leitet man wie im Falle der Drehgruppe her, daß eine „infinitesimal“ von der Einheitsmatrix verschiedene Matrix $M_{jk} = \delta_{jk} + \delta \alpha_{jk}$ genau dann eine $SO(4)$ -Matrix ist, wenn $\delta \alpha_{jk} = -\delta \alpha_{kj}$ ist. In der Tat besitzt also die $SO(4)$ insgesamt $(4 \cdot 4 - 4)/2 = 6$ linear unabhängige Erzeugende.

Die Drehgruppe $SO(3)$ in drei Dimensionen ist offenbar eine Untergruppe, die aus denjenigen $SO(4)$ -Matrizen besteht, die nur die ersten drei Komponenten eines jeden \mathbb{R}^4 -Vektors ändern. Dies entspricht den drei Erzeugenden $\delta \alpha_{jk} = -\epsilon_{ljk}$ mit $l \in \{1, 2, 3\}$. Identifiziert man also $(\hat{l}_l)_{jk} = -\epsilon_{ljk}$, wobei wir jedes \hat{l}_j als 3×3 -Matrix auffassen, entspricht dies der Drehimpulsalgebra für unsere Drehimpulskomponenten l . In der Tat rechnet man nach, daß diese Matrizen die Kommutatorrelationen der Drehimpulsalgebra erfüllen:

$$[\hat{l}_j, \hat{l}_k] := \hat{l}_j \hat{l}_k - \hat{l}_k \hat{l}_j = \epsilon_{jkl} \hat{l}_l. \quad (2.14.12)$$

Wir erweitern diese 3×3 -Matrizen einfach in unserem Sinne zu 4×4 -Matrizen, daß wir die unterste Zeile und die vierte Spalte durch Nullen auffüllen. Im \mathbb{R}^4 agieren diese Matrizen dann für die ersten drei Komponenten als „infinitesimale Drehungen“ und lassen die letzte Komponente ungeändert.

Jetzt fehlen offensichtlich noch die Erzeugenden, die eine Drehung in der Ebene, gebildet aus dem vierten Einheitsvektor und einem der drei verbliebenen Einheitsvektoren generieren. Man rechnet nach, daß diese Erzeugenden \hat{a}_j genau die übrige Algebra, die durch (2.14.11) gegeben ist, ergeben. Dabei sind freilich die Poissonklammern durch Kommutatoren und vice versa zu ersetzen zu denken. Wir haben also einen Isomorphismus von Liealgebren, wobei die Lieklammern zum einen durch die Poissonklammern und zum anderen durch die Kommutatoren von Matrizen gegeben sind. Entsprechend sind die Basiselemente der Liealgebra die Drehimpulskomponenten und Runge-Lenz-Vektorkomponenten einerseits und die Matrizen \hat{l}_j und \hat{a}_k andererseits. Wir können also die Liealgebra, unabhängig von ihrer Wirkung auf vierdimensionale Vektoren mit der Liealgebra der Gruppe $SO(4)$ identifizieren. Man spricht daher auch allgemein von der $SO(4)$ -Symmetrie des Keplerproblems, obwohl dies nur die Symmetriegruppe für $E < 0$, also die gebundene Bewegung (Ellipsen- bzw. Kreisbahnen) ist.

Der Vollständigkeit halber wollen wir zeigen, daß die Liealgebren von $SO(4)$ und $SO(3) \otimes SO(3)$ isomorph sind. Dazu gehen wir erneut zu einer neuen Basis der Liealgebra über:

$$\alpha_j = \frac{l_j + a_j}{2}, \quad \beta_j = \frac{l_j - a_j}{2}. \quad (2.14.13)$$

Für diese gelten die Poissonklammerrelationen

$$\{\alpha_j, \alpha_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} \alpha_l, \quad \{\alpha_j, \beta_k\}_{\text{pb}} = 0, \quad \{\beta_j, \beta_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} \beta_l. \quad (2.14.14)$$

Die Liealgebra zerfällt also in zwei $SO(3)$ -Teilalgebren, deren Elemente untereinander verschwindende Lieklammern besitzen, d.h. es handelt sich um eine direkte Summe der beiden $SO(3)$ -Algebren: $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$. Durch Exponentiation zeigt man, daß dies einem direkten Produkt der Gruppen entspricht.

Kommen wir nun zum Fall $E = 0$, also dem Fall der Parabelbahnen. Dann ist die Liealgebra wegen (2.14.8-2.14.9) durch

$$\{l_j, l_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} l_l, \quad \{a_j, a_k\}_{\text{pb}} = 0, \quad \{l_j, a_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} a_l \quad (2.14.15)$$

2. Kanonische Mechanik

gegeben. Das ist aber die gleiche Algebra wie zwischen Impuls und Drehimpuls, so daß wir sofort die Liealgebra der Isomorphiegruppe $ISO(3)$ des \mathbb{R}^3 , aufgefaßt als euklidischer affiner Punktraum erkennen. Freilich handelt es sich hierbei nicht um den physikalischen Raum.

Schließlich betrachten wir noch $E > 0$, also den Fall der Hyperbelbahnen. Hier gehen wir genauso vor wie bei $E < 0$ mit dem Unterschied, daß wir jetzt

$$a = \sqrt{\frac{K^2 \mu}{2E}} A \quad (2.14.16)$$

definieren müssen. Die Liealgebra ist dann

$$\{l_j, l_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} l_l, \quad \{a_j, a_k\}_{\text{pb}} = -\epsilon_{jkl} l_l, \quad \{l_j, a_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} a_l. \quad (2.14.17)$$

Dies ist die Liealgebra zur Gruppe $SO(1,3)$, der Gruppe, die die Bilinearform

$$x, y \in \mathbb{R}^4 \mapsto \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \quad \text{mit } (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2.14.18)$$

Die Indizes μ, ν laufen unserer Konvention gemäß von 0 bis 3. Diese Struktur auf dem \mathbb{R}^4 hat eine sehr wichtige Bedeutung, legt sie doch die Raumzeit-Struktur in der **Speziellen Relativitätstheorie** fest, worauf wir aber erst im nächsten Kapitel eingehen werden. Der Beweis dieser Behauptung erfolgt genau analog zum Fall $E < 0$ und sei dem Leser zur Übung überlassen. Die Drehungen, erzeugt durch die Drehimpulskomponenten l , läßt man dabei auf die unteren drei Komponenten wirken. Klarerweise bilden diese eine Untergruppe der $SO(1,3)$. Die drei Operationen, die die 0-Komponente und je eine der drei unteren Komponenten der Vierervektoren ändern, bilden dann die übrigen Basiselemente der $so(1,3)$ -Algebra. Von dieser Matrixalgebra kann man wie im Fall der $so(4)$ zeigen, daß sie im Sinne von Liealgebren isomorph zu der Poissonklammeralgebra (2.14.17) ist.

Es sei noch betont, daß der wahre Nutzen dieser algebraischen Betrachtungen erst in der Quantentheorie des Wasserstoffatoms voll zutage tritt, weil sie die Entartung der Energieniveaus zu analysieren helfen.

2.15 Das Liouvillesche Theorem

Eine wichtige Folgerung der „Kanonizität“ der Bewegung, welche eine herausragende Rolle in der **statischen Physik** spielt, ist das **Liouvillesche Theorem**. Da es sich also um eine typische Vielteilchenanwendung handelt, wollen wir es gleich für ein System von N über eine konservative Kraft wechselwirkende Teilchen der Masse m formulieren. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H(x_i, p_i) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{j=1}^N \sum_{k < j} V(|x_i - x_j|). \quad (2.15.1)$$

Dabei bezeichnet (x_i, p_i) , $i \in \{1, \dots, N\}$, einen vollständigen Satz kartesischer Ortsvariablen und der dazugehörigen kanonischen Impulse der N Teilchen.

Die **Hamiltonschen kanonischen Gleichungen** lauten

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{p_j}{m} = v_j, \quad \frac{dp_j}{dt} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{\partial}{\partial x_j} V(|x_i - x_j|). \quad (2.15.2)$$

2.15. Das Liouvillesche Theorem

Seien $(x_i(t), p_i(t))$ die exakten Lösungen dieser Gleichungen für die Anfangsbedingungen

$$(x(t_0), p(t_0)) = (x_i^{(0)}, p_i^{(0)}). \quad (2.15.3)$$

Dann besagt das **Liouvillesche Theorem**, daß das Volumen eines Phasenraumelements unter der durch (2.15.2) beschriebenen Hamiltonschen Bewegung des Systems ungeändert bleibt. Dabei stellen wir uns einen Satz von Anfangswerten vor, die dieses Phasenraumelement dicht ausfüllen und betrachten die Bewegung dieses Volumenelements gemäß den Bewegungsgleichungen (2.15.2). Dies definiert den **Phasenraumfluß**.

Zum **Beweis** betrachten wir die Jacobideterminante des Phasenraumvolumenelements für den Fluß $(x_i^{(0)}, p_i^{(0)}) \mapsto (x_i, p_i)$,

$$D(t, t_0) = \det \frac{\partial(x_i, p_i)}{\partial(x_i^{(0)}, p_i^{(0)})} = \text{const.} \quad (2.15.4)$$

Als erstes zeigen wir, daß

$$[\partial_t D(t, t_0)]_{t=t_0} = 0. \quad (2.15.5)$$

Dazu erinnern wir uns an die Determinante einer „infinitesimal von der Identität“ abweichenden Matrix,

$$D(t_0 + dt, t_0) = 1 + dt \sum_{j=1}^N \left[\text{div}_{x_j^{(0)}} \dot{x}_j + \text{div}_{p_j^{(0)}} \dot{p}_j \right]_{t=t_0}. \quad (2.15.6)$$

Aus den Bewegungsgleichungen (2.15.2) folgt

$$D(t_0 + dt, t_0) - 1 = dt \sum_{j=1}^N \left[\text{div}_{x_j^{(0)}} \frac{\partial H}{\partial p_j^{(0)}} - \text{div}_{p_j^{(0)}} \frac{\partial H}{\partial x_j^{(0)}} \right] = 0. \quad (2.15.7)$$

Dies beweist (2.15.5). Offensichtlich genügt die Determinante D der Zusammensetzungsregel

$$D(t, t_0) = D(t, t_1) D(t_1, t_0) \quad (2.15.8)$$

für alle $t_0 \leq t_1 \leq t$. Daraus folgt

$$\partial_t D(t, t_0) = \partial_t D(t, t_1) D(t_1, t_0). \quad (2.15.9)$$

Lassen wir nun $t_1 \rightarrow t$ streben, finden wir wegen (2.15.5), daß in der Tat

$$\partial_t D(t, t_0) = 0. \quad (2.15.10)$$

Dies bedeutet, daß das Phasenraumvolumenelement ungeändert bleibt. Dies ist das **Liouvillesche Theorem**. Auf die Anwendung dieses Satzes in der klassischen Statistischen Mechanik werden wir weiter unten noch ausführlich zurückkommen.

Wir bemerken noch, daß das Liouvillesche Theorem auch für den Fall gilt, daß die Teilchen zusätzlich noch äußeren explizit zeitabhängigen Kräften unterliegen oder impulsabhängige Wechselwirkungen (z.B. magnetische Wechselwirkungen der Teilchen) untereinander vorliegen. Die einzige wesentliche Annahme, die in den obigen Beweis eingeflossen ist, ist nämlich die Hamiltonsche Struktur der Bewegungsgleichungen.

Kapitel 3

Durchgerechnete Beispiele

In diesem Kapitel sollen die bisher ausgeführten allgemeinen Konzepte der Beschreibung mechanischer Systeme an einigen willkürlich ausgewählten Beispielen angewendet werden.

3.1 Bewegung im homogenen Schwerfeld

In diesem Abschnitt wollen wir die Bewegung eines Massepunktes im homogenen Schwerfeld, d.h. für Bewegungen in Erdnähe, entlang einer beliebig vorgegebenen ebenen Kurve behandeln. Wir betrachten auch gleich *das* klassische Problem der Variationsrechnung, das sogenannte **Brachistochronenproblem**¹, anhand dessen bei einem Wettstreit unter den recht verfeindeten Bernoullibrüdern die Variationsrechnung entwickelt wurde.

Die Ebene sei die (xy) -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems, wo die homogen genäherte Schwerebeschleunigung in positive y -Richtung weisen möge. Die Kurve, auf die wir den Massenpunkt zwingen wollen, sei durch

$$y = f(x) \quad (3.1.1)$$

definiert.

Die Lagrangefunktion, parametrisiert mit der unabhängigen Variablen x , ist dann durch

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{m}{2}\{1 + [f'(x)]^2\}\dot{x}^2 + mgf(x) \quad (3.1.2)$$

Es ist klar, daß wir die Bewegungsgleichung sogleich integrieren können, indem wir den Energiesatz benutzen. Aufgrund des Noethertheorems ist ja die Energie, also

$$E = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m}{2}\{1 + [f'(x)]^2\}\dot{x}^2 - mgf(x) \quad (3.1.3)$$

erhalten.

Durch geeignete Wahl des y -Nullpunktes können wir stets erreichen, daß $E = 0$ wird. Was wir im folgenden annehmen wollen, weil es die Lösung des Brachistochronenproblems erleichtert. Für diese

¹griech: brachistos=kürzest, chronos=Zeit, d.h. die Brachistochrone ist diejenige Kurve, auf die man einen Massenpunkt zu zwingen hat, so daß er aus der Ruhe losgelassen im homogenen Schwerfeld am schnellsten von einem gegebenen Punkt zu einem anderen tiefer gelegenen Punkt gelangt

3.1. Bewegung im homogenen Schwerfeld

Wahl des Nullpunktes läßt sich die Bewegungsgleichung sofort in impliziter Form lösen

$$t = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{\frac{1 + [f'(x)]^2}{2gf(x)}}, \quad (3.1.4)$$

wo t die Zeitvariable ist. Zur Zeit $t=0$ befinde sich der Massepunkt dabei bei $(x_0, f(x_0))$.

Für das Brachistochronenproblem verlangen wir weiter, daß $\dot{x}(0) = 0$ ist, so daß also $f'(x_0) = 0$ sein muß, weil wir ja $E = 0$ gewählt haben. Wählen wir jetzt auch noch den x -Ursprung bei x_0 , so startet also der Massenpunkt bei $(0, 0)$.

Wir suchen nun von allen Funktionen f diejenige, für die die Fallzeit (3.1.4) minimal wird. Da $x_0 = 0$ und x_1 festliegen, haben wir ein genau analoges Variationsproblem wie beim Hamiltonschen Prinzip der Mechanik vorliegen. Insbesondere gilt auch das Noethertheorem, und wir haben im Integranden der Gl. (3.1.4)

$$l(f, f') = \sqrt{\frac{1 + (f')^2}{2gf}} \quad (3.1.5)$$

eine Lagrangefunktion vorliegen, die nicht explizit von der unabhängigen Veränderlichen x abhängt, so daß

$$f' \frac{\partial l}{\partial f'} - l = \text{const} \quad (3.1.6)$$

ist. Ein wenig umgeformt ergibt sich daraus, daß

$$k^2 = f[1 + (f')^2] = \text{const} \quad (3.1.7)$$

ist. Diese Differentialgleichung läßt sich einfacher lösen, wenn wir die Brachistochrone in Parameterdarstellung beschreiben, so daß wir ansetzen:

$$y(\lambda) = f[x(\lambda)] = D \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right). \quad (3.1.8)$$

Dies in (3.1.7) eingesetzt ergibt nach einigen Umformungen

$$x'(\lambda) = D \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) \Rightarrow x(\lambda) = \frac{D}{2}(\lambda - \sin \lambda). \quad (3.1.9)$$

Dabei haben wir die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ verwendet. Insgesamt haben wir also für die Brachistochrone die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= \frac{D}{2}(\lambda - \sin \lambda), \\ y(\lambda) &= D \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{D}{2}(1 - \cos \lambda). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

3.1.1 Übung

Man weise nach, daß (3.1.10) eine sogenannte *Zykloide* beschreibt. Eine Zykloide wird von einem Punkt beschrieben, der sich auf einer Kreislinie befindet, wobei der Kreis ohne zu gleiten entlang der x -Achse abrollt. Der Parameter λ hat dabei die Bedeutung des Rollwinkels. Das Abrollen des Kreises startet dabei so, daß der die Zykloide beschreibende Punkt im Koordinatenursprung zu liegen kommt. Es ist klar, daß D der Durchmesser des Kreises ist (warum?).

3.2 Das Zykloidenpendel

Nun wissen wir also, daß die Brachistochrone eine Zykloide ist. Jetzt interessieren wir uns auch für die Bewegung auf derselben. Das Potential ist

$$V = -mgy = \frac{D}{2}(\cos \lambda - 1), \quad (3.2.1)$$

d.h. es handelt sich für die Anfangsbedingung

$$\lambda(0) = \lambda_0 \text{ mit } 0 < \lambda_0 < \pi, \dot{\lambda}(0) = \dot{\lambda}_0 = 0 \quad (3.2.2)$$

um eine Pendelschwingung innerhalb des ersten Bogens der Zykloide um das Minimum bei $\lambda = \pi/2$. Deshalb spricht man vom *Zykloidenpendel*.

Das Vorgehen im Rahmen des Lagrangeformalismusses ist wie üblich. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) \left[\frac{m}{2} D^2 \dot{\lambda}^2 + mgD \right]. \quad (3.2.3)$$

Diese läßt dich durch die Substitution

$$u = \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) \Rightarrow \dot{u} = -\frac{\dot{\lambda}}{2} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (3.2.4)$$

zu

$$L = 2mD^2 \dot{u}^2 - mgD(u^2 - 1) \quad (3.2.5)$$

vereinfachen, und die Euler-Lagrangegleichung bzgl. u liefert schließlich die Bewegungsgleichung

$$\ddot{u} = -\frac{g}{2D}u. \quad (3.2.6)$$

Das bedeutet, daß das Pendel eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{g/(2D)}$ vollführt. Im Gegensatz zum mathematischen Fadenpendel (s. den nächsten Abschnitt) ist aber die Bewegung exakt harmonisch, d.h. die Schwingungsfrequenz ist unabhängig von der Amplitude. Die Zykloide nennt man in diesem Zusammenhang auch *Tautochrone*². Bereits *Huygens* konstruierte eine Pendeluhr, die auf dieser Eigenschaft des Zykloidenpendels beruht. Dazu benutzte er die Tatsache, daß die Evolute der Zykloide selber wieder eine Zykloide ist. Allerdings war der Fehler aufgrund der Reibung größer als die Genauigkeitssteigerung aufgrund der Isochronie der Schwingung.

3.3 Das mathematische Pendel

Unter einem mathematischen Pendel verstehen wir einen Massepunkt, der im homogenen Schwerfeld auf einen Kreis gezwungen wird. Hier ist es einfacher, die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten direkt aufzustellen, anstatt die allgemeinen Formeln der vorigen Abschnitte zu verwenden.

Wir parametrisieren also den Kreis mit Hilfe des Polarwinkels gemäß

$$\vec{x}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

²griech: tauto: das Gleiche, chronos: Zeit

3.3. Das mathematische Pendel

Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 + m g R \cos \varphi, \quad (3.3.2)$$

wobei wir die y -Achse wieder in Richtung des Schwerfeldes gelegt haben, aber den Winkel φ von der y -Achse aus gezählt haben. Durch die Vorzeichenwahl in (3.3.1) haben wir weiter dafür gesorgt, daß die stabile Ruhelage bei $\varphi = 0$ liegt, weil dort das Potential $V(\varphi) = -m g R \cos(\varphi)$ sein Minimum annimmt. Die Bewegungsgleichung ergibt sich sofort aus der Euler-Lagrangegleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin \varphi. \quad (3.3.3)$$

3.3.1 Kleinwinkelnäherung

Wir betrachten zunächst den Fall, daß das Pendel kleine Schwingungen um die Ruhelage $\varphi = 0$ ausführt. Daß dies tatsächlich die stabile Gleichgewichtslage darstellt, zeigt sich sogleich an dieser Rechnung. Für kleine Winkel nähern wir auf der rechten Seite in (3.3.3)

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad (3.3.4)$$

wobei wir Glieder von der Ordnung $O(\varphi^3)$ vernachlässigen. Die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten läßt sich sofort integrieren

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (3.3.5)$$

Um die im nächsten Unterabschnitt durchgeführte exakte Behandlung der Gleichung (3.3.3) vorzubereiten, wollen wir die gleiche Näherung noch unter Ausnutzung des Energiesatzes behandeln.

In der Kleinwinkelnäherung lautet der Energiesatz

$$\text{const} = E = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m g R}{2} \varphi^2. \quad (3.3.6)$$

Durch Trennung der Variablen läßt sich diese Differentialgleichung in impliziter Form sofort lösen

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{k^2 - \omega^2 \varphi'^2}} \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{2E}{mR^2} > 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{R}. \quad (3.3.7)$$

Das Integral ist physikalisch nur sinnvoll, wenn die Wurzel reell ist, d.h. es muß gelten $\varphi, \varphi_0 \in [-k/\omega, k/\omega]$. Aus Kausalitätsgründen muß weiter t monoton wachsen. Wir nehmen nun an, es sei $\dot{\varphi}_0 \geq 0$ d.h. es ist zunächst von φ_0 bis nach $\varphi_{\max} = k/\omega$ zu integrieren. An diesem Verzweigungspunkt der Wurzel angekommen, ist wieder zurück von φ_{\max} bis nach $-\varphi_{\max}$ zu integrieren. Da aber t monoton wachsen muß, ist gleichzeitig das Vorzeichen der Wurzel umzukehren. Bei $\varphi' = -\varphi_{\max}$ angekommen, kehrt sich die Argumentation gerade um, so daß wir auch auf diese qualitative Weise zu der Erkenntnis gelangen, daß $\varphi(t)$ eine periodische Funktion von t sein muß. Die Periodendauer ist offenbar gegeben durch

$$T = 2 \int_{-\varphi_{\max}}^{+\varphi_{\max}} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \omega^2 \varphi'^2}} = \frac{4}{\omega} \arcsin(1) = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.3.8)$$

Wir gelangen natürlich zu demselben Ergebnis wie oben, nämlich daß die Kreisfrequenz ω ist.

3. Durchgerechnete Beispiele

Die Bewegung erhalten wir durch Umkehrung des Integrals (3.3.7) für kleine t

$$\varphi(t) = \frac{k}{\omega} \sin(\omega t + C), \quad (3.3.9)$$

wo die Integrationskonstante C so zu wählen ist, daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Da diese Lösung für kleine t zweimal (tatsächlich natürlich sogar beliebig oft) stetig differenzierbar und periodisch mit der Kreisfrequenz ω ist, ist dies auch die Lösung für beliebig große t , und man gelangt unter Anwendung des Additionstheorems der Sinusfunktion natürlich wieder zu (3.3.5).

Es ist klar, daß für die Kleinwinkelnäherung die direkte Lösung über die Differentialgleichung viel einfacher ist als die zum Schluß gegebene Herleitung über den Energiesatz, da wir die mehrdeutige Wurzelfunktion physikalisch zu interpretieren hatten. Allerdings wird sich diese Methode im folgenden Abschnitt als durchaus hilfreich erweisen.

3.3.2 Exakte Rechnung

Periodischer Fall

Wir betrachten nun wieder die exakte Lagrangefunktion (3.3.2). Das Energieintegral ist

$$E = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 - m g R \cos \varphi. \quad (3.3.10)$$

Wir wollen zunächst die exakte Periodendauer für den Fall, daß das Pendel eine Schwingungsbewegung ausführt, ausrechnen. Wir können dazu die spezielle Anfangsbedingung $\varphi(0) = \varphi_0 < \pi$, $\dot{\varphi}_0 = 0$ benutzen. Mit den gleichen Argumenten wie im Zusammenhang mit (3.3.7) gilt dann

$$T = \frac{2x}{\omega} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2(\varphi/2)}} \quad \text{mit} \quad x = \frac{1}{\sin(\varphi_0/2)}. \quad (3.3.11)$$

Wir substituieren noch

$$\sin \theta = x \sin(\varphi/2), \quad (3.3.12)$$

wodurch (3.3.11) in

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{x^2}}} \quad (3.3.13)$$

übergeht.

Das Integral

$$K(\mu) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \mu \sin^2 \theta}} \quad \text{für } 0 < \mu < 1 \quad (3.3.14)$$

heißt *vollständiges elliptisches Integral erster Gattung*. Damit schreibt sich (3.3.13) als

$$T = \frac{4}{\omega} K[\sin^2(\varphi_0/2)]. \quad (3.3.15)$$

Man kann (3.3.15) in eine Potenzreihe nach $\mu \sin^2 \theta$ entwickeln und gliedweise integrieren. Dann erhält man für kleine Amplituden φ_0 :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + O(\varphi_0^4) \right), \quad (3.3.16)$$

3.3. Das mathematische Pendel

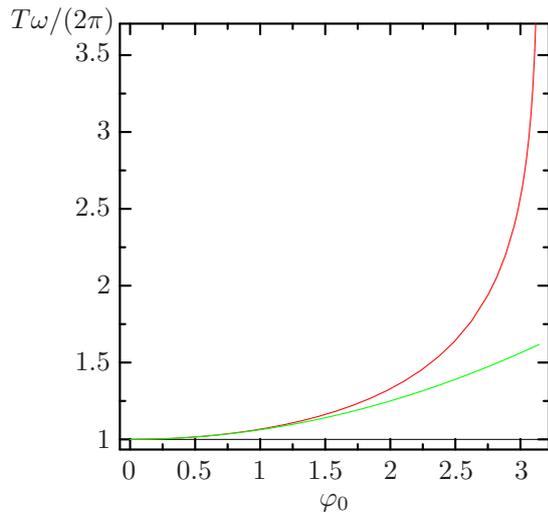


Abbildung 3.1: Die Periodendauer gemäß (3.3.15) (rot) im Vergleich zur Näherung (3.3.16) (grün).

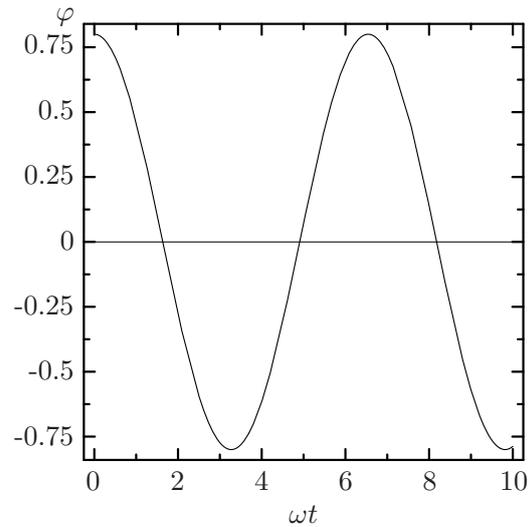


Abbildung 3.2: Die Lösung (3.3.20) der Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels für $\varphi_0 = 0.8$, $\dot{\varphi}_0 = 0$.

was eine Abschätzung für den Fehler für die Periodendauer in Kleinwinkelnäherung gemäß (3.3.8) ergibt.

Für die Integration der Bewegungsgleichungen gehen wir zu (3.3.10) zurück. Mit den bereits eingeführten Abkürzungen gelangen wir zu

$$t = \frac{x}{2\omega} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-x^2 \sin^2(\varphi'/2)}} = \frac{x}{\omega} \left[F\left(\frac{\varphi}{2} \middle| x^2\right) - F\left(\frac{\varphi_0}{2} \middle| x^2\right) \right] \quad (3.3.17)$$

Dabei heißt das Integral

$$F(z|m) = \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{1-m \sin^2 z'}} \quad (3.3.18)$$

unvollständiges elliptisches Integral erster Gattung. Die im Sinne der Diskussion im Anschluß an Gl. (3.3.7) durchgeführten Diskussion periodisch fortgesetzte Umkehrfunktion von F heißt *Jacobische Amplitudenfunktion*:

$$y = F(x|m) \Leftrightarrow x = \operatorname{am}(y|m), \quad (3.3.19)$$

so daß aus (3.3.17) schließlich

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{am} \left[\frac{\omega(t+t_0)}{x} \middle| x^2 \right] \quad \text{mit } t_0 = \frac{x}{\omega} F\left(\frac{\varphi_0}{2} \middle| x^2\right) \quad (3.3.20)$$

resultiert.

Die Ableitung der Amplitudenfunktion heißt *delta amplitudinus*:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{am}(x|m) = \operatorname{dn}(x|m). \quad (3.3.21)$$

3. Durchgerechnete Beispiele

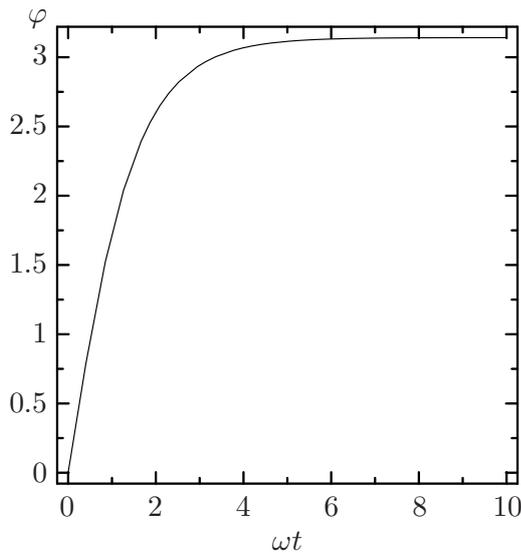


Abbildung 3.3: Die Lösung der Pendelgleichung für den aperiodischen Fall.

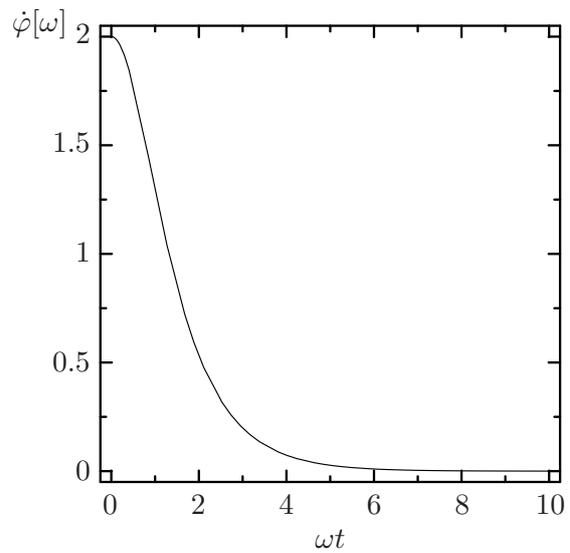


Abbildung 3.4: Die Winkelgeschwindigkeit im aperiodischen Fall.

Aperiodischer Fall

Wie können noch einen Spezialfall der Bewegung exakt integrieren, nämlich den Fall, daß $\varphi = \pi = \text{const}$ ist. Offenbar ist nämlich $\varphi = \pi$ eine instabile Gleichgewichtslage, weil dort ein Maximum des Potentials vorliegt.

Um einen nichttrivialen Fall zu haben, wollen wir das Pendel aus der Lage $\varphi_0 = 0$ gerade so anstoßen, daß es für $t \rightarrow \infty$ in die Endlage $\varphi = \pi$ gelangt. Nach dem Energiesatz (3.3.10) haben wir dazu $\dot{\varphi}_0 = 2\omega$ zu wählen. Der Energiesatz liefert auch die Lösung der Bewegungsgleichung, die in unserem Falle

$$\varphi(t) = 2 \arctan[\tanh(\omega t)] \quad (3.3.22)$$

lautet.

Überschwinger

Betrachten wir nun den noch verbliebenen Fall, daß $E > mgR$ wird. Wir schreiben dann den Energiesatz in der Form

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2(x + \cos \varphi), \quad x > 1. \quad (3.3.23)$$

Wir integrieren diese Gleichung wieder unter den Anfangsbedingungen

$$\varphi_0 = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = \sqrt{2(1+x)}\omega. \quad (3.3.24)$$

In diesem Fall ist der Radikand unter der Wurzel des Integranden

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{x + \cos \varphi'}} \quad (3.3.25)$$

3.4. Das sphärische Pendel

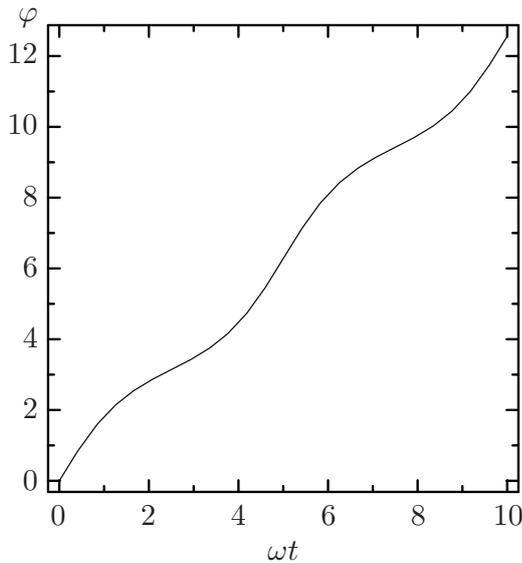


Abbildung 3.5: Die Lösung der Pendelgleichung für den Fall des Überschwingens.

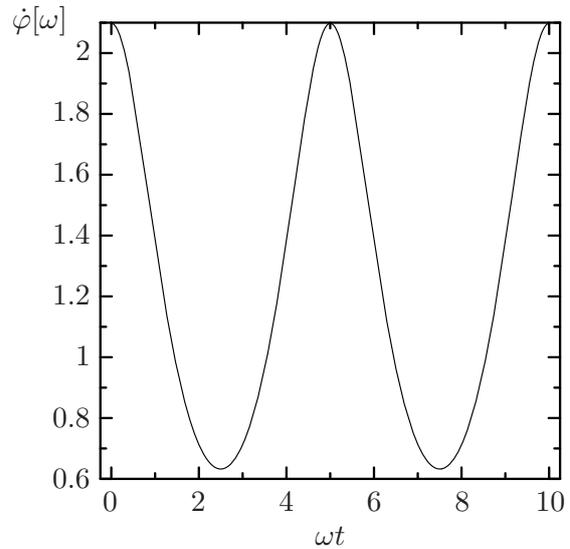


Abbildung 3.6: Die Winkelgeschwindigkeit für den Fall des Überschwingens.

beständig positiv reell. Daher ist die Umkehrfunktion nicht periodisch. Die Lösung läßt sich wieder in Gestalt der Jacobischen Amplitudenfunktion angeben:

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{am} \left(\sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} \omega t \middle| \frac{2}{1+\kappa} \right) \quad (3.3.26)$$

Die Ableitung kann wieder durch die Funktion delta amplitudinus dn ausgedrückt werden:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2(1+\kappa)} \omega \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} \omega t \middle| \frac{2}{1+\kappa} \right). \quad (3.3.27)$$

Die Bewegungsverläufe werden in den Abbildungen (3.4.5) und (3.4.7) dargestellt.

3.4 Das sphärische Pendel

Unter dem sphärischen Pendel verstehen wir einen Massepunkt, der an einem idealisierten masselosen Faden im homogenen genäherten Schwerfeld der Erde aufgehängt ist. Wir behandeln zunächst die Näherung kleiner Schwingungen, d.h. die Entwicklung der Bewegung um die Ruhelage. Später werden diese Techniken auf allgemeinere Bewegungen ausgeweitet. Schließlich werden die Näherungen mit der exakten Lösung verglichen.

3.4.1 Die Lagrangefunktion

Entsprechend der Geometrie des Systems benutzen wir Kugelkoordinaten, mit dem Ursprung im Aufhängepunkt des Pendels, wobei die Polarachse in Richtung der Schwerebeschleunigung weisen möge:

$$\vec{x} = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (3.4.1)$$

3. Durchgerechnete Beispiele

Die kinetische Energie in diesen Koordinaten ergibt sich zu

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 = \frac{mR^2}{2} [\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2]. \quad (3.4.2)$$

Das Potential ist durch

$$V = -m\vec{g} \cdot \vec{x} = -mgR \cos \vartheta \quad (3.4.3)$$

gegeben und somit die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 = \frac{mR^2}{2} [\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2] + mgR \cos \vartheta. \quad (3.4.4)$$

Wir finden sofort zwei Integrale der Bewegung: Da die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Gesamtenergie erhalten. Weiter ist φ eine zyklische Variable, so daß der dazugehörige kanonische Impuls, der in diesem Fall natürlich die Drehimpulskomponente in z-Richtung ist, ebenfalls erhalten ist:

$$E = T + V = \frac{mR^2}{2} [\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2] - mgR \cos \vartheta, \quad (3.4.5)$$

$$p_\varphi = mR^2 C_1 = mR^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta. \quad (3.4.6)$$

Wir können mit Hilfe der zweiten Gleichung $\dot{\varphi}$ im Energiesatz eliminieren und gelangen zu

$$E = \frac{mR^2}{2} \left(\frac{C_1^2}{\sin^2 \vartheta} + \dot{\vartheta}^2 \right) - mgR \cos \vartheta. \quad (3.4.7)$$

Die Bewegungsgleichung für ϑ läßt sich dadurch bereits erheblich vereinfachen. Zunächst ist

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mR^2 \dot{\vartheta} \quad (3.4.8)$$

und damit mit den Euler-Lagrange-Gleichungen für ϑ

$$\ddot{\vartheta} = \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \frac{g}{R} \sin \vartheta. \quad (3.4.9)$$

Eliminieren wir hieraus $\dot{\varphi}$ mit Hilfe von (3.4.6), erhalten wir

$$\ddot{\vartheta} = C_1^2 \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} - \frac{g}{R} \sin \vartheta. \quad (3.4.10)$$

3.4.2 Kleine Schwingungen

Wir betrachten nun zunächst den Fall, dass ϑ nur wenig von der Gleichgewichtslage ϑ_s abweicht, die wir dadurch definieren, dass $\vartheta = \vartheta_s = \text{const}$ für gegebenes C_1 eine Lösung von (3.4.10) ist, d.h. ϑ_s ist dadurch bestimmt, dass (3.4.10) verschwindet. Daraus folgt

$$C_1^2 = \frac{g}{R} \frac{\sin^4 \vartheta_s}{\cos \vartheta_s}. \quad (3.4.11)$$

3.4. Das sphärische Pendel

Für $\vartheta_s \neq 0$ bedeutet dies wegen (3.4.6)

$$\dot{\varphi} = \frac{C_1}{\sin^2 \vartheta_s} = \Omega = \text{const}, \quad (3.4.12)$$

und die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\Omega^2 \cos \vartheta_s = \frac{g}{R}. \quad (3.4.13)$$

Das Pendel bewegt sich dann also mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω auf einem Kreis um die x_3 -Achse, und Gl. (3.4.13) kann im mitrotierenden Bezugssystem als das Kräftegleichgewicht von Schwer- und Zentrifugalkraft interpretiert werden.

Wir betrachten nun kleine Störungen um das Gleichgewicht, d.h. für gegebenes C_1 machen wir den Ansatz

$$\vartheta = \vartheta_s + \epsilon \quad (3.4.14)$$

und entwickeln die rechte Seite der Bewegungsgleichung (3.4.10) für ϑ bis zur linearen Ordnung in ϵ . Das Resultat lautet

$$\ddot{\epsilon} = -\tilde{\omega}^2 \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{mit} \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{g}{R} \frac{1 + 3 \cos^2 \vartheta_s}{\cos \vartheta_s}. \quad (3.4.15)$$

Für eine stabile Lösung muß freilich $\tilde{\omega}^2 > 0$, d.h. $0 < \vartheta < \pi/2$ sein. Die allgemeine Lösung dieser linearisierten Gleichung lautet dann

$$\epsilon(t) = \hat{\epsilon} \cos(\tilde{\omega} t - \phi_0), \quad (3.4.16)$$

wobei die Amplitude $\hat{\epsilon}$ die Bedingung $|\hat{\epsilon}| \ll 1$ erfüllen muss, damit die lineare Näherung der Bewegungsgleichung gerechtfertigt ist.

Für φ gilt wegen (3.4.6)

$$\dot{\varphi} = \frac{C_1}{\sin^2 \vartheta} = \frac{C_1}{\sin^2 \vartheta_s} - \frac{2C_1 \cos \vartheta_s}{\sin^3 \vartheta_s} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \Omega(1 - 2 \cot \vartheta_s \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.4.17)$$

Dabei haben wir C_1 vermöge (3.4.11) eingesetzt und Ω aus (3.4.12) verwendet. Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation um die x_3 -Achse wird also durch kleine harmonische Korrekturen mit der Kreisfrequenz $\tilde{\omega}$ gestört. Mit (3.4.16) erhält man die Lösung dieser linearisierten Gleichung durch eine einfache Integration zu

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Omega t - \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}} \hat{\epsilon} \cot \vartheta_s [\sin(\tilde{\omega} t - \phi_0) + \sin \phi_0]. \quad (3.4.18)$$

Exakte Lösung

Wir wollen nun zeigen, daß die Bewegungsgleichung des sphärischen Pendels ebenso wie die des ebenen mathematischen Pendels mit Hilfe von elliptischen Funktionen lösbar sind. Dazu gehen wir wie dort vom Energiesatz (3.4.7) aus. Wir definieren der Einfachheit halber jedoch zunächst

$$\pi_\varphi = \frac{p_\varphi}{mR^2} = \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta, \quad \epsilon = \frac{2E}{mR^2} = \frac{\pi_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} + \dot{\vartheta}^2 - 2\omega^2(\cos \vartheta - 1). \quad (3.4.19)$$

Wir wollen uns weiter mit dem einfach zu behandelnden Fall, daß $\dot{\vartheta}(0) = 0$ ist, zufrieden geben.

3. Durchgerechnete Beispiele

Als erstes substituieren wir

$$u = \cos \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = -\frac{\dot{u}}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (3.4.20)$$

Dies in (3.4.19) eingebracht und umgestellt liefert

$$\dot{u}^2 = (u_0 - u) \left[2\omega^2(1-u^2) + \frac{\pi_\varphi^2(u+u_0)}{1-u_0^2} \right] := P(u). \quad (3.4.21)$$

Die rechte Seite ist ein Polynom 3. Grades $P(u)$ mit einer Nullstelle $u_0 \in [-1, 1]$. Der physikalische Bereich ist durch $u \in [-1, 1]$ und $P(u) > 0$ definiert.

Für unsere Anfangsbedingung muß es noch eine Nullstelle im physikalischen Bereich geben. Zwischen diesen beiden Nullstellen bewegt sich u bzw. $\vartheta \in [0, \pi]$. Mit zwei reellen Nullstellen muß auch die dritte Nullstelle des reellen Polynoms $P(u)$ reell sein. Sie liegt aber außerhalb des physikalischen Bereichs.

Wir können folglich (3.4.21) in der Gestalt

$$\dot{u}^2 = 2\omega^2(u_0 - u)(u - u_1)(u - u_2) \quad (3.4.22)$$

schreiben. Mit den entsprechenden Anfangsbedingungen ergibt sich daraus

$$t = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{u_0 - u_2}} \text{F} \left\{ \arcsin \left[\sqrt{\frac{u_0 - u}{u_0 - u_1}} \middle| \frac{u_0 - u_1}{u_0 - u_2} \right] \right\} \quad (3.4.23)$$

Aufgelöst nach u finden wir schließlich

$$u(t) = u_0 - (u_0 - u_1) \text{sn}^2 \left[\frac{\omega t \sqrt{u_0 - u_2}}{\sqrt{2}} \middle| \frac{u_0 - u_1}{u_0 - u_2} \right]. \quad (3.4.24)$$

Dabei wurde die Funktion sn , der sogenannte *sinus amplitudinus*, als Abkürzung für

$$\text{sn}(x|m) = \sin[\text{am}(x|m)] \quad (3.4.25)$$

eingeführt, wobei am wieder die bereits weiter oben eingeführte Jacobische Amplitudenfunktion (3.3.19) ist.

Aus (3.4.19) ergibt sich dann φ durch Integration. Hierfür existiert allerdings kein geschlossener analytischer Ausdruck in Gestalt einer bekannten elliptischen Funktion, wodurch wir auf die numerische Berechnung angewiesen sind. Diese Rechnung wurde wieder mit Hilfe von Mathematica 4.0 durchgeführt. Abbildung (3.7) zeigt ein exemplarisches Resultat für die Projektion der Bahnkurve auf die xy -Ebene.

3.5 Elastische Zweiteilchenstreuung

In diesem Abschnitt betrachten wir das Problem der elastischen Streuung zweier Teilchen, die durch eine konservative Zentralkraft wechselwirken, d.h. die Lagrange- und Hamiltonfunktionen sind durch

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - V(|x_1 - x_2|), \quad H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|x_1 - x_2|) \quad (3.5.1)$$

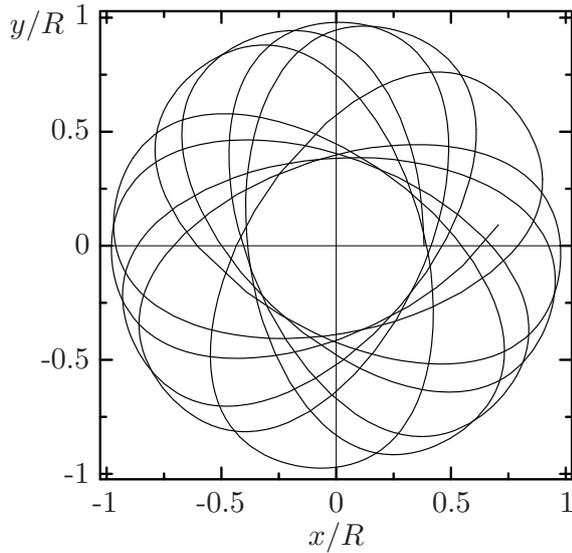


Abbildung 3.7: Die Projektion der Bahn des Pendels auf die xy -Ebene. Als Anfangsbedingungen wurden gewählt $\dot{\vartheta}_0 = 0$, $\vartheta_0 = \pi/8$, $\pi_\varphi = \omega/2$, $\varphi = 0$.

gegeben. Dabei nehmen wir an daß $V(r)$ für $r \rightarrow \infty$ „hinreichend schnell“ verschwindet.

Dann ist das Streuproblem in der folgenden Weise definiert: Wir nehmen an, die Teilchen befinden sich anfangs, zu Zeiten $t \rightarrow -\infty$ sehr weit voneinander entfernt, so daß die Wechselwirkungskräfte praktisch vernachlässigbar sind. Sie mögen sich mit Anfangsimpulsen \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 aufeinander zu bewegen. Wir fragen nun nach den Impulsen \mathbf{p}'_1 und \mathbf{p}'_2 dieser Teilchen lange, wenn sie sich wieder so weit voneinander entfernt haben, daß die Wechselwirkungskräfte wieder vernachlässigt werden können, d.h. wir fragen nicht nach den Details der Bewegung der Teilchen sondern nur nach dem Zusammenhang zwischen den Impulsen der Teilchen vor und nach dem Stoßvorgang, die in einem „asymptotisch freien“ Anfangszustand, der durch die Anfangsimpulse charakterisiert ist, präpariert wurden.

3.5.1 Das Schwerpunktsystem

Wir nutzen nun zunächst die Symmetrien des so beschriebenen Streuproblems aus. Es handelt sich um ein abgeschlossenes System, so daß alle 10 Erhaltungssätze aufgrund der Galilei-Symmetrie gelten. Zur Invarianz der Newtonschen Bewegungsgleichungen unter Galilei-Boosts gehört die Gleichförmigkeit der Schwerpunktsbewegung bzw. die Erhaltung des Gesamtimpulses (vgl. Abschnitt 2.13). Wir führen also als neue kanonisch konjugierte Variablen Schwerpunktskoordinaten und -impulse sowie Relativkoordinaten und -impulse ein. Der Schwerpunkt ist gemäß (2.13.10) durch

$$\mathbf{X} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2, \quad (3.5.2)$$

und die Relativkoordinaten durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \quad (3.5.3)$$

gegeben. Umgekehrt gilt

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{X} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{X} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}. \quad (3.5.4)$$

Dies in die Lagrangefunktion eingesetzt ergibt

$$L = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{X}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (3.5.5)$$

3. Durchgerechnete Beispiele

Wie zu erwarten, sind die Schwerpunktskoordinaten zyklisch, und das Problem vereinfacht sich zur gleichförmigen Bewegung eines freien Teilchens mit der Masse M und eines **Quasiteilchens** mit der sog. **reduzierten Masse** μ , das sich im äußeren Potential $V(r)$ bewegt.

Die kanonischen Impulse und die Hamilton-Funktion lauten entsprechend

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}, \quad H = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(r). \quad (3.5.6)$$

Es ist klar, daß der Gesamtimpuls \mathbf{P} konstant ist, da H nicht von den \mathbf{X} abhängt. Folglich gilt die Gesamtimpulserhaltung, d.h. für die Impulse vor und nach dem Stoß ist

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2. \quad (3.5.7)$$

Außerdem gilt die Energieerhaltung, d.h. für den Fall, daß zu Zeiten $t \rightarrow -\infty$ und $t \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow \infty$ gilt, was unter den hier betrachteten Umständen offenbar stets der Fall ist, und wegen $V(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ gilt auch

$$p^2 = p'^2, \quad (3.5.8)$$

d.h. der Betrag des Relativimpulses bleibt erhalten.

Schließlich ist die Hamiltonfunktion auch noch invariant unter Drehungen, so daß der Relativbahndrehimpuls erhalten ist, d.h. es gilt

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.} \quad (3.5.9)$$

Das bedeutet, daß \mathbf{r} und $\dot{\mathbf{r}}$ stets in einer Ebene senkrecht zu \mathbf{L} liegen, d.h. die Bewegung des Quasiteilchens spielt sich vollständig in dieser Ebene ab. Wir legen nun die 3-Achse unseres Bezugssystems in die Richtung von \mathbf{L} und führen Polarkoordinaten (r, ϑ) für $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ ein. Dann ergibt sich für die Hamilton-Funktion (3.5.6)

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r), \quad (3.5.10)$$

wobei wir benutzt haben, daß der Betrag des Relativbahndrehimpulses L bei dieser Wahl der Koordinaten der kanonisch konjugierte Impuls zu ϑ ist. Dieser ist aufgrund der Rotationsinvarianz des Systems erhalten.

Durch einen Galilei-Boost können wir nun weiter dafür sorgen, daß $\mathbf{P} = 0$ ist. Dann befinden wir uns im Schwerpunktsystem. Entsprechend unserer Anfangsbedingung nehmen wir nun an, daß das Quasiteilchen in 1-Richtung einfällt, d.h. es gilt $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_1$ für $t \rightarrow -\infty$. Es sei weiter $x = r \cos \vartheta \rightarrow -\infty$ und $y = r \sin \vartheta \rightarrow -b$. Dabei heißt b der **Stoßparameter**. Da $r \rightarrow \infty$ ist $\vartheta \rightarrow -\pi$. Damit haben wir die Kinematik des Stoßes vollständig charakterisiert. Der Impuls \mathbf{p}' nach dem Stoß, der für $t \rightarrow \infty$ erreicht wird, ist vollständig durch den entsprechenden Polarwinkel $\chi = \pm \vartheta_\infty$ gekennzeichnet. Dieser ergibt sich aus der konkreten Form des Potentials. Das Vorzeichen bestimmt sich daraus, daß $\chi \geq 0$ sein soll. Dabei ist ϑ_∞ offenbar positiv (negativ), wenn die Wechselwirkung attraktiv (repulsiv) ist.

Für den erhaltenen Drehimpuls ergibt sich aus diesen asymptotischen Anfangsbedingungen

$$\vec{L} = -b \mathbf{e}_y \times p \mathbf{e}_x = b p \mathbf{e}_z \Rightarrow L = b p. \quad (3.5.11)$$

3.5.2 Der Streuwinkel

Den Streuwinkel in Abhängigkeit vom Stoßparameter b erhalten wir nun durch Anwenden des Energiesatzes

$$E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (3.5.12)$$

und der Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{L}{\mu r^2}, \quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu}. \quad (3.5.13)$$

Daraus folgt die Gleichung für die Bahnform in Polarkoordinaten

$$r'(\vartheta) := \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\vartheta}} = \frac{r^2 p_r}{L}. \quad (3.5.14)$$

Eliminieren wir p_r aus (3.5.12) ergibt sich schließlich

$$r' = \pm \frac{r^2}{b} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\mu V(r)}{p^2}}. \quad (3.5.15)$$

Geometrisch ist klar, daß bei unserer Beschreibung der asymptotischen Anfangsbedingung r bei wachsendem ϑ zunächst kleiner wird. Irgendwann erreicht r den minimalen Wert r_{\min} , und der dazugehörige Winkel ϑ_{\min} bestimmt die Orientierung der **Apsidenlinie**. Entsprechend muß für $\vartheta < \vartheta_{\min}$ das negative Vorzeichen gewählt werden. Nach Durchlaufen der Apside wächst offenbar r mit ϑ wieder an, und wir müssen das positive Vorzeichen wählen. Dabei durchläuft die Wurzel offenbar für $\vartheta \in (-\pi, \vartheta_m)$ und für $\vartheta \in (\vartheta_m, \chi)$ dieselben Werte, d.h. die Bahn ist symmetrisch bzgl. Spiegelungen an der Apsidenlinie. Wir können nun r_{\min} aus dem Verschwinden von (3.5.15) bestimmen:

$$1 - \frac{b^2}{r_{\min}^2} - \frac{2\mu V(r_{\min})}{p^2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.5.16)$$

3.6 Bewegung in rotierenden Bezugssystemen

In diesem Kapitel setzen wir die Betrachtungen zu Bewegungen in rotierenden Bezugssystemen fort, die wir schon in Kapitel 1 begonnen haben.

3.6.1 Bewegung im Äquipotential-Paraboloiden

Wir wollen zunächst die Bewegung eines Massenpunktes auf einem Rotationsparaboloid betrachten, das so gewählt ist, daß ein Massenpunkt, der auf ihm ruhend hingelegt wird, stets auch in Ruhe bleibt, wenn das Paraboloid im homogen genäherten Schwerfeld in Rotation versetzt wird. Wir werden zunächst nachrechnen, daß diese rotierende „Äquipotentialfläche“ tatsächlich ein Rotationsparaboloid ist und dann die Bewegung des Massenpunktes auf demselben, also für einen mitrotierenden Beobachter, bestimmen.

3. Durchgerechnete Beispiele

Die Koordinaten im Inertialsystem seien mit x bezeichnet. Lassen wir das Paraboloid in mathematisch positiver Richtung, also im Gegenuhrzeigersinn rotieren, gilt

$$x = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi + \omega t) \\ r \sin(\varphi + \omega t) \\ f(r) \end{pmatrix}, \quad (3.6.1)$$

wobei r und φ mitrotierende Polarkoordinaten sind. Die Rotation erfolgt um die 3-Achse. Hier ist f die noch unbestimmte Funktion, die die Form des rotierenden Körpers bestimmt. Wegen $V = mgx^3$ ist also die Lagrangefunktion, ausgedrückt in mitrotierenden Koordinaten, durch

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - mgx^3 = \frac{m}{2} \{ \dot{r}^2 [1 + f'^2(r)] + r^2 (\dot{\varphi} + \omega)^2 \} - mgf(r) \quad (3.6.2)$$

gegeben.

Wir wollen nun die Funktion f so bestimmen, daß ein einmal in Ruhe auf die rotierende Fläche gesetzter Massenpunkt auch in Ruhe bleibt. Dazu schreiben wir die Bewegungsgleichungen für den Fall $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ und erhalten die Bedingung

$$f'(r) = \frac{\omega^2}{g} r \Rightarrow f(r) = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2. \quad (3.6.3)$$

Die gesuchte **Äquipotentialfläche** ist also ein Paraboloid. Die Integrationskonstante z_0 ist irrelevant, da sie zu der Lagrangedichte nur einen additiven konstanten Faktor beiträgt. Da φ zyklisch ist, gilt

$$\frac{p_\varphi}{m} = l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 (\dot{\varphi} + \omega) = \text{const}. \quad (3.6.4)$$

Das bedeutet für $\dot{\varphi}_0 = 0$ und $r = \text{const}$, was durch Bestimmung von f ja bereits sichergestellt ist, daß auch $\varphi = \text{const}$ gilt, d.h. (3.6.3) erfüllt die an die Fläche gestellte Bedingung.

Für diese Funktion lautet die Bewegungsgleichung bzgl. r

$$\ddot{r} \left(1 + \frac{r^2 \omega^4}{g^2} \right) + \dot{r}^2 \frac{r \omega^4}{g^2} = r (\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi} \omega). \quad (3.6.5)$$

Wir betrachten zunächst einen Spezialfall. Wir nehmen dazu an, der Massenpunkt werde anfangs mit $\dot{\varphi}_0 = -\omega$ angestoßen. Weiter nehmen wir an $r_0 \ll g^2/\omega^4$ und $\dot{r}_0 = 0$. Dann können wir davon ausgehen, daß r klein bleibt. Wir werden gleich sehen, daß das tatsächlich der Fall ist. Wir behandeln also r und \dot{r} in (3.6.5) als kleine Größen, so daß wir deren Quadrate vernachlässigen können. Aus (3.6.4) folgt $l = 0$ und damit $\dot{\varphi} = -\omega = \text{const}$. Die für diesen Fall in der beschriebenen Weise genäherte Bewegungsgleichung (3.6.5) lautet damit

$$\ddot{r} \approx -\omega^2 r. \quad (3.6.6)$$

Diese Gleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$r(t) \approx r_0 \cos(\omega t + \alpha_0). \quad (3.6.7)$$

Ein mit der Scheibe bewegter Beobachter sieht also als Projektion der Bahn auf eine mit ihm rotierende Ebene senkrecht zur Rotationsachse also die folgende Bewegung

$$x' = r_0 \cos(\omega t + \alpha_0) \begin{pmatrix} \cos(-\omega t) \\ \sin(-\omega t) \end{pmatrix} = \frac{r_0}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 + \cos(\alpha_0 + 2\omega t) \\ \sin \alpha_0 - \sin(\alpha_0 + 2\omega t) \end{pmatrix}. \quad (3.6.8)$$

3.7. Elemente der Kreiseltheorie

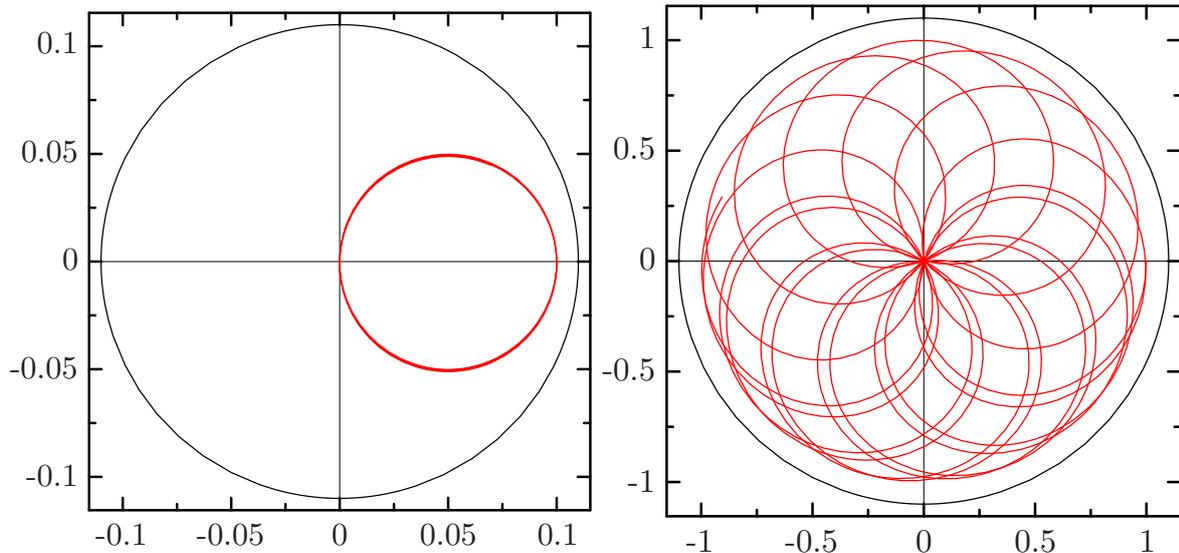


Abbildung 3.8: Die im Text beschriebene auf eine mitrotierende Ebene projizierte Bahnkurve für $\omega = 3/s$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Die Anfangsbedingungen für die linke Figur sind $r_0 = 0.1 \text{ m}$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{r}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = -\omega$. Offensichtlich ist dafür (3.6.8) eine gute Näherung. Für die rechte Figur wurde lediglich $r_0 = 1 \text{ m}$ gesetzt, während die übrigen Anfangsbedingungen beibehalten wurden.

Die Projektion der Bahnkurve auf die mitrotierende Ebene ist also ein Kreis, dessen Mittelpunkt von der Drehachse verschoben ist und mit der gegenüber der Rotation doppelten Winkelgeschwindigkeit durchlaufen wird.

Die allgemeine Gleichung läßt sich über den Energiesatz, welcher hier wieder gilt, weil die Lagrange-funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, auf ein elliptisches Integral zurückführen, was wir hier aber nicht weiter ausführen wollen.

Stattdessen geben wir die numerische Lösung für die soeben in der Näherung angegebene Bahnkurve, und zwar ein Beispiel, das der soeben gegebenen Näherung entspricht und eines mit einer allgemeineren Anfangsbedingung.

3.7 Elemente der Kreiseltheorie

Zum Abschluß der nichtrelativistischen Mechanik wenden wir uns kurz der Theorie des **starrten Körpers** zu. Darunter verstehen wir einen Körper, für den die relative Lage der ihn konstituierenden Punkte zueinander unabhängig von der Bewegung des Körpers fixiert bleibt. Dies ist freilich eine Idealisierung realer Körper, die stets eine bestimmte Deformierbarkeit aufweisen. Wir beschäftigen uns nun mit der theoretischen Beschreibung solcher starrer Körper.

3.7.1 Die Kinematik des starren Körpers

Im folgenden seien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ein inertiales „raumfestes“ und $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ ein fest mit dem Körper verbundenes Bezugssystem. Zur Charakterisierung der Lage eines beliebigen Massenpunktes im Körper definieren wir die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OO'}$ und $\vec{r}_\alpha = \overrightarrow{O'P_\alpha}$, wobei die P_α die Massenpunkte mit Massen m_α , aus denen wir uns den Körper zusammengesetzt denken, durchlaufen. Dann sind die Kompen-

3. Durchgerechnete Beispiele

ten r'_α bzgl. des körperfesten Bezugssystems zeitlich konstant, während die Komponenten bzgl. des raumfesten Bezugssystems durch eine $SO(3)$ -Matrix gegeben ist:

$$\mathbf{r}_\alpha = \hat{D} \mathbf{r}'_\alpha. \quad (3.7.1)$$

Wir können uns dabei $\hat{D} = \hat{D}(\psi, \vartheta, \varphi)$ durch die **Eulerwinkel**, die wir in Abschnitt 1.6.1 eingeführt haben, vorstellen. Davon werden wir aber erst weiter unten Gebrauch machen. Jedenfalls werden die Eulerwinkel als generalisierte Koordinaten der Bewegung unseres starren Körpers dienen. Für die Komponenten des Ortsvektors $\vec{x}_\alpha = \overrightarrow{OP}_\alpha$ gilt dann

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{a} + \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{a} + \hat{D} \mathbf{r}'_\alpha. \quad (3.7.2)$$

Die Lage eines beliebigen körperfesten Punktes ist also durch insgesamt sechs Parameter eindeutig bestimmt, nämlich durch die drei Komponenten des Ortsvektors \vec{a} und die drei Eulerwinkel.

Die Geschwindigkeitskomponenten bzgl. des raumfesten Bezugssystems ergeben sich also zu

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\hat{D}} \mathbf{r}'_\alpha = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\hat{D}} \hat{D}^t \mathbf{r}_\alpha = \dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha, \quad (3.7.3)$$

wobei wir uns (1.6.42) bedient haben. Dabei bezeichnet $\boldsymbol{\omega}$ die Komponenten der momentanen Winkelgeschwindigkeit des Körpers bzgl. des raumfesten Bezugssystems.

Wir berechnen nun die totale kinetische Energie des starren Körpers. Mit (3.7.3) erhalten wir

$$T = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \dot{\mathbf{x}}_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} [\dot{\mathbf{a}}^2 + 2\dot{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2]. \quad (3.7.4)$$

Bezeichnen wir nun mit

$$M = \sum_\alpha m_\alpha, \quad \mathbf{s} = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{M} \mathbf{r}_\alpha \quad (3.7.5)$$

die Gesamtmasse des Körpers und die Komponenten des Vektors vom körperfesten Bezugspunkt O' zum **Schwerpunkt**, können wir die kinetische Energie in der Form

$$T = \underbrace{\frac{M}{2} \dot{\mathbf{a}}^2}_{T_{\text{trans}}} + \underbrace{M \dot{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s})}_{T_{\text{mix}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}}_{T_{\text{rot}}}. \quad (3.7.6)$$

schreiben. Die kinetische Energie setzt sich also aus einem rein translatorischen Term zusammen, der die Verschiebung des Körpers als ganzes relativ zum Inertialsystem beschreibt, einem gemischten Term, der von der Rotation des Schwerpunktes um den körperfesten Bezugspunkt herrührt und der Rotationsenergie des Körpers. Der **Trägheitstensor** ergibt sich dabei durch Vergleich mit (3.7.4) wie folgt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^t \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} &= \Theta_{jk} \omega^j \omega^k = \sum_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2 \\ &= \sum_\alpha m_\alpha [r_\alpha^2 \omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_\alpha)^2] = \omega^j \omega^k \sum_\alpha m_\alpha [r_\alpha^2 \delta_{jk} - r_{\alpha j} r_{\alpha k}]. \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Das bedeutet also für die Komponenten des Trägheitstensors

$$\Theta_{jk} = \sum_\alpha m_\alpha [r_\alpha^2 \delta_{jk} - r_{\alpha j} r_{\alpha k}]. \quad (3.7.8)$$

In der Praxis ist diese Beschreibung allerdings kaum brauchbar. Es ist einfacher, zu einer **Kontinuumsbeschreibung** des starren Körpers überzugehen. Dazu denkt man sich den Körper in kleine Volumenelemente eingeteilt, und die Massenverteilung durch die **Massendichte** $\varrho(\vec{r})$ beschrieben, d.h. durch die Masse in dem Volumenelement beim Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{O'P}$ pro Volumeneinheit. Dann können wir für (3.7.8) schreiben

$$\Theta_{jk} = \int_V d^3r \varrho(r) [r^2 \delta_{jk} - r_j r_k]. \quad (3.7.9)$$

Es ist wichtig, zu beachten, daß der *Trägheitstensor* von der Wahl des körperfesten Bezugspunktes O' abhängt.

Die weitere Beschreibung der Bewegung wird auch sehr kompliziert, wenn wir die Komponenten des Trägheitstensors bzgl. des raumfesten Bezugssystems verwenden, denn diese hängen aufgrund der Drehung des Körpers gegen das Inertialsystem von der Zeit ab. Wir können aber den Rotationsanteil der kinetischen Energie auch in **körperfesten Trägheitstensor**komponenten beschreiben, die konstant sind:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega'^t \Theta' \omega'. \quad (3.7.10)$$

Da Θ ein **symmetrischer Tensor** ist, können wir nach dem aus der linearen Algebra bekannten Satz von der Hauptachsentransformation das körperfeste Basissystem so wählen, daß die entsprechende Matrix diagonal wird:

$$\Theta' = \text{diag}(A, B, C). \quad (3.7.11)$$

3.7.2 Freie Bewegung im homogenen Gravitationsfeld

Betrachten wir nun die Bewegung eines starren Körpers, der sich im homogenen Schwerfeld der Erde bewegt. Legen wir den körperfesten Bezugspunkt in den **Schwerpunkt** des Körpers, so gilt $\vec{s} = 0$, und (3.7.6) vereinfacht sich zu

$$T = \frac{M}{2} \dot{a}^2 + \frac{1}{2} \Theta'_{jk} \omega'^j \omega'^k. \quad (3.7.12)$$

Die potentielle Energie lautet

$$V = -g \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} = -Mg(a + s) = -Mga = Mga^3, \quad (3.7.13)$$

wobei wir das raumfeste Koordinatensystem so orientiert haben, daß $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ ist. Die Lagrangefunktion ist also durch

$$L = T - V = \frac{M}{2} \dot{a}^2 + \frac{1}{2} \Theta'_{jk} \omega'^j \omega'^k - Mga^3 \quad (3.7.14)$$

gegeben. Wir denken uns ω' durch die Eulerwinkel und deren Zeitableitungen ausgedrückt. Der Rotationsterm in (3.7.14) hängt nun nicht von Koordinaten und Geschwindigkeiten der Schwerpunktskoordinaten a ab, d.h. die Bewegungsgleichung für die Translationsbewegung separiert vollständig von der Rotationsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt, d.h. die Schwerpunktskoordinaten genügen der Bewegungsgleichung eines einzelnen Massepunktes der Masse M im homogenen Schwerfeld (entsprechend dem freien Fall bzw. schiefen Wurf):

$$\ddot{a}^1 = \ddot{a}^2 = 0, \quad \ddot{a}^3 = -g. \quad (3.7.15)$$

Wir können uns im folgenden also auf die Rotation des Körpers um seinen Schwerpunkt konzentrieren, die im gegebenen Falle so erfolgt, als würden auf den Körper gar keine Kräfte wirken.

3.7.3 Der kräftefreie Kreisel

Wir können uns diese Situation dadurch realisiert denken, daß wir den starren Körper in seinem Schwerpunkt so lagern, daß er um diesen Punkt frei rotieren kann. Bevor wir nun die Lagrangefunktion

$$L_{\text{rot}} = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta'_{jk} \omega'^j \omega'^k \quad (3.7.16)$$

in Eulerwinkeln ausschreiben und die Euler-Lagrange-Gleichungen betrachten, wollen wir den kräftefreien Kreisel noch mit Hilfe allgemeinerer Betrachtungen lösen. Offenbar ist das Problem rotations-symmetrisch um den Schwerpunkt, d.h. der Drehimpuls relativ zum Schwerpunkt ist erhalten. Wir wollen nun zeigen, daß wir daraus bereits Bewegungsgleichungen für die Komponenten ω' der momentanen Winkelgeschwindigkeit des Körpers bzgl. des körperfesten Bezugssystems gewinnen können.

Dazu schreiben wir zunächst den entsprechenden Gesamtdrehimpuls auf, den wir hier als **Spin** bezeichnen wollen. Den Drehimpulserhaltungssatz formulieren wir am besten zunächst über die raumfesten Komponenten:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\mathbf{r}_{\alpha}^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \boldsymbol{\omega})] = \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

Dabei haben wir (3.7.3) verwendet. Dies in körperfesten Koordinaten ausgedrückt liefert

$$S = \hat{D}(\boldsymbol{\Theta}' \boldsymbol{\omega}') \Rightarrow \dot{S} = \hat{D} \boldsymbol{\Theta}' \dot{\boldsymbol{\omega}}' + \hat{D} \boldsymbol{\Theta}' \boldsymbol{\omega}' = 0. \quad (3.7.18)$$

Den ersten Ausdruck formen wir nun wie folgt um

$$\hat{D} \boldsymbol{\Theta}' \boldsymbol{\omega}' = \hat{D} \hat{D}^t \hat{D} \boldsymbol{\Theta}' \boldsymbol{\omega}' = \hat{D} \hat{D}^t \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}). \quad (3.7.19)$$

Wir bemerken in diesem Zusammenhang, daß sich die Komponenten des Trägheitstensors ihrer Indexstellung gemäß wie folgt **kovariant** transformieren:

$$\Theta'_{jk} = D^{j'}_j D^{k'}_k \Theta_{j'k'}. \quad (3.7.20)$$

In Matrix-Vektorschreibweise folgt dies auch unmittelbar daraus, daß

$$\boldsymbol{\omega}^t \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'^t \underbrace{\hat{D}^t \boldsymbol{\Theta} \hat{D}}_{\boldsymbol{\Theta}'} \boldsymbol{\omega}' \quad (3.7.21)$$

ist.

Dies in (3.7.18) eingesetzt liefert

$$\dot{S} = \hat{D} \boldsymbol{\Theta}' \dot{\boldsymbol{\omega}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}) = 0. \quad (3.7.22)$$

Multiplizieren wir von links mit \hat{D}^t , erhalten wir die **Eulerschen Kreiselgleichungen** für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Bezugssystem:

$$\boldsymbol{\Theta}' \dot{\boldsymbol{\omega}}' = -\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\Theta}' \boldsymbol{\omega}'). \quad (3.7.23)$$

Wählen wir als körperfestes Bezugssystem ein Hauptachsensystem des Trägheitstensors, liefert dies in Komponenten aufgespalten das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} A \dot{\omega}'^1 &= (B - C) \omega'^2 \omega'^3, \\ B \dot{\omega}'^2 &= (C - A) \omega'^3 \omega'^1, \\ C \dot{\omega}'^3 &= (A - B) \omega'^1 \omega'^2. \end{aligned} \quad (3.7.24)$$

3.7.4 Stabilität bei Drehung um eine Hauptträgheitsachse

Die Lösung der Eulerschen Kreiselgleichungen (3.7.24) erweist sich schon im hier betrachteten kräftefreien Fall als äußerst kompliziert. Wir begnügen uns daher zunächst mit einer Stabilitätsbetrachtung bzgl. der Drehung des Kreisels um eine der Hauptachsen. Wählen wir dazu die 3'-Achse. Offensichtlich ist $\omega^3 = \omega_0 = \text{const}$, $\omega'^1 = \omega'^2 = 0$ eine Lösung der Gleichungen. Um diese auf ihre Stabilität hin zu untersuchen, betrachten wir kleine Störungen in der Form

$$\omega' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \omega_0 + \gamma \end{pmatrix} \quad (3.7.25)$$

mit $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \ll \omega_0$ und entwickeln (3.7.24) bis zur linearen Ordnung in den Störungen:

$$\begin{aligned} A\dot{\alpha} &= (B - C)\omega_0\beta, \\ B\dot{\beta} &= (C - A)\omega_0\alpha, \\ C\dot{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7.26)$$

Leiten wir die erste Gleichung nach der Zeit ab und setzen die zweite Gleichung ein, erhalten wir

$$\ddot{\alpha} = \frac{(B - C)(C - A)}{AB} \omega_0 \alpha. \quad (3.7.27)$$

Die Lösung beschreibt eine **Schwingung** um $\alpha = 0$, falls

$$(B - C)(C - A) < 0, \quad \text{d.h. } C < A, C < B \quad \text{oder} \quad C > A, C > B. \quad (3.7.28)$$

In diesem Fall ist die Rotation um die 3'-Achse offenbar stabil, denn dann bleiben kleine Anfangsstörungen auch im Laufe der Zeit klein, und unsere Näherung ist gültig, denn gemäß der ersten Gleichung in (3.7.26) ist dann auch β eine kleine Schwingung. Falls aber nicht eine der Bedingungen (3.7.31) zutrifft, besitzt die Lösung einen exponentiellen Charakter, und die kleine Anfangsstörung wird mit der Zeit schnell groß, d.h. dann ist die Rotation um die 3'-Achse nicht stabil, und unsere linearisierte Eulergleichung (3.7.26) verliert ihre Gültigkeit. Die Drehung um die 3'-Achse ist also genau dann stabil, wenn die entsprechende Hauptträgheitsachse zum **maximalen oder minimalen Hauptträgheitsmoment** gehört. Falls ihr allerdings das mittlere Hauptträgheitsmoment zuzuordnen ist, ist die Rotation um diese Achse instabil. Wir wollen uns mit der allgemeinen kräftefreien Kreiselbewegung nicht weiter befassen, sondern wenden uns gleich dem geschlossen lösbaren Spezialfall des **symmetrischen Kreisels** zu.

3.7.5 Einführung der Euler-Winkel

Wir verwenden nun die in Abschnitt 1.6.1 eingeführten Euler-Winkel zur Beschreibung des Kreiselpblems. In Abb. 1.12 bedeuten nun wie schon weiter oben in diesem Abschnitt die \vec{e}_j die raum- und die \vec{e}'_j die körperfeste Cartesische Basis. Entsprechend beschreibt der Winkel ψ die Drehung des Körpers um die raumfeste 3-Achse und φ die um die körperfeste 3'-Achse. Zunächst ist gemäß (3.7.3)

$$\omega^i = \omega_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\dot{\hat{D}} \hat{D}^t)^{jk} = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{t}_i \dot{\hat{D}} \hat{D}^t). \quad (3.7.29)$$

3. Durchgerechnete Beispiele

Mit $\hat{D} = \hat{D}_3(\psi)\hat{D}_1(\vartheta)\hat{D}_3(\varphi)$ folgt daraus nach Bilden der Ableitung und Ausführen der Matrizenoperationen

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \omega' = \hat{D}^t \omega = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (3.7.30)$$

3.7.6 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

Wir nehmen nun an, die Massenverteilung des Körpers sei symmetrisch bzgl. Rotationen um die 3'-Achse. Dann ist $B = A$ aber C evtl. verschieden von $B = A$. Dies bezeichnet man als einen **symmetrischen Kreisel**. Dann vereinfachen sich die Eulerschen Kreiselgleichungen (3.7.24) zu

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}'^1 &= (A - C)\omega'^3\omega'^2, \\ A\dot{\omega}'^2 &= (C - A)\omega'^3\omega'^1, \\ C\dot{\omega}'^3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7.31)$$

Der einfachste Fall liegt vor, wenn alle drei Hauptträgheitsmomente gleich sind, also wenn sogar $A = B = C$ gilt. Solche Kreisel bezeichnet man als **Kugelkreisel**. Der Kreiselkörper muß dabei allerdings nicht notwendig Kugelgestalt besitzen. So ist z.B. auch ein homogener Würfel bei Rotation um seinen Schwerpunkt ein Kugelkreisel. Jedenfalls rotiert ein Kugelkreisel stets mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Achse durch den Schwerpunkt (jede Achse ist dann natürlich Hauptträgheitsachse).

Für den allgemeineren symmetrischen Kreisel mit $C \neq A$, ist gemäß (3.7.31) die Winkelgeschwindigkeitskomponente bzgl. der Richtung der Symmetrieachse, also der **Figurenachse** $\vec{f} = \vec{e}'_3$, zeitlich konstant, d.h.

$$\omega'_3 = \omega_0 = \text{const.} \quad (3.7.32)$$

Die Gleichungen für die beiden übrigen Komponenten vereinfachen sich daher zu einem linearen Differentialgleichungssystem, das man am bequemsten durch Zusammenfassung zu einer komplexen Zahl

$$z = \omega'^1 + i\omega'^2 \quad (3.7.33)$$

löst. Die ersten beiden Gleichungen in (3.7.31) ergeben dann

$$\dot{z} = \frac{i}{A}(C - A)\omega_0 z \quad (3.7.34)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$z(t) = z_0 \exp\left[\frac{i}{A}(C - A)\omega_0 t\right]. \quad (3.7.35)$$

Wählen wir die Anfangsbedingung $z_0 = \alpha_0 \in \mathbb{R}$ ist, folgt also für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bzgl. des körperfesten Systems

$$\omega'(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0 \cos(\omega_1 t) \\ \alpha_0 \sin(\omega_1 t) \\ \omega_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{C - A}{A}\omega_0. \quad (3.7.36)$$

Für einen Beobachter, der relativ zum körperfesten Bezugssystem ruht, beschreibt also der momentane Winkelgeschwindigkeitsvektor einen Kreiskegel um die Figurenachse, wobei die Spitze dieses Vektors

3.7. Elemente der Kreiseltheorie

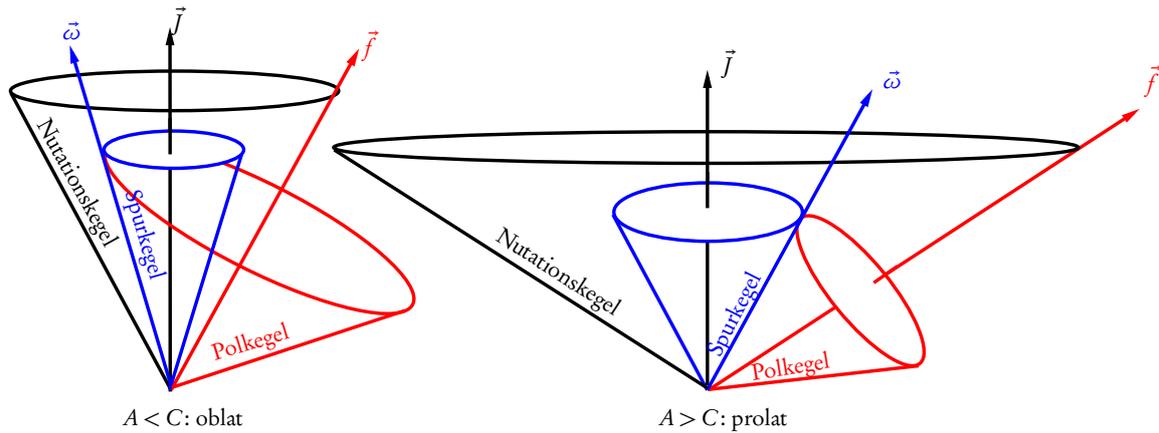


Abbildung 3.9: Zum kräftefreien symmetrischen Kreisel. Die drei Vektoren \vec{J} , $\vec{\omega}$ und \vec{f} befinden sich stets in einer Ebene, die bzgl. des raumfesten Bezugssystems um die zeitlich konstante Drehimpulsachse rotiert, d.h. $\vec{\omega}$ und \vec{f} beschreiben gerade Kreiskegel um die Drehimpulsachse, die man als Spur- (blau) bzw. Nutationskegel (schwarz) bezeichnet. Zugleich rotiert $\vec{\omega}$ vom körperfesten Bezugssystem aus betrachtet auf dem Polkegel (rot) um die Figurenachse. Je nachdem, ob die Hauptträgheitsmomente einer oblaten oder prolaten Kreiselform entsprechen, rollt also der Polkegel auf dem Inneren bzw. Äußeren des Spurkegels ab.

gleichförmig einen Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 durchläuft. Diesen Kegel bezeichnet man als **Polkegel**.

Wir wollen nun aber die Kegelbewegung bzgl. raumfester Koordinaten beschreiben, entspricht dies doch der Beobachtersituation der üblichen Hörsaalexperimente. Ein durch die Bewegung ausgezeichneter raumfester Vektor ist der **Spin** \vec{S} . Seine körperfesten Komponenten sind vermöge (3.7.18) durch

$$\mathbf{S}' = \Theta' \omega' = \begin{pmatrix} A\alpha_0 \cos(\omega_1 t) \\ A\alpha_0 \sin(\omega_1 t) \\ C\omega_0 \end{pmatrix} \quad (3.7.37)$$

gegeben. Wir können daraus leicht die Bewegung der Figuren- und Winkelgeschwindigkeitsachse im raumfesten Bezugssystem ermitteln, indem wir entsprechende Invarianten bilden. Als erstes stellen wir fest, daß diese drei Achsen stets in einer Ebene liegen:

$$\mathbf{f}'(\omega' \times \mathbf{S}') = 0. \quad (3.7.38)$$

Weiter ist die Projektion sowohl der Winkelgeschwindigkeit als auch der Figurenachsennormale auf die Drehimpulsachse zeitlich konstant. Gleiches gilt für die Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf die Figurenachsennormale. Die entsprechenden Winkel ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \cos \angle(\vec{f}, \vec{\omega}) &= \frac{\mathbf{f}' \omega'}{|\omega'|} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\alpha_0^2 + \omega_0^2}}, \\ \cos \angle(\vec{f}, \vec{S}) &= \frac{\mathbf{f}' \mathbf{S}'}{|\mathbf{S}'|} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + (A/C)^2 \alpha_0^2}}, \\ \cos \angle(\vec{\omega}, \vec{S}) &= \frac{\omega' \mathbf{S}'}{|\omega'| |\mathbf{S}'|} = \frac{A\alpha_0^2 + C\omega_0^2}{\sqrt{(\alpha_0^2 + \omega_0^2)(A^2\alpha_0^2 + C^2\omega_0^2)}}. \end{aligned} \quad (3.7.39)$$

3. Durchgerechnete Beispiele

Es bewegen sich also sowohl die Figurenachsse als auch die Winkelgeschwindigkeitsachse auf Kreiskegeln um die raumfeste Drehimpulsachse. Die entsprechende Rotationsfrequenz berechnen wir weiter unten nach Einführung der Euler-Winkel.

Diese Kegel sind in Abb. 3.9 abgebildet, und zwar für die beiden Fälle $C > A$ bzw. $C < A$. Die entsprechenden Kreiselkörper kann man sich dabei als homogene Rotationsellipsoide vorstellen, wobei die Symmetrieachse (also die Figurenachsse) entweder die kurze Achse ($C > A$ entsprechend einem oblaten Ellipsoid) oder die lange Achse ($C < A$ entsprechend einem prolaten Ellipsoid) ist. Der durch die Bewegung der Figurenachsse um die Drehimpulsachse beschriebene Kreiskegel heißt **Nutationskegel** (in Abb. 3.9 schwarz eingezeichnet) und die entsprechende Bewegung **Nutation** (in der älteren Literatur oft auch als **reguläre Präzession** bezeichnet). Der durch $\vec{\omega}$ um \vec{S} beschriebene Kegel heißt **Spurkegel** (blau). Gleichzeitig beschreibt die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ den schon oben besprochenen **Polkegel** um die körperfeste Figurenachsse (rot).

Wir nehmen nun an, die 3'-Achse sei so orientiert, daß $\omega_0 > 0$ ist. Dann sind die in (3.7.39) angegebenen Cosinus positiv, und die entsprechenden Winkel liegen allesamt im Intervall $[0, \pi/2]$. Entsprechend befindet sich der Spurkegel für einen oblaten Kreisel im Inneren, für einen prolaten Kreisel im Äußeren des Polkegels wie in der Figur (3.9) gezeigt, denn da der Cosinus im betrachteten Winkelintervall monoton fallend ist, gilt

$$\begin{aligned} C > A \quad (\text{oblat:}) &\Rightarrow \angle(\vec{f}, \vec{S}) < \angle(\vec{f}, \vec{\omega}), \\ C < A \quad (\text{prolat:}) &\Rightarrow \angle(\vec{f}, \vec{S}) > \angle(\vec{f}, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (3.7.40)$$

Wir können nun die Euler-Winkel als Funktionen der Zeit sehr einfach explizit berechnen, indem wir (3.7.30) mit (3.7.36) vergleichen:

$$\omega' = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \cos(\omega_1 t) \\ \alpha_0 \sin(\omega_1 t) \\ \omega_0 \end{pmatrix}. \quad (3.7.41)$$

Weiter legen wir die 3-Achse des raumfesten Bezugssystems so, daß

$$S = S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S' = \hat{D}^t S = S \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \stackrel{(3.7.37)}{=} \Theta' \omega' = \begin{pmatrix} A\alpha_0 \cos(\omega_1 t) \\ A\alpha_0 \sin(\omega_1 t) \\ C\omega_0 \end{pmatrix}. \quad (3.7.42)$$

ist. Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich der drei Komponenten zunächst

$$A\alpha_0 = S \sin \vartheta, \quad C\omega_0 = S \cos \vartheta \Rightarrow \vartheta = \text{const}, \quad (3.7.43)$$

und (3.7.41) vereinfacht sich zu

$$\omega' = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \cos(\omega_1 t) \\ \alpha_0 \sin(\omega_1 t) \\ \omega_0 \end{pmatrix}. \quad (3.7.44)$$

Der Vergleich der beiden ersten Komponenten dieser Gleichung liefert nach der Wahl der Orientierung der raumfesten Achsen \vec{e}_1 und \vec{e}_2 , so daß $\psi(t=0) = 0$ wird,

$$\dot{\psi} = \frac{\alpha_0}{\sin \vartheta} = \frac{S}{A} =: \Omega_1 = \text{const} \Rightarrow \psi = \Omega_1 t, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega_1 t =: \frac{\pi}{2} + \Omega_2 t \quad (3.7.45)$$

3.7. Elemente der Kreiseltheorie

und damit schließlich aus der dritten Komponente von (3.7.43)

$$\Omega_2 + \Omega_1 \cos \vartheta = \omega_0 = \frac{S}{C} \cos \vartheta. \quad (3.7.46)$$

Mit (3.7.36) und (3.7.45) folgt schließlich noch

$$\Omega_2 = -\omega_1 = \frac{A-C}{A} \omega_0 = \frac{A-C}{AC} S \cos \vartheta. \quad (3.7.47)$$

Die Winkelgeschwindigkeit im raumfesten Koordinatensystem ist also

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega_2 \sin \vartheta \sin(\Omega_1 t) \\ -\Omega_2 \sin \vartheta \cos(\Omega_1 t) \\ \Omega_1 + \Omega_2 \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.7.48)$$

und der Richtungsvektor der Figurenachse

$$\boldsymbol{f} = \hat{D}\boldsymbol{f}' = \hat{D} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin(\Omega_1 t) \\ -\sin \vartheta \cos(\Omega_1 t) \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (3.7.49)$$

In der Tat ergibt sich das bereits oben gewonnene Bild der Bewegung des Kreisels:

Im raumfesten Bezugssystem betrachtet, durchläuft die Winkelgeschwindigkeit den **Spurkegel** mit der Kreisfrequenz Ω_1 und die Figurenachse den **Nutationskegel** mit der gleichen Kreisfrequenz Ω_1 um die zeitlich konstante Drehimpulsachse $\boldsymbol{S} = S(0, 0, 1)^t = A\Omega_1(0, 0, 1)^t$. Zugleich rotiert vom körperfesten Bezugssystem aus betrachtet die Winkelgeschwindigkeit mit der Kreisfrequenz $\omega_1 = -\Omega_2$ auf dem **Polkegel**. Die drei Vektoren \boldsymbol{S} , $\boldsymbol{\omega}$ und \boldsymbol{f} befinden sich stets in einer Ebene, wobei \boldsymbol{S} zeitlich konstant ist und $\boldsymbol{\omega}$ und \boldsymbol{f} mit der gemeinsamen Kreisfrequenz Ω_1 um \boldsymbol{S} rotieren.

3.7.7 Der Lagrangeformalismus für den freien symmetrischen Kreisel

Wir behandeln nun zur Illustration der Euler-Winkelparametrisierung nochmals den freien symmetrischen Kreisel aus Abschnitt 3.7.6 im Lagrangeformalismus. Dann ist gemäß (3.7.10), (3.7.11) und (3.7.30)

$$L = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} [A(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2]. \quad (3.7.50)$$

Daraus entnehmen wir sofort, daß die Winkel ψ und φ zyklische Variablen sind. Außerdem ist die Energie erhalten, da L nicht explizit von der Zeit abhängt. Damit haben wir bereits drei **erste Integrale**:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta = \text{const}, \quad (3.7.51)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = \text{const}, \quad (3.7.52)$$

$$E = T_{\text{rot}} = \text{const}. \quad (3.7.53)$$

Letzteres folgt daraus, daß die Lagrangefunktion eine homogene Funktion zweiten Grades in den Zeitableitungen der drei Euler-Winkel ist.

3. Durchgerechnete Beispiele

Aufgrund der Invarianz dieses abgeschlossenen Systems unter Rotationen wissen wir aufgrund des Noether-Theorems, daß der Drehimpuls im raumfesten Bezugssystem erhalten ist. Von unserer Behandlung des Problems mit Hilfe der Eulerschen Kreisgleichungen her wissen wir, daß wir besonders einfache Verhältnisse erreichen, wenn wir die raumfeste e_3 -Achse zur Richtung des Drehimpulses machen. Setzen wir also $S = (0, 0, S)^t$ mit $S = \text{const}$, folgt aufgrund der Definition der Eulerwinkel durch die Transformationsmatrix \hat{D} von raum- zu körperfesten Koordinaten für den Drehimpuls im körperfesten Bezugssystem

$$S' = \hat{D}^t S = S \hat{D}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (3.7.54)$$

Weiter folgt daraus zusammen mit (3.7.30) und (3.7.18) unter Verwendung von (3.7.52)

$$S'_3 = C \omega'_3 = p_\varphi = S \cos \vartheta. \quad (3.7.55)$$

Da $p_\varphi = \text{const}$ und $S = \text{const}$, ist also auch $\vartheta = \text{const}$. Weiter ergibt sich damit (3.7.51) und (3.7.52)

$$p_\psi = A \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + p_\varphi \cos \vartheta \Rightarrow \dot{\psi} =: \Omega_1 = \text{const}. \quad (3.7.56)$$

Daraus schließt man wiederum aus (3.7.52)

$$\dot{\varphi} =: \Omega_2 = \text{const}. \quad (3.7.57)$$

Verwenden wir (3.7.56) und (3.7.57) wiederum in (3.7.30) folgt

$$S' = \begin{pmatrix} A \omega'_1 \\ A \omega'_2 \\ C \omega'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \Omega_1 \sin \vartheta \sin \varphi \\ A \Omega_1 \sin \vartheta \cos \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix}, \quad (3.7.58)$$

erhalten wir durch Vergleich mit (3.7.54)

$$S = A \Omega_1 \quad (3.7.59)$$

und damit schließlich mit (3.7.52)

$$p_\varphi = S \cos \vartheta = A \Omega_1 \cos \vartheta = C (\Omega_2 + \Omega_1 \cos \vartheta) \Rightarrow \Omega_2 = \frac{A-C}{AC} S \cos \vartheta. \quad (3.7.60)$$

Die übrige Diskussion ergibt sich dann wie im vorigen Abschnitt. Die gleiche Phasenlage wie in (3.7.48) und (3.7.49) erhält man durch Aufintegration von (3.7.56) und (3.7.57) durch Wahl der entsprechenden Anfangsbedingungen in Übereinstimmung mit (3.7.45) zu

$$\psi = \Omega_1 t, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \Omega_2 t. \quad (3.7.61)$$

In diesem Falle ergibt die Verwendung des Hamiltonschen Prinzips kaum rechnerische Vorteile gegenüber der Verwendung der Eulerschen Kreisgleichungen im vorigen Abschnitt.

3.7.8 Der schwere symmetrische Kreisel

Dies ändert sich freilich drastisch für den folgenden Fall des schweren symmetrischen Kreisels, wo der Unterstützungspunkt nicht mehr mit dem Schwerpunkt übereinstimmt und also die Schwerkraft der Erde ein Drehmoment impliziert. Freilich richten wir nun die raumfeste e_3 -Achse in Richtung der Schwerkraft, denn dann ist aufgrund der Rotationssymmetrie des Problems um diese Achse wenigstens noch die entsprechende Drehimpulskomponente S_3 erhalten, freilich nicht mehr die dazu senkrechten Komponenten, und der entsprechende Drehwinkel ψ bleibt zyklisch.

Wir legen den Ursprung des raum- und körperfesten Bezugssystems zusammen, so daß $\vec{a} = 0$, d.h. vermöge (3.7.2) $\vec{x}_\alpha = \vec{r}_\alpha$. Da der Schwerpunkt aus Symmetriegründen auf der Figurenachs liegt, ist $\vec{s} = s\vec{f} = s\vec{e}'_3$ und mit (3.7.13) erhalten wir die potentielle Energie zu

$$V = -g \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha} = -Mgs = Mgs \cos \vartheta, \quad (3.7.62)$$

wobei wir die raumfeste e_3 -Achse senkrecht nach oben gelegt haben, so daß $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ ist. Zusammen mit (3.7.30) folgt für die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} \omega'^t \Theta' \omega' + V = \frac{1}{2} \left[A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 \right] - Mgs \cos \vartheta. \quad (3.7.63)$$

Die Symmetrien des Problems ergeben wieder die drei ersten Integrale, die wir schon beim freien symmetrischen Kreisel erhalten haben: ψ und φ sind zyklisch, entsprechend der Symmetrie unter Rotationen um die raumfeste \vec{e}_3 -Achse (also die Richtung von \vec{g}) bzw. um die körperfeste \vec{e}'_3 -Achse, also die Figurenachs \vec{f} .

Außerdem ist die Gesamtenergie erhalten, weil L nicht explizit von der Zeit abhängt. Wir haben also wieder die Erhaltungsgrößen

$$p_{\psi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta \quad (3.7.64)$$

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta), \quad (3.7.65)$$

$$E = T + V = \frac{1}{2} \left[A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 \right] + Mgs \cos \vartheta. \quad (3.7.66)$$

Freilich können wir nun nicht mehr wie im Anschluß an (3.7.53) auf die Erhaltung des Gesamtspins schließen, da nun \vec{g} eine Richtung im Raum auszeichnet und folglich nur noch Rotationen um diese Achse eine Symmetrie des Systems darstellen, nicht mehr jedoch beliebige Drehungen um den Drehpunkt.

Wir können aber die Integration der Bewegungsgleichungen nach dem Standardschema des Hamiltonformalismus vornehmen. Dazu substituieren wir in (3.7.66) $\dot{\psi}$ und $\dot{\varphi}$ durch die erhaltenen kanonischen Impulse (3.7.64) und (3.7.65):

$$E = \frac{A}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{(p_{\psi} - p_{\varphi} \cos \vartheta)^2}{2A \sin^2 \vartheta} + \frac{p_{\varphi}^2}{2C} + Mgs \cos \vartheta. \quad (3.7.67)$$

Dies können wir nach t auflösen. Nach Substitution $u = \cos \vartheta$ erhalten wir

$$t - t_0 = \pm \int_{u_0}^u du \frac{A}{\sqrt{2A(E - Mgsu)(1 - u^2) - (A/C)p_{\varphi}^2(1 - u^2) - (p_{\psi} - p_{\varphi} \cos \vartheta)^2}}. \quad (3.7.68)$$

3. Durchgerechnete Beispiele

Auflösen nach ϑ ergibt wieder eine elliptische Funktion. Dabei ist das Vorzeichen der Wurzel nach dem bei Schwingungen üblichen Verfahren zu wählen: Für physikalisch sinnvolle Anfangsbedingungen muß nämlich u im Intervall $[-1, 1]$ zwei reelle Nullstellen $u_{1,2}$ haben, zwischen denen das Argument der Wurzel positiv ist. Zwischen den entsprechenden Winkeln $\vartheta_{1,2}$ schwingt dann die Figurenachse relativ zur 3-Achse hin und her. Im Zusammenhang mit dem schweren Kreisel bezeichnet man diese Schwingung als **Nutationsbewegung**. Aus (3.7.64) und (3.7.65) folgt

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta}. \quad (3.7.69)$$

Betrachtet man die Bewegung der Spitze des Einheitsvektors \vec{f} , besagt dies, daß sich die Figurenachse unter den der Nutationsbewegung entsprechenden Schwankungen entweder vorwärtsbewegt, falls $\dot{\psi}$ stets ein Vorzeichen besitzt oder auch teilweise rückläufig sein kann, falls $\dot{\psi}$ das Vorzeichen wechselt. Diese Bewegung bezeichnet man als **Präzession**.

Ein Spezialfall liegt vor, wenn $\vartheta = \text{const}$ (aber von 0 und π verschieden) ist, also $\vartheta_1 = \vartheta_2$ eine Nullstelle zweiter Ordnung ist. Dann ist gemäß (3.7.69) auch $\dot{\psi} = \text{const}$ und damit wegen (3.7.65) auch $\dot{\varphi}$. Dies bezeichnet man als **reguläre Präzession**.

Wir analysieren nun noch zwei Spezialfälle, die wir näherungsweise analytisch behandeln können.

3.7.9 Pseudoreguläre Präzession

Als erstes denken wir uns den Kreisel zu Anfang in schnelle Rotation um die Figurenachse versetzt und dann mit der Figurenachse um einen Winkel $\vartheta = \vartheta_0$ (mit $\vartheta_0 \neq 0, \pi$) gegen die 3-Richtung gekippt ohne weiteren Anstoß auf seine Spitze gesetzt. Dann haben wir die Anfangsbedingungen

$$\vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \psi(0) = \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0, \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\vartheta}(0) = 0. \quad (3.7.70)$$

Wir nehmen nun an, daß

$$\vartheta = \vartheta_0 + \epsilon \quad (3.7.71)$$

mit $|\epsilon| \ll 1$. Wir wollen dann die Bewegungsgleichungen nach kleinen Größen in ϵ entwickeln. Wir werden noch genauer zu spezifizieren haben, in welchen Fällen die Näherung anwendbar ist. Aus den Anfangsbedingungen und (3.7.64)-(3.7.66) folgt

$$p_\psi = C \omega_0 \cos \vartheta_0, \quad p_\varphi = C \omega_0, \quad E = \frac{p_\varphi^2}{2C} + M g s \cos \vartheta_0. \quad (3.7.72)$$

Wir betrachten die Energie in der Form (3.7.67), setzen (3.7.71) ein und entwickeln bis zur zweiten Ordnung in ϵ . Dann folgt

$$\frac{A}{2} \dot{\vartheta}^2 = \frac{A}{2} \dot{\epsilon}^2 = M g s \sin \vartheta_0 \epsilon + \frac{1}{2} \left(M g s \cos \vartheta_0 - \frac{C^2 \omega_0^2}{A} \right) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (3.7.73)$$

Ableiten dieser Gleichung nach der Zeit und Division durch $\dot{\epsilon}$ ergibt schließlich die Differentialgleichung

$$\ddot{\epsilon} = \Omega^2 (a - \epsilon), \quad (3.7.74)$$

wobei wir

$$\Omega^2 = \frac{C^2 \omega_0^2}{A^2} - \frac{M g s}{A} \cos \vartheta_0, \quad a = \frac{M g s \sin \vartheta_0}{A \Omega^2} \quad (3.7.75)$$

3.7. Elemente der Kreiseltheorie

gesetzt haben. Offensichtlich bleibt ϵ nur klein, wenn $\Omega^2 > 0$. Die allgemeine Lösung lautet dann nämlich

$$\epsilon(t) = c_1 \cos(\Omega t + c_2) + a. \quad (3.7.76)$$

Mit den Anfangsbedingungen $\epsilon(0) = \dot{\epsilon}(0) = 0$ ist schließlich

$$\epsilon(t) = a[1 - \cos(\Omega t)]. \quad (3.7.77)$$

Die Näherung ist also gerechtfertigt, wenn $|a| \ll 1$, und das ist offenbar erfüllt, wenn

$$Mgs \ll \frac{C^2 \omega_0^2}{A}. \quad (3.7.78)$$

Das bedeutet, daß die potentielle Energie der Schwerkraft sehr viel kleiner sein muß als die anfängliche Rotationsenergie.

Entwickeln wir nun (3.7.69) unter Verwendung von (3.7.72) bis zur linearen Ordnung in ϵ , erhalten wir

$$\dot{\psi} = \frac{C \omega_0}{A \sin \vartheta_0} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.7.79)$$

Setzen wir hierin (3.7.77) ein, finden wir durch Integration unter Verwendung der Anfangsbedingungen (3.7.70)

$$\psi(t) = \frac{C \omega_0 a}{A \sin \vartheta_0} \left[t - \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \right]. \quad (3.7.80)$$

Das bedeutet, daß der Kreisel dem Drehmoment aufgrund der Gravitationskraft „ausweicht“, indem die Figurenachse um die 3-Achse präzediert, d.h. der Kreisel weicht senkrecht zum angewandten Drehmoment aus. Diese Präzession erfolgt zwar nicht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, aber für $t \gg 1/\Omega$ fallen die dann relativ dazu kleinen schnellen Schwingungen nicht mehr sonderlich auf, so daß die Bewegung fast wie eine reguläre Präzession erscheint. Man spricht daher von **pseudoregulärer Präzession**. Ebenso erhalten wir

$$\dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{C \omega_0 \cot \vartheta_0}{A} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.7.81)$$

mit der Lösung

$$\varphi(t) = \omega_0 t - \frac{C \omega_0 a \cot \vartheta_0}{A} \left[t - \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \right]. \quad (3.7.82)$$

3.7.10 Stabilität der Rotation um die senkrecht stehende Figurenachse

Schließlich betrachten wir als weiteren Fall, daß wir den Kreisel um seine Figurenachse rotieren lassen und dann zur Zeit $t = 0$ den Kreisel mit der Figurenachse in Richtung der 3-Achse stellen. Dann gelten die Anfangsbedingungen

$$\vartheta(0) = \varphi(0) = \psi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0, \quad \dot{\psi} = \dot{\vartheta}(0) = 0. \quad (3.7.83)$$

Dann ist

$$p_\psi = p_\varphi = C \omega_0. \quad (3.7.84)$$

Aus dem Energiesatz folgt mit $u = \cos \vartheta$ nach einigen Umformungen

$$\frac{A}{2} \dot{u}^2 = Mgs(1-u)^2(u-u_0) := P(u) \quad \text{mit} \quad u_0 = \frac{C^2 \omega_0^2}{2AMgs} - 1. \quad (3.7.85)$$

3. Durchgerechnete Beispiele

Bei physikalisch realisierbaren Anfangsbedingungen muß $u \in [-1, 1]$ sein und dort $P(u) \geq 0$. In jedem Fall besitzt im hier betrachteten Fall das Polynom bei $u = 1$ eine doppelte Nullstelle. Falls dann $u_0 > 1$, so besitzt das Polynom bei $u = 1$ ein Maximum, ist also in der Umgebung von $u = 1$ negativ, so daß $\dot{u}(t) \equiv 0$, d.h. $u(t) \equiv 1$ bzw. $\theta = 0 = \text{const}$ sein muß. Aus (3.7.65) folgt dann zusammen mit der Anfangsbedingung (3.7.83), daß $\dot{\psi} = 0$, also $\psi = 0 = \text{const}$ sein muß und folglich $\varphi(t) = \omega_0 t$. In diesem Fall, d.h. falls

$$u_0 > 1 \Rightarrow \omega_0^2 > \frac{4AMgs}{C^2} = \omega_{\text{crit}}^2, \quad (3.7.86)$$

rotiert also der Kreisel exakt weiter mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die 3-Achse. Dann können wir schreiben

$$u_0 = \frac{2\omega_0^2}{\omega_{\text{crit}}^2} - 1. \quad (3.7.87)$$

Falls $u_0 < 0$, also $\omega_0^2 < \omega_{\text{crit}}^2$ ist die doppelte Nullstelle bei $u = 1$ ein Minimum und $-1 < u_0 < 1$, d.h. u schwankt zwischen u_0 und 1 hin und her, d.h. der Kreisel führt eine Nutationsbewegung aus. Aus (3.7.69) folgt dann

$$\dot{\psi} = \frac{C\omega_0}{A(1+u)} > 0, \quad (3.7.88)$$

d.h. die Figurenachse präzediert während der Nutationsbewegung um die 3-Achse.

Kapitel 4

Spezielle Relativitätstheorie

Die in den vorigen Kapiteln behandelte Mechanik beruht auf der **Galilei-Newtonschen Raumzeitstruktur**, die wir gleich zu Beginn unserer Betrachtungen in Kapitel 1 quasi axiomatisch an die Spitze gestellt haben.

In diesem Kapitel werden wir nun zuerst der Frage genauer nachgehen, welche Raumzeitstrukturen überhaupt bei Zugrundelegung des **speziellen Relativitätsprinzips**, also der Annahme, daß wenigstens ein Inertialsystem existiert und daß jedes dazu gleichförmig geradlinig bewegte Bezugssystem wieder ein Inertialsystem ist, in dem die Naturgesetze ungeändert gültig sind, d.h. daß die physikalischen Gleichungen invariant unter dem Wechsel des Inertialsystems sind, möglich sind. Wie wir sehen werden, gibt es im wesentlichen nur eine weitere solche Raumzeitstruktur, nämlich die **Einstein-Minkowskische Raumzeit** der **Speziellen Relativitätstheorie**. Diese ist historisch aus der Analyse der elektromagnetischen Phänomene wie sie Mitte des 19. Jahrhunderts durch die **Maxwellschen Gleichungen** zusammengefaßt wurden, durch Lorentz, FitzGerald, Poincaré und schließlich Einstein hervorgegangen. Hier führen wir die spezielle Relativitätstheorie ihrem Wesen entsprechend als die gesamte Physik umfassende Theorie der Raumzeitbeschreibung ein. Dies ist zwar durch eine etwas abstraktere Darstellung erkauft, ermöglicht es aber, die klassische Elektrodynamik sogleich in der ihr adäquaten Weise als **relativistische Theorie** einzuführen.

In diesem Band, der die Mechanik der Punktteilchen umfaßt, interessieren wir uns für die grundlegenden Beziehungen der Raumzeitstruktur und ihre Auswirkung auf die Kinematik und Dynamik der Bewegung der Teilchen. Wir werden einige einfache Probleme wie die Bewegung in vorgegebenen elektro- und magnetostatischen Feldern besprechen. Im zweiten Teil dieses Bandes werden wir nach gehöriger Besprechung der Kontinuumsmechanik auch deren relativistische Formulierung ins Auge fassen.

4.1 Das spezielle Relativitätsprinzip

Wir folgen in der Betrachtung zum speziellen Relativitätsprinzip [BG69], machen jedoch die vereinfachende Annahme, daß die zur Raumzeit zusammengefaßte Struktur von Raum und Zeit eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** sein soll, denn wir gehen davon aus, daß die physikalischen Grundgesetze sich durch Differentialgleichungen ausdrücken lassen.

Ebenso schränken wir die Symmetriegruppe der Raumzeit auf die **Zusammenhangskomponente mit der Gruppenidentität** ein, denn dies ist die physikalisch plausibelste Symmetriegruppe. Die diskreten Transformationen der Raumspiegelung und der „Zeitumkehr“ sind nicht notwendig Symmetrien

der physikalischen Gesetze, und in der Tat zeigt sich, daß die Raumspiegelungen mit Sicherheit keine Symmetrie der Naturgesetze sind, denn die schwache Wechselwirkung verletzt die Paritätserhaltung, welche unmittelbare Folge der Raumspiegelsymmetrie ist.

Im Rahmen der lokalen Quantenfeldtheorie, die dem überaus erfolgreichen **Standardmodell der Elementarteilchen** zugrundeliegt, ist die sogenannte **CPT-Invarianz** Folge der Invarianz unter stetig aus der Identität deformierbaren Poincaré-Transformationen, d.h. beobachtet man einen physikalischen Vorgang, so muß es auch den entsprechenden CPT-gespiegelten Vorgang geben, d.h. ersetzt man alle Teilchen durch Antiteilchen (C-Spiegelung oder Ladungskonjugation), invertiert den Raum (P-Spiegelung oder Raumspiegelung) und kehrt den Zeitpfeil um (T-Spiegelung oder Bewegungsumkehr), muß sich wieder ein in der Natur möglicher Vorgang ergeben.

Nun weiß man, daß die schwache Wechselwirkung nicht nur die Raumspiegelungssymmetrie bricht, sondern auch die CP-Symmetrie, d.h. die aus einer Ladungskonjugation und Raumspiegelung zusammengesetzte Transformation. Da CPT aber eine Symmetrie sein muß, wenn die lokale Quantenfeldtheorie korrekt ist, muß auch die Zeitumkehrinvarianz durch die schwache Wechselwirkung verletzt sein.

Es erscheint aufgrund dieser Argumentation gerechtfertigt, Invarianz nur unter stetig mit der Identität zusammenhängenden Raumzeittransformationen zu verlangen.

- (1) Wir gehen im folgenden davon aus, daß es eine **Standarduhr** gibt. Darunter stellen wir uns ein von äußeren Einflüssen weitestgehend unabhängiges periodisch funktionierendes System vor, welches mit einer als konstant anzusehenden Frequenz „Zeitticks“ aussendet, d.h. daß es immer und überall für einen relativ zu ihm ruhenden Beobachter in exakt gleichen Zeitabständen einen solchen „Zeittick“ aussendet.

Es ist dabei zu beachten, daß dies zunächst jedes System sein kann. Ohne den Bezug zu anderen physikalischen Vorgängen, insbesondere zur Bewegung von Körpern, können wir die Korrektheit der Annahme der Existenz einer Standarduhr nicht experimentell feststellen, d.h. die Idee von der universellen Uhr muß sich im weiteren Verlauf unserer Formulierung noch als mit der Erfahrung in hinreichender Übereinstimmung befindlich erweisen.

Wir bemerken hier nur schon im voraus, daß wir nach dem **Standardmodell der Elementarteilchen** davon ausgehen, daß mit den von Atomen bei elektronischen Übergängen zwischen Energieniveaus ausgesandten elektromagnetischen Wellen solche Standarduhren zu jeder Zeit und an jedem Ort (wenigstens prinzipiell) verfügbar sind. Wir postulieren dann, daß durch relativ zueinander ruhende an beliebigen Orten befindliche Beobachter mit Standarduhren gemessene Zeitabstände gleich sind.

In der Tat wird im **Internationalen Einheitensystem** (Système International oder kurz SI) die Zeit durch die Frequenz der Strahlung eines bestimmten atomaren Übergangs von Cäsiumatomen definiert. Es stellt das genaueste Einheitennormal im SI überhaupt dar.

Ebenso nehmen wir an, es gäbe einen **Einheitsmaßstab**. Auch dieser kann nach derzeitigem Kenntnisstand durch die Atome als mit hinreichender Genauigkeit realisiert gedacht werden.

Wir werden unten sehen, daß im Rahmen des relativistischen Raumzeitmodells eine **universelle Grenzgeschwindigkeit** existiert, deren Zahlenwert mit einer Einheitszeit auch eine Einheitslänge notwendig festlegt.

- (2) Es existiert ein Inertialsystem, d.h. es existiert ein Bezugssystem derart, daß für einen relativ zu diesem ruhender Beobachter ein Teilchen, das keinerlei Wechselwirkungen ausgesetzt ist, sich geradlinig gleichförmig bewegt oder in Ruhe verharrt.

4.1. Das spezielle Relativitätsprinzip

Für einen relativ zu einem solchen Bezugssystem ruhenden Beobachter gelten hinsichtlich der Lage- und geometrischen Eigenschaften die Gesetze der **Euklidischen Geometrie**. Insbesondere existiert eine **universelle Längeneinheit**, die sich unverändert von einem Ort zu jeden anderen Ort transportieren läßt und die Länge von Strecken an ruhenden Körpern im Sinne der euklidischen Geometrie gemessen werden können. Der Raum für einen bzgl. eines Inertialsystem ruhenden Beobachter ist also ein **affin-euklidisches Kontinuum**.

Allgemein ist ein Inertialsystem K durch eine in ihm ruhende Standarduhr, die durch ihre „Ticks“ die Systemzeit t festlegt und durch ein kartesisches Koordinatensystem, das durch die Befestigung dreier aufeinander senkrecht stehender Einheitsmaßstäbe in einem beliebigen Punkt des Raumes realisiert gedacht werden kann, so daß jeder Punkt im Raum durch die Angabe der Komponenten x des Ortsvektors \vec{x} bzgl. dieses Koordinatensystems lokalisiert werden kann. Wir schreiben für ein solches Bezugssystem kurz $K(t, x)$.

- (3) Das **spezielle Relativitätsprinzip** postuliert nun, daß alle Naturgesetze in allen durch die Annahmen (1)-(2) axiomatisch begründeten Inertialsystemen gleich sind, d.h. daß die Gleichungen, welche diese Naturgesetze beschreiben, **invariant** bei Transformationen von einem Inertialsystem in ein beliebiges anderes sein müssen.
- (4) Die Zeit definiert die Kausalstruktur des Geschehens eindeutig, d.h. finden zwei Ereignisse für einen bzgl. $K(t, x)$ ruhenden Beobachter am gleichen Ort zu verschiedenen Zeiten $t_1 < t_2$ statt, so gilt für die Zeitkoordinaten eines beliebigen Beobachters, der in einem anderen Inertialsystem $K'(t', x')$ ruht, $t'_1 < t'_2$.

Wir wollen nun die Transformationsregeln zwischen den auf Inertialsysteme bezogenen Koordinaten aus diesen allgemeinen Annahmen herleiten.

Zunächst ist es für all unsere Untersuchungen nützlich, die Raum-Zeit als einen vierdimensionalen affinen Vektorraum aufzufassen, der allerdings nicht notwendig mit einer Metrik ausgestattet zu sein braucht. Wir numerieren die Komponenten solcher **Vierervektoren** mit oberen Indizes durch, was sich insbesondere im relativistischen Kontext sehr bewähren wird. Wir schreiben also für Zeit- und Raumkoordinaten von zwei Inertialsystemen $K(t, x)$ und $K'(t', x')$ kurz

$$(x^\mu) = (t, x)^t = (t, X, Y, Z)^t, \quad (x'^\mu) = (t', x')^t = (t', X', Y', Z')^t. \quad (4.1.1)$$

Wegen des speziellen Relativitätsprinzips muß nun ein im Inertialsystem K gleichförmig bewegter Massenpunkt auch bzgl. des Inertialsystems K' gleichförmig bewegt sein, d.h. es muß für die Bahn $y(t)$ bzw. $y'(t')$ bzgl. K und K' stets gelten

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 y'(t')}{dt'^2} = 0. \quad (4.1.2)$$

Wir können nun gemäß Postulat (1) einem jeden Körper eine relativ zu ihm ruhende Standarduhr zugeordnet denken, welche seine **Eigenzeit** τ definiert.

Bewegt sich nun der Körper bzgl. des Inertialsystems K geradlinig gleichförmig, stellt gemäß Postulat (1) und dem Relativitätsprinzip jeder bzgl. dieses Bezugssystems ruhende Beobachter relativ zu seiner Uhr fest, daß die relativ zum Teilchen ruhende Standarduhr Ticks in einem gleichmäßigen Zeitabstand aussendet, der wegen der Homogenität und Isotropie des Raumes nur vom Betrag der Geschwindigkeit des Körpers relativ zu ihm abhängen kann. Das bedeutet aber, daß die Systemzeit proportional zur

4. Spezielle Relativitätstheorie

Eigenzeit des Teilchens sein muß. Wir können also ganz allgemein (4.1.2) auf die Eigenzeit des Teilchens umschreiben:

$$\frac{d^2 y^\mu}{d\tau^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 y'^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (4.1.3)$$

Da nun die Raum-Zeit-Koordinaten y'^μ des Körpers bzgl. K' umkehrbar eindeutige Funktionen der Raum-Zeit-Koordinaten y^μ des Körpers bzgl. K sein müssen, gilt aufgrund der Kettenregel:

$$\frac{d^2 y'^\mu}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 y'^\mu}{\partial y^\rho \partial y^\sigma} \frac{dy^\rho}{d\tau} \frac{dy^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (4.1.4)$$

Dabei wenden wir hier und im folgenden die **Einsteinsche Summenkonvention** an, derzufolge über gleichnamige Raum-Zeit-Indizes von 0 bis 3 zu summieren ist. Dabei haben wir schon benutzt, daß der Körper bzgl. K und wegen (4.1.3) damit auch bzgl. K' gleichförmig bewegt sein muß.

Die allgemeine Transformationsformel muß folglich **affin linear** sein, d.h. es existiert eine reelle invertierbare 4×4 -Matrix Λ und ein reeller Spaltenvierervektor a , so daß

$$x' = \Lambda x + a, \quad (4.1.5)$$

bzw. mit der Summenkonvention in Komponenten geschrieben,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (4.1.6)$$

gilt.

Wir müssen nun die genaue Gestalt der Matrix Λ ermitteln. Dabei kommt uns zuhelfe, daß gemäß Postulat 2 ein jeder bzgl. eines Inertialsystems ruhender Beobachter den Raum als affin-euklidisches Kontinuum wahrnimmt.

Wir werden nun zunächst die Bestimmung der Transformationsmatrix Λ auf den speziellen Fall zurückführen, daß zur Zeit $t = 0$ die Achsen der beiden räumlichen Koordinatensysteme parallel zueinander ausgerichtet sind und sich der Ursprung des Systems K' gegenüber dem System K in Richtung der x -Achse mit der Geschwindigkeit v bewegt.

Offensichtlich muß dazu nur das räumliche kartesische Koordinatensystem in K zur Zeit t so gewählt werden, daß sich der Ursprung von K' in Richtung der neuen x -Achse bewegt. Dies kann durch eine geeignete Drehung erfolgen, die durch zwei Winkel eindeutig bestimmt ist.

Das läßt sich leicht wie folgt zeigen. Es sei $v \neq 0$ der Geschwindigkeitsvektor des Ursprungs von K' , gemessen in K . Dieser läßt sich mit Hilfe zweier Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\vartheta \in [0, \pi)$ wie folgt charakterisieren:

$$v = v \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

Diesen Vektor können wir offenbar durch die orthogonale Transformation

$$D(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

in die gewünschte Ausrichtung bringen:

$$D(\varphi, \vartheta)v = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.9)$$

4.1. Das spezielle Relativitätsprinzip

Dies können wir uns freilich dadurch realisiert vorstellen, daß ein bzgl. K ruhender Beobachter einfach neue kartesische Basisvektoren aus den bisherigen erzeugt, indem er auf diese die Umkehrmatrix $D^{-1}(\varphi, \vartheta)$ anwendet. Bzgl. der neuen Basisvektoren besitzt dann der Geschwindigkeitsvektor des Ursprungs von K' gerade die Komponenten (4.1.9).

Ebenso können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Beobachter in K' zum einen den Zeitnullpunkt seiner Uhr und den Ursprung seines räumlichen kartesischen Koordinatensystems so wählt, daß $t' = 0$ und $x' = 0$ mit dem Ursprung der Raumzeitkoordinaten bzgl. K übereinstimmen. Es sei weiter angenommen, daß der Beobachter in K' seine Koordinatenachsen durch Drehung so orientiert, daß sie zur Zeit $t' = 0$ parallel zu den Achsen des in K gewählten Bezugssystems zu liegen kommen. Das läßt sich etwa durch drei Eulerwinkel ψ , χ und λ parametrisieren, was auf die Drehmatrix $D'(\psi, \chi, \lambda)$ führen möge.

Die Drehungen können wir uns in die vierdimensionale Schreibweise integriert denken, daß wir sie einfach als unteres rechtes 3×3 -Kästchen einer 4×4 -Matrix geschrieben denken, und $\Lambda^0_0 = 1$ sowie $\Lambda^0_j = \Lambda^j_0 = 0$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ setzen.

Dann können wir schreiben

$$\Lambda = D'(\psi, \chi, \lambda)B_1(v)D(\varphi, \vartheta). \quad (4.1.10)$$

Hierbei ist B_1 nun die einzige noch unbestimmte Matrix, die die gleichförmig geradlinige Bewegung eines Systems K' mit der Geschwindigkeit v entlang der x -Achse des Koordinatensystems K beschreibt, wobei die Achsen zur Zeit $t = 0$ parallel ausgerichtet sind. Durch die Wahl des Zeit- und Raumkoordinatenursprungs durch den Beobachter in K' ist also für diesen Spezialfall

$$x' = B_1(v)x. \quad (4.1.11)$$

Der Koordinatenursprung von K' ist nunmehr durch $x' = 0$ gekennzeichnet. Durch Ableiten der sich daraus ergebenden Bahnkurve $x(t)$ nach t muß sich der konstante Geschwindigkeitsvektor $(v, 0, 0)$ ergeben, so daß zu allen Zeiten also $y' = y$ und $z' = z$ gelten muß.

Gl. (4.1.11) besitzt also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} t' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix}, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z. \quad (4.1.12)$$

Außerdem muß, weil ja der Koordinatenursprung von K' durch $x' = 0$ definiert ist und dieser sich bzgl. K mit der Geschwindigkeit $(v, 0, 0)^t$ bewegen soll,

$$v = -C/D \quad (4.1.13)$$

gelten. Unsere Transformation (4.1.12) liest sich also nunmehr wie folgt

$$\begin{pmatrix} t' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -vD & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix}. \quad (4.1.14)$$

Es ist klar, daß A , B und D Funktionen von v sind, und diese gilt es nun zu bestimmen.

Als nächstes beweisen wir dazu das sog. **Reziprozitätsgesetz**, demzufolge die Geschwindigkeit des Systems K' gegenüber K gerade $-v$ sein muß.

Die gesuchten Transformationen $B_1(v)$ müssen in ihrer Gesamtheit eine **Gruppe** bilden, denn transformiert man von einem Inertialsystem K in ein Inertialsystem K' und von diesem in ein weiteres System K'' , so muß die Komposition beider Transformationen, welche direkt von K nach K'' führt, aufgrund des Relativitätsprinzips wieder vom gleichen Typ sein, d.h. die Funktionen $A(v)$ und $B(v)$

4. Spezielle Relativitätstheorie

gelten für alle Boosts in X -Richtung. Die Inertialsysteme sind vollständig durch die Geschwindigkeit v bestimmt. Analoges gilt für die Umkehrtransformation, welche von K' zurück nach K transformiert, d.h. für dieselben Funktionen A und B gibt es eine Geschwindigkeit \bar{v} , so daß

$$\begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\bar{v}) & B(\bar{v}) \\ -\bar{v}D(\bar{v}) & D(\bar{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ X' \end{pmatrix}. \quad (4.1.15)$$

Andererseits ist aber die Geschwindigkeit von K bzgl. K' , die wir mit \bar{v} bezeichnet haben, auch durch (4.1.14) bestimmt. Setzen wir nämlich $X = 0$, folgt sofort, daß

$$\bar{v} = -\frac{D(v)}{A(v)}v := \varphi(v). \quad (4.1.16)$$

Umgekehrt folgt aus (4.1.15), daß

$$v = \varphi(\bar{v}) \quad (4.1.17)$$

zu gelten hat, d.h. für alle zulässigen Geschwindigkeiten v zwischen Inertialsystemen muß die Eigenschaft

$$\varphi(\varphi(v)) = v \quad (4.1.18)$$

gelten.

Wegen (4.1.18) müssen nun der Definitionsbereich und der Bildbereich von φ übereinstimmen, φ insbesondere also surjektiv sein. Weiter muß φ auch injektiv sein, denn aus $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ folgt wegen (4.1.18) zwangsläufig $v_1 = v_2$.

Wir gehen weiter davon aus, daß der Definitionsbereich von φ zusammenhängend ist, d.h. es muß sich um ein symmetrisches Intervall um $v = 0$ oder ganz \mathbb{R} handeln. Weiter nehmen wir an, φ sei stetig, d.h. die Transformationen gehen allesamt durch eine stetige Abbildung aus $v = 0$ hervor. Dann ist aber φ notwendig streng monoton. Angenommen, es ist $\varphi(v) = \bar{v} < v$ und φ strikt monoton wachsend. Dann muß gelten $v = \varphi(\bar{v}) < \varphi(v) = \bar{v}$, d.h. $v = \varphi(v)$. Wegen (4.1.16) muß dann $A(v)/D(v) = -1$ sein. Wegen des Kausalitätsprinzips (4) muß allemal $A(v) > 0$ gelten, so daß dann also $D(v) = -A(v) < 0$ sein muß. Dies impliziert eine Umorientierung der räumlichen Richtung, in der der „Boost“ erfolgt. Wir hatten aber durch unsere Drehung gerade erreicht, daß die Achsen gleich orientiert sein sollten. Wir schließen diesen Fall also zunächst aus¹.

Wir müssen also verlangen, daß φ strikt monoton fällt. Dann ist aber $(-\varphi)$ strikt monoton wachsend und erfüllt auch sonst alle Eigenschaften wie φ . Also muß aufgrund der soeben durchgeführten Betrachtung $-\varphi(v) = v$ oder

$$\varphi(v) = -v \quad (4.1.19)$$

sein. Damit ist aber wegen (4.1.16)

$$A = D. \quad (4.1.20)$$

Die Transformation erweist sich also bislang als von der Form

$$\begin{pmatrix} t' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & B \\ -vD & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix}. \quad (4.1.21)$$

¹Weiter unten werden wir sehen, daß dieser Fall der Raumspiegelung nicht stetig aus der Gruppenidentität deformierbar ist, also keine Symmetrie der Raumzeit darstellen muß. In der Tat sind bekanntlich die Naturgesetze nicht invariant unter Raumspiegelungen, denn die schwache Wechselwirkung verletzt die Erhaltung der Parität, welche aus der Raumspiegelungsinvarianz notwendig folgen würde.

4.1. Das spezielle Relativitätsprinzip

Wir betrachten nun die Hintereinanderausführung zweier Boosts $B_1(v')B_1(v)$. Die erste Transformation führt wie bisher von K nach K' (Geschwindigkeit v) und die zweite von K' nach K'' (Geschwindigkeit v').

Aus (4.1.21) ersehen wir die Gleichheit der Diagonalelemente einer jeden Transformation $B_1(v)$. Bilden des Matrixprodukts $B_1(v')B_1(v) \stackrel{!}{=} B_1(v'')$ und Vergleich der Diagonalelemente ergibt damit nach einer einfachen Umformung die Beziehung

$$\frac{B}{vD} = \frac{B'}{v'D'} \quad (4.1.22)$$

Also ist diese Kombination eine für alle fraglichen Transformationen universelle Konstante K , d.h. es gilt stets die Beziehung

$$B = KvD \quad (4.1.23)$$

mit einer von v unabhängigen Konstanten K .

Wir benötigen noch eine weitere Beziehung, um schließlich auch D bestimmen zu können. Dazu betrachten wir nun eine in K ruhende Einheitsuhr bei $X = 0$, die durch zwei Ticks die Standardzeit τ definieren möge. Aus (4.1.21) geht dann hervor, daß ein Beobachter in K' zwischen den beiden Ticks die Zeitdauer

$$\tau' = D(v)\tau \quad (4.1.24)$$

mißt. Wir können dieselbe Betrachtung auch für den Fall anstellen, daß wir das System \bar{K} , das sich gegen K mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt, anstellen. Wegen der angenommenen Isotropie des Raumes, vergeht auch für einen gegen \bar{K} ruhenden Beobachter dieselbe Zeitspanne τ' zwischen den beiden Ticks der in K ruhenden Normaluhr.

Dies ist wegen des Reziprozitätsgesetzes (4.1.19) jedoch genau die Situation für den Beobachter in K hinsichtlich einer in K' ruhenden Normaluhr. Andererseits ist jedoch die Transformation von den Koordinaten bzgl. K' zu Koordinaten bzgl. K durch die Umkehrtransformation zu (4.1.21) gegeben. Durch Matrixinversion erhalten wir damit

$$\tau' = \frac{D\tau}{D^2 + vDB} \quad (4.1.25)$$

und dies ergibt zusammen mit (4.1.24)

$$D^2 + vDB = 1. \quad (4.1.26)$$

Substituieren wir hierin (4.1.23), erhalten wir schließlich

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 + Kv^2}}, \quad B = \frac{Kv}{\sqrt{1 + Kv^2}} \quad (4.1.27)$$

Es ergeben sich nun nur 3 bis auf Isomorphie verschiedene Möglichkeiten $K = 0$, $K = -1/c^2 < 0$ und $K = +1/c^2 > 0$, wo c in den beiden letzteren Fällen jeweils eine universelle Konstante von der Dimension einer Geschwindigkeit darstellt.

Der Fall $K = 0$ entspricht der **Galileitransformation**. Für diesen Fall lautet nämlich (4.1.21) zusammen mit (4.1.27)

$$t' = t, \quad x' = -vt + x. \quad (4.1.28)$$

Hier ist offenbar der Geschwindigkeit v keinerlei Beschränkung auferlegt. Man darf also $v \in \mathbb{R}$ annehmen.

4. Spezielle Relativitätstheorie

Wir müssen weiterhin den Fall $K > 0$ ausschließen, weil ansonsten das Kausalitätsprinzip nicht gewährleistet wäre. Um dies zu sehen, nehmen wir jedoch für einen Moment an, dieser Fall beschreibe eine physikalisch sinnvolle Raumzeit. Dann darf jedenfalls $v \in \mathbb{R}$ liegen. Setzen wir also $K = +1/c^2 > 0$, $x^0 = ct$ und schließlich $v/c = \tan \alpha$. Dann folgt für die Transformation (4.1.21):

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ X \end{pmatrix}. \quad (4.1.29)$$

Verlangt man nun „Orthochronizität“, d.h. die Erhaltung der Kausalfolge von Ereignissen beim Wechsel des Bezugssystems, so muß $\cos \alpha > 0$ sein, d.h. $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ (was übrigens den gesamten Bereich $v \in \mathbb{R}$ abdecken würde), verlangt werden. Die Gesamtheit dieser Transformationen bilden jedoch keine Gruppe. Man erhält nur eine Gruppe, nämlich die Drehgruppe in zwei Dimensionen $SO(2)$, wenn man $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_0 + 2\pi)$ wählt und also zwangsläufig auch solche Transformationen zulassen müßte, die die Umkehrung der Kausalfolge von Ereignissen durch Wechsel des Bezugssystems zuließe. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß die so gebildete Raum-Zeit gar keine Kausalstruktur besitzt, was freilich für die Galilei-Newtonsche Raumzeit, welche im jetzigen Zusammenhange durch $K = 0$ charakterisiert ist, wegen der „Universalität der Zeit“, d.h. $t' = t$, selbstverständlich der Fall ist.

Kommen wir also schließlich zu dem letzten Falle $K = -1/c^2 < 0$. Dann ist notwendig $v = \beta c$ mit $-1 < \beta < 1$ und

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ X' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ X \end{pmatrix}. \quad (4.1.30)$$

Daß diese Transformationen für $\beta \in (-1, 1)$ bereits eine Gruppe durchlaufen, folgt sehr schnell durch eine Parametrisierung, die die der Drehgruppe nachempfunden ist. Offenbar können wir nämlich

$$\beta = \tanh \eta \quad (4.1.31)$$

setzen, wo $\eta \in \mathbb{R}$ **Rapidität** genannt wird. Dann schreibt sich (4.1.30)

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta \\ -\sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ X \end{pmatrix}. \quad (4.1.32)$$

Die Hintereinanderausführung zweier solcher **Lorentztransformationen** mit η und η' führt dann in der Tat wieder zu einer solchen Transformation mit $\eta'' = \eta + \eta'$ und also durchlaufen die Transformationen mit $\eta \in \mathbb{R}$ bereits eine Gruppe, die **eigentlich orthochrone Lorentzgruppe** für die 1 + 1-dimensionale Raumzeit. Die auf dieser Transformation beruhende Realisierung der Raumzeit heißt **Einstein-Minkowski-Raumzeit**.

Wir bemerken noch, daß die Galileitransformationen aus (4.1.32) formal hervorgehen, indem man den Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ vornimmt. Physikalisch gesehen kann man die Galileitransformation als Näherung für (4.1.32) verwenden, wenn $|v|/c \ll 1$ ist. Die Galileitransformation ist bis auf Korrekturen der Ordnung v^2/c^2 korrekt, was den Erfolg der Newtonschen Physik für Geschwindigkeiten $|v| \ll c$ erklärt.

Wir wenden uns nun der vollständigen Lorentzgruppe für die 1 + 3-dimensionale Raumzeit zu, die wir jedoch nunmehr wegen (4.1.10) im Prinzip bereits vollständig bestimmt haben. Allerdings ist (4.1.10) relativ kompliziert und wird zum Glück in der Praxis selten benötigt.

Aus der Annahme, daß das spezielle Relativitätsprinzip gilt, folgt also, daß es physikalisch bis auf Äquivalenz genau zwei wohlunterscheidbare Raum-Zeit-Modelle gibt, nämlich den Fall, daß c eine endliche Größe ist. Dann gibt es eine universelle Grenzgeschwindigkeit, die ein materieller Körper nicht überschreiten kann. Das ist die **Einstein-Minkowski-Raumzeit**. Für sie ist Λ eine **Lorentztransformation**.

4.2. Die Raum-Zeit-Geometrie

Sie läßt sich durch zwei Drehungen und einen Boost eindeutig parametrisieren. Insgesamt bieten die Lorentztransformationen eine Untergruppe der Raum-Zeitsymmetriegruppe. Wie wir oben gesehen haben, ist sie insgesamt 6-dimensional (zwei Winkel, um die x -Achse des räumlichen Koordinatensystems von K in Richtung der Geschwindigkeit von K' zu legen, die Komponente v der Geschwindigkeit in der neuen X -Richtung und drei Winkel, um die räumlichen Basisvektoren von K' in Richtung der Basisvektoren von K zu legen). Den „Boost“ in X -Richtung, der die Bewegung des Bezugssystems K' gegenüber K beschreibt, haben wir soeben durch Ermittlung der Parameter A, B, C, D als Funktion der Geschwindigkeitskomponente $v = \beta c$ bestimmt. Wir schreiben der Übersicht halber das Resultat für die Boostmatrix in vierdimensionaler Form noch einmal hin:

$$B_1(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4.1.33)$$

Der numerische Wert von c ist dabei physikalisch irrelevant. Er legt lediglich die Wahl des Einheitensystems näher fest, d.h. alle Raum-Zeitmodelle mit verschiedenen Werten der Grenzgeschwindigkeit c sind zueinander äquivalent. Für endliches c kann die Einheitslänge mit Hilfe der Normaluhr als eine bestimmte Zeitspanne festgelegt werden und ist insofern nicht mehr unabhängig, sondern durch die Wahl des Wertes für c bestimmt.

4.2 Die Raum-Zeit-Geometrie

Wir schreiten nun mit der Behandlung der Einstein-Minkowskischen Raum-Zeit-Beschreibung fort. Ein Blick auf (4.1.33) lehrt uns, daß die soeben hergeleiteten speziellen Lorentztransformationen, die den Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen unter Beibehaltung der Orientierung der räumlichen Koordinaten beschreiben, sogenannte **drehungsfreie Lorentztransformationen** oder **Boosts**, die Eigenschaft besitzen, daß sie die Bilinearform

$$x \cdot y := xy = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (4.2.1)$$

unverändert lassen. Dies gilt nun für alle Lorentztransformationen, denn die Drehungen lassen die Zeitkomponenten der Vierervektoren ungeändert, und das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ist unter Drehungen invariant.

Wir numerieren hier und im folgenden die Komponenten der Raum-Zeit-Vierervektoren mit oberen Indizes, die die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen können. Die unter Lorentztransformationen invariante Bilinearform (4.2.1), das **Minkowskiprodukt** können wir dann mit Hilfe der Matrix $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ auch in der Form

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (4.2.2)$$

schreiben. Dabei wird, dem Gebrauch Einsteins folgend, über gleichnamige gegenständige Indizes summiert.

Wir können nun die allgemeinen Lorentztransformationen sehr einfach dadurch charakterisieren, daß dies alle linearen eineindeutigen Transformationen des \mathbb{R}^4 sind, die das Minkowskiprodukt invariant lassen. Besonders einfach wird die Raum-Zeit-Geometrie in Koordinatensystemen beschrieben, die im Sinne des Minkowskiprodukts „orthonormal“ sind, d.h. für die gilt

$$\underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (4.2.3)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie

Dabei bezeichnen wir Vierervektoren mit einem Unterstrich, so wie wir bereits zu Beginn dieses Skripts Dreiervektoren mit Vektorpfeilen versehen haben. Die kontravarianten **Komponenten** x^μ bzgl. einer Basis \underline{e}_μ fassen wir zu Spaltenvektoren zusammen, die wir einfach mit x bezeichnen. Die räumlichen Komponenten, als Spaltenvektor geschrieben, bezeichnen wir wie gehabt mit fett gedruckten Buchstaben: $x = (x^1, x^2, x^3)^t$. Auf diese Weise erhalten wir eine einheitliche Bezeichnungswiese für Dreier- und Vierervektoren sowohl in der relativistischen als auch der nichtrelativistischen Physik.

Eine beliebige Lorentztransformation kann nun durch eine Matrix Λ^μ_ν definiert werden, die diese orthonormalen Basisvektoren umkehrbar eindeutig in neue orthonormale Basisvektoren e'_μ abbildet:

$$\underline{e}_\rho = \underline{e}'_\mu \Lambda^\mu_\rho. \quad (4.2.4)$$

Daraus folgt sofort, wie sich die Komponenten von Vektoren transformieren:

$$\underline{x} = \underline{e}_\rho x^\rho = \underline{e}'_\mu \Lambda^\mu_\rho x^\rho \Rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\rho x^\rho. \quad (4.2.5)$$

Die Vektorkomponenten transformieren sich also **kontragredient** zu den Basisvektoren. Schreiben wir für die Umkehrmatrix $\bar{\Lambda} := \Lambda^{-1}$, gilt ja gemäß (4.2.4):

$$e'_\mu = e_\rho \bar{\Lambda}^\rho_\mu. \quad (4.2.6)$$

I.a. bezeichnet man die Objekte mit unteren Indizes, die sich gemäß (4.2.6) transformieren, als **kovariant**, solche mit oberen Indizes, die sich wie die Vektorkomponenten gemäß (4.2.5) transformieren, als **kontravariant**.

Die Forderung, daß auch die neuen Basisvektoren orthonormal sein sollen, ergibt

$$\eta_{\rho\sigma} = \underline{e}'_\mu \Lambda^\mu_\rho \cdot \underline{e}'_\nu \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \quad (4.2.7)$$

In Matrix-Vektorschreibweise können wir die Bedingung (4.2.7) an eine Matrix $\Lambda = (\Lambda^\mu_\rho)$ dann in der Form

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \quad (4.2.8)$$

erfassen. Multiplizieren wir (4.2.8) von links mit der Matrix η und von rechts mit Λ^{-1} , ergibt sich wegen $\eta^2 = 1$

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^t \eta. \quad (4.2.9)$$

Es ist klar, daß umgekehrt jede invertierbare reelle 4×4 -Matrix, die (4.2.8) bzw. (4.2.9) erfüllt, eine Lorentztransformation definiert.

Es wird daraus sofort ersichtlich, daß auch Λ^{-1} eine Lorentztransformation ist. Transponiert man nämlich (4.2.9), folgt wegen der Symmetrie von η :

$$(\Lambda^{-1})^t = \eta \Lambda \eta \Rightarrow \eta (\Lambda^{-1})^t \eta = \Lambda = (\Lambda^{-1})^{-1}, \quad (4.2.10)$$

d.h. Λ^{-1} erfüllt ebenfalls (4.2.9), ist also eine Lorentztransformation.

Untersuchen wir nun weiter die Hintereinanderausführung von Lorentztransformationen. Seien also Λ_1 und Λ_2 Lorentztransformationen. Da beide Orthonormalsysteme in Orthonormalsysteme abbilden, ist sofort klar, daß auch ihre Hintereinanderausführung diese Eigenschaft besitzt, so daß also auch $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$ wieder eine Lorentztransformation repräsentiert. Das läßt sich mit Hilfe von (4.2.8) auch leicht formal nachweisen:

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \Lambda_2^t \Lambda_1^t \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^t \eta \Lambda_2 = \eta. \quad (4.2.11)$$

4.2. Die Raum-Zeit-Geometrie

Dabei haben wir lediglich davon Gebrauch gemacht, daß (4.2.8) für Λ_1 und Λ_2 gelten muß, weil diese Matrizen ja voraussetzungsgemäß Lorentztransformationen sein sollten.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß für jede Lorentzmatrix Λ auch Λ^{-1} wieder eine solche ist. Ebenso ist für beliebige Lorentzmatrizen Λ_1, Λ_2 auch ihr Produkt wieder eine Lorentzmatrix. Das bedeutet nun aber, daß die Lorentzmatrizen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bilden, die **Lorentzgruppe**, wie es schon das spezielle Relativitätsprinzip verlangt. Sie wird oft auch als $O(1,3)$ bezeichnet, was so viel wie Orthogonale Gruppe bzgl. des Minkowskiprodukts.

Wir werden nun diese Gruppe näher analysieren. Wir können zunächst eine wichtige Untergruppe aussondern. Bilden wir die Determinante der Bedingung (4.2.8), folgt

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1. \quad (4.2.12)$$

Nun bilden offenbar diejenigen Lorentzmatrizen mit der Determinante $+1$ eine Untergruppe der vollen Lorentzgruppe, die man als $SO(1,3)$ bezeichnet, die **spezielle orthogonale Gruppe** zur Bilinearform mit der Signatur $(1,3)$.

Wir können nun die Gruppe aber auch noch unter dem Aspekt betrachten, daß sie eine Untergruppe besitzt, die eine **Liegruppe** ist, und das wird sich für die Physik als besonders wichtig erweisen.

Kommen wir dazu noch einmal auf den reinen Boost in x^1 -Richtung zurück. Wir können sie nun viel einfacher als im vorigen Abschnitt herleiten, indem wir verlangen, daß die Lorentzmatrix Λ die folgende Gestalt haben soll

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2.13)$$

Die Bedingung (4.2.8) verlangt dann

$$a^2 - c^2 = 1, \quad b^2 - d^2 = -1, \quad ab - cd = 0. \quad (4.2.14)$$

Das sind drei Gleichungen für vier Matrixelemente, so daß diese Art Transformationen also einen freien Parameter beinhalten muß. Das wissen wir schon aus der physikalischen Bedeutung dieser Transformation: Die Geschwindigkeit v zwischen den beiden Bezugssystemen ist frei wählbar, solange nur $-c < v < c$ ist.

Die erste Bedingung in (4.2.14) legt die Parametrisierung

$$a = \cosh \eta, \quad c = -\sinh \eta \quad (4.2.15)$$

nahe. Dabei haben wir verwendet, daß wir zunächst nur Transformationen behandeln wollen, die die Zeitrichtung erhalten, was $a > 0$ verlangt. Aus der dritten Bedingung folgt

$$b = \frac{cd}{a} = -d \tanh \eta. \quad (4.2.16)$$

Das in die zweite Bedingung eingesetzt ergibt

$$d^2(1 - \tanh^2 \eta) = \frac{d^2}{\cosh^2 \eta} = 1 \Rightarrow d = \pm \cosh \eta, \quad (4.2.17)$$

und daraus wiederum folgt mit (4.2.16)

$$b = \mp \sinh \eta. \quad (4.2.18)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie

Betrachten wir nun noch die Determinante:

$$\det \Lambda = ad - bc = \pm \cosh^2 \eta \mp \sinh^2 \eta = \pm 1. \quad (4.2.19)$$

Für die Wahl des oberen Vorzeichens in (4.2.17) und (4.2.18) erhalten wir also eine $SO(1,3)$ -Matrix, und allein diese kann durch einen stetigen Weg mit der Identität verbunden sein, denn die Determinante einer $O(1,3)$ -Matrix kann ja nur entweder 1 oder -1 sein. Da die Determinante eine stetige Funktion der Matrixelemente ist, muß also eine innerhalb der Gruppe $O(1,3)$ stetig mit der Identität verbundene Matrix die Determinante 1 haben.

In der Tat sind die stetig mit der Identität zusammenhängenden Matrizen, welche Boosts in x^1 -Richtung entsprechen, durch die Wahl des oberen Vorzeichens in (4.2.17-4.2.18) gegeben:

$$B_1(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.20)$$

Ein Vergleich mit (4.1.33) zeigt, daß der Zusammenhang der Relativgeschwindigkeit v zu dem Parameter η , den man **Rapidity** nennt, durch

$$v = \beta = \tanh \eta, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh \eta, \quad \beta\gamma = \sinh \eta \quad (4.2.21)$$

gegeben ist. Hierbei ist $\eta \in \mathbb{R}$ beliebig zu wählen, so daß alle Geschwindigkeiten zwischen $-c$ und $+c$ erreicht werden können.

Der Vorteil der Wahl der Rapidity als Parameter wird offensichtlich, wenn man die Hintereinanderausführung zweier Boosts betrachtet:

$$B_1(\eta_1)B_1(\eta_2) = B_1(\eta_1 + \eta_2), \quad (4.2.22)$$

wobei wir von den Additionstheoremen der hyperbolischen Funktionen Gebrauch gemacht haben:

$$\begin{aligned} \cosh(\eta_1 + \eta_2) &= \cosh(\eta_1)\cosh(\eta_2) + \sinh(\eta_1)\sinh(\eta_2), \\ \sinh(\eta_1 + \eta_2) &= \sinh(\eta_1)\cosh(\eta_2) + \cosh(\eta_1)\sinh(\eta_2). \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Wir haben nun schon im vorigen Abschnitt bemerkt, daß wir alle Lorentztransformationen durch zwei Drehungen und einen solchen Boost in x^1 -Richtung gemäß (4.1.10) ausdrücken können. Dies ergibt eine stetige Funktion von 6 Parametern (fünf Winkel und v bzw. η).

Betrachten wir die Wirkung von $B_1(\eta)$ auf den Raumzeitvektor $(1,0,0,0)^t$, wird klar, daß $B_1(\eta)$ die **Orientierung der Zeitachse** erhält. Deshalb heißen solche Transformationen **orthochrone Lorentztransformationen**. Wir stellen also fest, daß die stetig mit der Identität verbundenen Lorentztransformationen durch die **eigentlich orthochronen Lorentztransformationen** gegeben sind, und allein von diesen verlangen wir innerhalb der **Speziellen Relativitätstheorie**, daß sie eine Symmetriegruppe der Naturgesetze sein muß, damit dieselben mit der Raumzeitstruktur verträglich sind. Wie schon oben bemerkt, sind die übrigen drei Zusammenhangskomponenten der $O(1,3)$ tatsächlich keine (exakten) Symmetrien der Naturgesetze, weil die Raumspiegelungsinvarianz und mit ziemlicher Sicherheit auch die Zeitumkehrinvarianz durch die schwache Wechselwirkung verletzt wird.

Wir wollen nun zeigen, daß diese eigentlich orthochronen Lorentztransformationen zusammengenommen einen **Normalteiler** sowohl der $O(1,3)$ als auch der $SO(1,3)$ bildet, den wir als $SO(1,3)^\uparrow$ bezeichnen wollen. Auch die orthochronen Lorentztransformationen für sich bilden einen Normalteiler der vollen Lorentzgruppe, den wir als $O(1,3)^\uparrow$ bezeichnen wollen.

4.2. Die Raum-Zeit-Geometrie

Dazu bemerken wir zunächst, daß die Hintereinanderausführung zweier orthochroner Lorentztransformationen wieder eine orthochrone Lorentztransformation darstellt. Wir müssen dazu ja nur das 00-Element der zusammengesetzten Lorentztransformation untersuchen. Seien also A und B zwei orthochrone Lorentztransformationen. Schreiben wir nun

$$A = \begin{pmatrix} A^0_0 & \mathbf{a}^t \\ * & * \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} B^0_0 & * \\ \mathbf{b} & * \end{pmatrix}, \quad (4.2.24)$$

so gilt wegen der Bedingung (4.2.8) und wegen $A^0_0 > 0$ und $B^0_0 > 0$

$$A^0_0 = \sqrt{1 + \mathbf{a}^2}, \quad B^0_0 = \sqrt{1 + \mathbf{b}^2}. \quad (4.2.25)$$

Damit ist aber die Behauptung schnell bewiesen:

$$C^0_0 = A^0_\mu B^\mu_0 = A^0_0 B^0_0 + \mathbf{a}\mathbf{b} \geq A^0_0 B^0_0 - |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \geq A^0_0 (B^0_0 - |\mathbf{b}|) > 0. \quad (4.2.26)$$

Damit ist gezeigt, daß $O(1,3)$ eine Untergruppe ist, denn mit (4.2.9) ersieht man auch sofort, daß mit A auch A^{-1} orthochron ist, weil beide Matrizen dasselbe 00-Element besitzen.

Daß es sich sogar um einen Normalteiler, d.h. daß die Links- und die Rechtsnebenklassen identisch sind, sieht man sofort daran, daß die **Zeitumkehrmatrix** $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \in O(1,3)$ ist, und daß jede Matrix $\Lambda \in O(1,3)$ entweder orthochron ist oder daß andernfalls die Matrizen $\Lambda' = \Lambda T$ und $\Lambda'' = T\Lambda$ orthochron sind und sich dann entsprechend $\Lambda = \Lambda' T = T \Lambda''$ schreiben läßt.

Man kann nun statt T zu diesem Zweck genausogut die „große Raum-Zeit-Spiegelung“ $PT = -1$ verwenden. Diese besitzt im Gegensatz zu T die Determinante 1, ist also sogar $\in SO(1,3)$. Da nun wegen $SO(1,3)^\uparrow = O(1,3)^\uparrow \cap SO(1,3)$ ebenfalls eine Untergruppe der $O(1,3)$ ist, muß also $SO(1,3)^\uparrow$ in der Tat ein Normalteiler sowohl der $O(1,3)$ als auch der $SO(1,3)$ sein.

Offenbar gilt $O(1,3)^\uparrow = SO(1,3)^\uparrow P = PSO(1,3)^\uparrow$, wobei $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ der Paritäts- oder **Raumspiegelungsoperator** ist. Wir werden sehen, daß die diskreten Symmetrietransformationen eine wichtige Rolle in der Physik spielen. Wir beschäftigen uns jedoch zunächst einmal mit den **eigentlich orthochronen Lorentztransformationen**, die, wie soeben gezeigt, innerhalb der Lorentzgruppe stetig mit der Identität verbunden sind. Wir stellen fest, daß das Relativitätsprinzip nur verlangt, daß die physikalischen Gesetze unter dieser spezielleren Lorentzgruppe invariant sein müssen, denn nur solche Transformationen können den Wechsel von einem Inertialsystem in ein anderes beschreiben, also „aktive Transformationen“ sein.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Herleitung des **drehungsfreien Boosts** in einer beliebigen Richtung, da wir diesen im folgenden noch öfter benötigen werden.

Dazu greifen wir am bequemsten auf (4.1.33) zurück. Die dort angegebene Matrix beschreibt ja gerade einen drehungsfreien Boost in X -Richtung. Wir müssen nun lediglich die Wirkung dieser Matrix in einer Basis der Raumzeitvektoren ausdrücken, die sich leicht verallgemeinern läßt. Offensichtlich zeichnet die in beliebiger Richtung vorgegebene Relativgeschwindigkeit \vec{v} der Bezugssysteme K und K'^2 eine Raumrichtung aus, und wir wählen geschickterweise als räumliche Basis einen Einheitsvektor \vec{e}_\parallel in Richtung von \vec{v} und eine beliebige orthonormale Ergänzung, d.h. zwei Vektoren $\vec{e}_{j\perp}$. Wir wissen dann von (4.1.33), wie sich die Vektorkomponenten zu transformieren haben: Die Komponente in Richtung der Geschwindigkeit erhält einen Lorentzfaktor γ , die Komponenten senkrecht dazu bleiben ungeändert.

Die Transformationsformel für die Zeitkomponente können wir offenbar durch

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \vec{v}\vec{x}) \quad \text{mit } \gamma = [1 - (\vec{v}/c)^2]^{-1/2} \quad (4.2.27)$$

²Genauer gesagt möge sich wie bisher auch, K' gegenüber K mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegen.

4. Spezielle Relativitätstheorie

drehungsinvariant beschreiben. Insgesamt haben wir damit die allgemeine Boostmatrix gefunden:

$$B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \mathbf{v}^t \\ -\gamma \mathbf{v} & \frac{\gamma-1}{v^2} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.28)$$

wobei wir uns den Ausdruck in der unteren rechten Ecke als 3×3 -Matrix vorzustellen haben. Das Tensorprodukt $\vec{v} \otimes \vec{v}$ ist durch seine Wirkung auf die räumlichen Komponenten eines beliebigen Vektors \vec{x} eindeutig definiert:

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \vec{x} := \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}). \quad (4.2.29)$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß (4.2.28) das Gewünschte leistet: Zunächst handelt es sich tatsächlich um eine Lorentztransformation. Wegen $B^t(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v})$ muß ja gelten

$$B(\mathbf{v})\eta B(\mathbf{v}) = \mathbb{1}_4, \quad (4.2.30)$$

und das weist man schnell durch eine direkte Rechnung nach, wozu man zweckmäßiger auch die Fundamentalform η in der zeit-räumlichen Schreibweise notiert:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -\mathbb{1}_3 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (4.2.31)$$

Weiter bemerken wir, daß

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = v^2(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}), \quad (4.2.32)$$

und Ausschreiben der linken Seite von (4.2.30) mit Hilfe von (4.2.28) und (4.2.31) und Ausmultiplizieren liefert in der Tat die Vierereinheitsmatrix.

Weiter bemerken wir, daß die Richtung eines rein räumlichen Vektors in Bewegungsrichtung oder eines Vektors senkrecht dazu nicht geändert wird, so daß keine Drehung involviert sein kann. Für einen beliebigen rein räumlichen Vektor wird sich die Richtung allerdings ändern, da seine Komponente in Bewegungsrichtung um den Faktor γ größer werden, während die Komponenten senkrecht dazu ungeändert bleiben.

4.3 Relativistische Dynamik eines Punktteilchens

Wie schon in der nichtrelativistischen Mechanik ist es nicht möglich, Bewegungsgleichungen aus irgendwelchen grundlegenden Prinzipien herzuleiten. Sie müssen postuliert und letztlich durch Vergleich mit dem Experiment gerechtfertigt werden.

In der Relativitätstheorie ergibt sich nun folgende Problematik: Wir haben in den vorigen Abschnitten die relativistische Kinematik aus den Symmetrieannahmen über die Raumzeit (also aus Homogenität von Raum und Zeit, Isotropie des Raumes für inertielle Beobachter und dem speziellen Relativitätsprinzip) erschlossen. Dabei hat sich herausgestellt, daß es im Fall der relativistischen Raumzeit keine instantanen Wechselwirkungen geben kann. Zunächst zeigt diese Betrachtung, daß sich kein Punktteilchen schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen kann. Es ist jedoch auch unmittelbar klar, daß es aufgrund der Einschränkung der Naturgesetze auf **kausale Wirkungen** keine irgendwie geartete Wechselwirkung geben kann, die sich schneller als das Licht ausbreitet, denn nur zeit- oder lichtartig zueinander gelegene Ereignisse weisen eine vom Bezugssystem unabhängige zeitliche Reihenfolge auf. Bei raumartigen Abständen kann man nämlich stets die Zeitfolge durch einen geeigneten Lorentzboost

umkehren³. Dies schließt Fernwirkungen wie das Newtonsche Gravitationsgesetz zwischen zwei Massenpunkten grundsätzlich aus.

Es hat sich nun gezeigt, daß man diesem Dilemma am einfachsten durch die Einführung **dynamischer Felder** begegnet. Das heißt, statt einer Fernwirkung zwischen den Massenpunkten postuliert man die Existenz von Kraftfeldern, also kontinuierlichen eigenständigen physikalischen Entitäten, die sich entsprechend der Bewegung ihrer Quellen im Raum ausbreiten. Deren Anwesenheit äußert sich dann durch auf Massenpunkte wirkende Kräfte. Wir werden im nächsten Band dieses Skripts, bei der Behandlung der **klassischen Elektrodynamik** genauer auf diese Idee eingehen. Es sei jedoch angemerkt, daß eine vollständig befriedigende Formulierung einer konsistenten Theorie klassischer wechselwirkender Punktteilchen auch mit dem Feldbegriff noch nicht gefunden werden konnte. Es können nur bestimmte Näherungen betrachtet werden, von denen wir hier nur die einfachsten betrachten. Die **relativistische Quantenfeldtheorie** ist einer Lösung dieser Problematik schon etwas nähergekommen, indem sie wenigstens Ordnung für Ordnung der Störungstheorie physikalisch sinnvolle Resultate liefert, die zum Teil die bislang genaueste Übereinstimmung physikalischer Theorien mit der Beobachtung gezeigt haben.

4.3.1 Die Minkowskikraft

Nun wollen wir den einfachsten Fall eines einzelnen Punktteilchens, das sich in einem vorgegebenen Kraftfeld bewegt, betrachten. Die einfachste Möglichkeit, das zweite Newtonsche Gesetz auf die Relativitätstheorie zu übertragen, ist seine **manifest kovariante Formulierung**. Dazu betrachten wir die kartesischen Raumzeitkoordinaten eines Massenpunktes bzgl. eines beliebigen Inertialsystems (x^μ) als Funktionen eines skalaren Parameters. Dazu können wir die Eigenzeit τ des Massenpunktes wählen, die differentiell durch

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.3.1)$$

definiert ist. Daraus folgt sofort, daß die **Vierergeschwindigkeit**, deren Komponenten durch

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} := \dot{x}^\mu \quad (4.3.2)$$

definiert sind⁴, die Nebenbedingung

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u_\mu u^\mu = c^2 = \text{const} \quad (4.3.3)$$

erfüllen muß. Durch diese Nebenbedingung kann eine der vier Koordinaten aus dem Bewegungsgesetz eliminiert werden, so daß schließlich für jeden inertialen Beobachter die Bewegung eindeutig durch die drei räumlichen Koordinaten des Massenpunktes als Funktion der Zeit⁵ gegeben ist, wie es sein muß. Außerdem läßt sich die Zeit stets als strikt monoton wachsende Funktion der Eigenzeit festlegen:

$$\dot{x}^0 > 0. \quad (4.3.4)$$

Aufgrund der Nebenbedingung (4.3.3) wird die relativistische Verallgemeinerung des Newtonschen Kraftbegriffes i.a. von u^μ abhängige Kräfte erfordern.

³Der einfache Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.

⁴Man beachte, daß hier und im folgenden \dot{A} die Ableitung nach der **Eigenzeit** (oder einem anderen skalaren Zeitparameter) und nicht nach der Koordinatenzeit verstanden wird.

⁵Unter „Zeit“ verstehen wir hier und im folgenden stets die Zeitkomponente x^0 des Raumzeitvektors bzgl. eines Inertialsystems.

4. Spezielle Relativitätstheorie

Wir postulieren also als Erweiterung des zweiten Newtonschen Gesetzes

$$m\ddot{x}^\mu = m\dot{u}^\mu = K^\mu(x, u), \quad (4.3.5)$$

wobei wir vorausgesetzt haben, daß die **Minkowskikraft** K^μ eine **lokale** Funktion ist, d.h. nur vom Ort des Massenpunktes und seiner Geschwindigkeit abhängt. Dies hängt mit dem oben erwähnten Konzept der **Nah- oder Feldwirkung** zusammen: Kräfte auf einen Massepunkt werden durch Felder am jeweiligen Ort des Teilchens hervorgerufen. Die Felder selbst haben ihre Ursache in Quellen, die wir hier noch nicht näher spezifizieren und sind eigenständige dynamische Objekte, so daß das relativistische Kausalitätsprinzip erfüllt ist. Die Felder selbst sind über die Bewegung von Probeteilchen, die durch Gleichungen der Form (4.3.5) beschrieben werden, operational definiert: Durch Beobachtung der Bewegung von Probeteilchen kann auf die Felder zurückgeschlossen werden, wobei wir davon ausgehen, daß die Rückwirkung der Probeteilchen auf die Felder vernachlässigt werden kann. Dies ist prinzipiell problematisch, wie wir weiter unten noch sehen werden. Wegen (4.3.3) müssen die Kräfte die Bedingung

$$u_\mu K^\mu(x, u) = 0 \quad (4.3.6)$$

erfüllen.

Der Parameter $m = \text{const}$ in (4.3.5) ist die Masse des Teilchens, wie wir im nächsten Abschnitt durch Betrachtung des Newtonschen Grenzfalles zeigen werden.

Es lassen sich leicht Kräfte dieser Art postulieren. Als Beispiele seien hier nur genannt⁶:

$$\begin{aligned} K^\mu(x, u) &= (\eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) V_\nu(x), \\ K^\mu(x, u) &= F^{\mu\nu}(x) u_\nu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

4.3.2 Der Newtonsche Grenzfall

Um diese recht abstrakten mathematischen Konzepte etwas besser physikalisch interpretieren zu können, gehen wir zur Beschreibung in einem inertialen Bezugssystem über und formulieren die Bewegungsgleichungen (4.3.5) bzgl. der Koordinatenzeit $t = x^0$. Betrachten wir zunächst die räumlichen Komponenten als Funktionen der Koordinatenzeit:

$$\boldsymbol{v} = d_t \vec{x} = d_\tau \boldsymbol{x} \frac{d\tau}{dt} = \boldsymbol{u} \sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \gamma \boldsymbol{v}, \quad (4.3.8)$$

wobei

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}} = u^0/c. \quad (4.3.9)$$

Weiter ist

$$d_\tau \boldsymbol{u} = \frac{dt}{d\tau} d_t \boldsymbol{u} = \gamma d_t (\gamma \boldsymbol{v}). \quad (4.3.10)$$

Damit folgt die **Dreierformulierung** der relativistischen Bewegungsgleichung

$$m d_t (\gamma d_t \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{K} := \boldsymbol{F}. \quad (4.3.11)$$

⁶Wir werden sehen, daß die erste Gleichung in dem Fall, daß $V_\nu(x) = \partial_\nu \Phi(x)$ die Wechselwirkung des Punktteilchens mit einem Skalarfeld Φ und die zweite die mit einem elektromagnetischen Feld beschreibt, falls es ein Vektorfeld A_μ gibt, so daß $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ist.

Nehmen wir nun an, die Geschwindigkeiten der beteiligten Teilchen in einem inertialen Bezugssystem seien in einem bestimmten Zeitbereich klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so daß wir Größen in zweiter Ordnung in v/c vernachlässigen können, so gelangen wir in der Tat zur **Newtonschen Bewegungsgleichung**

$$m d_t^2 x = F, \quad (4.3.12)$$

wobei sich nun in der Tat m als die Masse des Teilchens und K als die Kraft erweist, wobei diese allerdings i.a. von der Geschwindigkeit v des Teilchens abhängen wird⁷

4.3.3 Energie und Impuls des Punktteilchens

Wenden wir uns nun wieder der exakten Bewegungsgleichung im Dreierformalismus (4.3.11) zu und definieren als **Impuls** des Teilchens die Größe

$$p = m\gamma v = m\mathbf{u}, \quad (4.3.13)$$

folgt die exakte Bewegungsgleichung (4.3.11) in der an Newtons ursprüngliche Formulierung des zweiten Gesetzes erinnernden Gestalt

$$d_t p = F. \quad (4.3.14)$$

Man beachte, daß wir hier ausnahmsweise den Boden der kovarianten Schreibweise vollständig verlassen haben. Lediglich p sind die räumlichen eines Vierervektors, nicht jedoch F ⁸. Betrachten wir nun noch die 0-Komponente der Bewegungsgleichung (4.3.5) und schreiben sie in die Dreierformulierung um

$$m d_\tau \gamma = m \gamma d_t \gamma = K^0. \quad (4.3.15)$$

Schreiben wir nun (4.3.6) im Dreierformalismus, ergibt sich

$$u^0 K^0 - \vec{u} \mathbf{K} = 0 \Rightarrow K^0 = \gamma v F. \quad (4.3.16)$$

Dies in (4.3.15) eingesetzt ergibt schließlich

$$d_t m \gamma = v F. \quad (4.3.17)$$

Dies zeigt, daß die Identifikation von

$$T = m \gamma = m + \frac{m}{2} v^2 + \dots \quad (4.3.18)$$

mit der (kinetischen) Energie des Teilchens konsistent mit der Identifikation von p mit den Impulskomponenten des Teilchens ist. Es ist wichtig zu bemerken, daß der Impulssatz in der relativistischen Mechanik im Gegensatz zur Newtonschen nur für das abgeschlossene System aus Teilchen *und* Feldern gilt. Der Grund dafür ist, daß das dritte Newtonsche Gesetz („actio = reactio“) für ein System von wechselwirkenden Punktteilchen allein nicht gelten kann, da es ja keine instantanen Fernwirkungen geben kann. Der Energiesatz kann in speziellen Fällen hingegen gültig sein, nämlich dann, wenn die Kräfte konservativ sind, sich also als Dreiergradient eines zeitunabhängigen Potentials gemäß $\vec{F} = -\partial_{\vec{x}} V(\vec{x})$

⁷In der hier durchgeführten Näherung sind nur die Beiträge erster Ordnung in v mitzunehmen. Daher ist es auch unerheblich, ob in (4.3.12) auf der rechten Seite K oder F geschrieben wird, denn $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + v^2/(2c^2) + \dots$

⁸I.a. transformieren sich die fettgedruckten dreidimensionalen Vektoren also *nur unter Drehungen* wie Dreiervektoren. Untersuchungen zu den Transformationseigenschaften solcher Größen unter Lorentztransformationen sind zuweilen schwierig, und es ist stets von Vorteil, zur manifest kovarianten Form zurückzukehren. Für die physikalische Interpretation, die wir hier gewinnen wollen, ist jedoch oft der Rückgriff auf die Dreierdarstellung in einem Inertialsystem vorteilhaft.

4. Spezielle Relativitätstheorie

schreiben lassen. Dann zeigt die Integration von (4.3.17) sofort, daß wie in der klassischen Mechanik $m\gamma + V = E_{\text{total}}$

Wir werden weiter unten noch nachweisen, daß diese Identifikation mit der durch das **Noethertheorem** gegebenen Definition über die Symmetrie unter Zeittranslationen übereinstimmt.

Nun bilden $p^0 = E/c$ und \mathbf{p} die Komponenten eines Vierervektors, den **Viererimpulsvektor** p , und es gilt

$$p^\mu = m d_\tau x^\mu = m u^\mu \Rightarrow p_\mu p^\mu = m^2 c^2. \quad (4.3.19)$$

Die letztere Beziehung zeigt, daß die Masse eines Teilchens ein Skalar ist. Weitere wichtige Beziehungen, die sich direkt aus (4.3.19) ergeben, sind noch durch

$$\mathbf{v} = c^2 \frac{\vec{p}}{E}, \quad E = c \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2} \quad (4.3.20)$$

gegeben.

4.3.4 Das Hamiltonsche Wirkungsprinzip

Um nun einige Untersuchungen hinsichtlich der Symmetrieeigenschaften der mechanischen Systeme anstellen zu können, suchen wir eine Formulierung der relativistischen Mechanik mit Hilfe des **Hamiltonschen Prinzips der kleinsten Wirkung**.

Zunächst erscheint es am einfachsten, auf manifeste Kovarianz zu verzichten und das Prinzip in Analogie zur nichtrelativistischen Mechanik zu formulieren. Dazu wird das **Wirkungsfunktional** definiert, das alle möglichen Trajektorien $\vec{x}(t)$ eines Punktteilchens wie folgt in die reellen Zahlen abbildet:

$$A[\mathbf{x}] = \int dt L(\mathbf{x}, d_t \mathbf{x}, t). \quad (4.3.21)$$

Für ein freies Teilchen steht uns lediglich \mathbf{x} selbst als „Baustein“ für die Lagrangefunktion zur Verfügung. Wir müssen nun verlangen, daß ein freies Teilchen einem Poincaré-invarianten Bewegungsgesetz folgt. Das Wirkungsprinzip vereinfacht diese Aufgabe erheblich: Wir können einfach verlangen, daß die Wirkung Poincaré-invariant sein möge⁹. Diese Forderung läßt sich nun wieder am bequemsten dadurch erfüllen, daß das Differential $dt L$ Poincaré-invariant ist.

Zunächst betrachten wir die Untergruppe der Raum-Zeit-Translationen. Es soll also $dt L$ unter der Variation

$$\delta t = \text{const}, \quad \delta \vec{x} = \text{const} \quad (4.3.22)$$

invariant sein. Da dt wegen $\delta t = \text{const}$ invariant ist, bedeutet dies, daß L nicht von t und \mathbf{x} abhängen darf. Wir müssen weiter $L = L(d_t \mathbf{x})$ so festlegen, daß $dt L$ auch unter Lorentztransformationen invariant ist. Aus den Vierervektorkoordinatendifferentialen können wir aber nun nur eine Invariante bilden, nämlich das **Eigenzeitelement**

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{dx_\mu dx^\mu} = dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} \quad (4.3.23)$$

Damit ist aber $L \propto \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ festgelegt. Die Proportionalitätskonstante sollte negativ sein, damit das Wirkungsfunktional ein Minimum besitzt, und die Dimension von L sollte die einer Energie sein,

⁹Dies ist eigentlich etwas zu streng, denn es wäre für die Poincaré-Invarianz bereits hinreichend, wenn nur die Variation der Wirkung invariant wäre. Wir werden bei unseren Untersuchungen jedoch mit der etwas strengeren Variante auskommen.

4.3. Relativistische Dynamik eines Punktteilchens

damit $dt L$ die Dimension einer Wirkung erhält. Dazu steht uns nun nur mc^2 , also die Masse des Teilchens und die universelle Grenzgeschwindigkeit c als physikalisch relevanten Größen der geeigneten Dimensionen zur Verfügung. Wir setzen also als Lagrangefunktion für ein freies Teilchen

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad v = d_t x \quad (4.3.24)$$

an.

Die Euler-Lagrangegleichungen (2.1.16) ergeben dann

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0. \quad (4.3.25)$$

Also ist

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = A = \text{const.} \quad (4.3.26)$$

Quadrieren dieser Gleichung ergibt dann

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{A^2}{c^2 + A^2} = \text{const.}, \quad (4.3.27)$$

und dies in (4.3.25) ausgenutzt ergibt sofort, daß

$$v = \text{const} \quad (4.3.28)$$

sein muß. Damit ist aber das spezielle Relativitätsprinzip erfüllt, demzufolge ein freies Teilchen sich geradlinig gleichförmig bewegen (oder in Ruhe verharren) muß. Unser Ansatz (4.3.24) erfüllt also die Forderungen des speziellen Relativitätsprinzips und ist demzufolge eine korrekte Version eines relativistischen Variationsprinzips für ein freies Teilchen.

Als nächstes wollen wir mit dem speziellen Relativitätsprinzip vereinbare Wechselwirkungen mit **äußeren Feldern** aufsuchen. Unter „äußeren Feldern“ verstehen wir solche Felder, die wir irgendwie erzeugt denken, etwa ein elektromagnetisches Feld durch Ladungs- und Stromverteilungen, wobei die Rückwirkung des untersuchten Punktteilchens auf die Felder selbst vernachlässigt werden kann. Ein Beispiel ist etwa die Bewegung einzelner Elektronen im elektrischen Feld eines Plattenkondensators oder dem Magnetfeld einer Spule, die von makroskopisch großen Strömen durchflossen wird.

Dazu ist es nun von großem Vorteil, **manifest kovariante** Formulierungen der Wirkung zu verwenden, d.h. die Lagrangefunktion manifest Lorentz-invariant zu schreiben. Dies gelingt am einfachsten, indem man einen skalaren **Weltzeitparameter** λ einführt und die Trajektorien in der vierdimensionalen Raumzeit $x^\mu(\lambda)$ betrachtet, wobei x^μ die Zeit- und Raumkoordinaten bzgl. eines beliebigen Inertialsystems bezeichnen. Es ist klar, daß dabei wie bei unserer Formulierung mit der Eigenzeit τ des Teilchens die scheinbare Überzahl von einem Freiheitsgrad durch eine Nebenbedingung der Art (4.3.3) reduziert wird. Letztlich sind ja die drei räumlichen Koordinaten die eigentlichen dynamischen Freiheitsgrade des Punktteilchens.

Am elegantesten läßt sich das Wirkungsprinzip umformulieren, indem man die allgemeine Unabhängigkeit der Variation des Wirkungsfunktional im Hamiltonschen Sinne vom Parameter λ verlangt, der dann auch als die Zeit t eines willkürlich festgelegten Inertialsystems gewählt werden kann. Die vier Koordinaten x^μ können dann frei variiert werden, und da die Wirkung stets dieselbe ist, auch wenn man $\lambda = t$ setzt, kann man sicher sein, stets dasselbe dynamische System zu beschreiben. Man kann freilich auch die Eigenzeit τ des Teilchens als Weltparameter wählen, *nachdem* die Euler-Lagrangegleichungen

4. Spezielle Relativitätstheorie

aus dem Variationsprinzip bestimmt sind. Vorher ist das nicht möglich, weil τ kein von $x(t)$ bzw. $x^\mu(\lambda)$ unabhängiger Parameter ist.

Wir schreiben also die Wirkung in der Form

$$A[x] = \int d\lambda L(x, \dot{x}), \quad \dot{x} = d_\lambda x. \quad (4.3.29)$$

Die *unabhängige* Variation der vier Raumzeitkoordinaten bei festgehaltenen Randpunkten führt dann wie bei der obigen Rechnung auf die Euler-Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (4.3.30)$$

Für das freie Teilchen ist sie wegen (4.3.24) durch

$$L = -mc\sqrt{\dot{x}^2} = -mc\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} \quad (4.3.31)$$

gegeben, und die Euler-Lagrangegleichungen ergeben

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right) = 0. \quad (4.3.32)$$

Wie oben erhält man wieder die korrekte Lösung $v = 0$. Dies ist deshalb gewährleistet, weil für das freie Teilchen L eine von **erster Ordnung homogene Funktion** von \dot{x} ist und folglich das freie Wirkungsfunktional für alle Weltparameter λ identisch ist.

Wir untersuchen nun die Bedingung an die Lagrangefunktion, die die Unabhängigkeit der Wirkung A von der Wahl des Weltparameters λ sicherstellt. Dazu variieren wir λ durch eine infinitesimale „Umparametrisierung“:

$$\lambda'(\lambda) = \lambda + \delta\lambda(\lambda). \quad (4.3.33)$$

Nun vertauschen die Ableitung nach λ und die Variation gemäß (4.3.33) nicht. In erster Ordnung in δ haben wir nämlich

$$\delta\dot{x} = \frac{dx}{d\lambda'} - \frac{dx}{d\lambda} = -\frac{dx}{d\lambda} \frac{d\delta\lambda}{d\lambda} = -\dot{x}\delta'\lambda. \quad (4.3.34)$$

Das Differential im Wirkungsintegral transformiert sich gemäß

$$d(\lambda + \delta\lambda) = d\lambda(1 + \delta'\lambda), \quad (4.3.35)$$

so daß die Variation der Wirkung durch

$$\delta A = \int d\lambda \left\{ (1 + \delta'\lambda) \left[L(x, \dot{x}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} \delta'\lambda \right] - L(x, \dot{x}) \right\} = \int d\lambda \left[-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} \delta'\lambda + \delta'\lambda L \right] \quad (4.3.36)$$

gegeben ist.

Nun liefert das Hamiltonsche Prinzip offensichtlich dieselben Bewegungsgleichungen, wenn man die Lagrangefunktion um die totale Ableitung einer Funktion $\Omega(x, \lambda)$ nach λ ändert, da dies in der Wirkung nur Randterme liefert, und beim Hamiltonschen Prinzip die Werte der Weltlinie $x(\lambda)$ am Rande des Integrationsintervalls (hier der Einfachheit halber $\lambda \rightarrow \pm\infty$) nicht variiert werden. Folglich ist also nach partieller Integration von (4.3.36) zu verlangen, daß es eine Funktion $\Omega(x, \lambda)$ gibt, so daß

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} \right) \quad (4.3.37)$$

4.3. Relativistische Dynamik eines Punktteilchens

ist. Das bedeutet, daß

$$L = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} + A, \quad A = \text{const} \quad (4.3.38)$$

sein muß. Wir können nun obdA.

$$\Omega = -\frac{A}{2} \lambda^2 \quad (4.3.39)$$

wählen, woraus dann die gesuchte Bedingung

$$L = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (4.3.40)$$

folgt.

Dies ist nun sicher der Fall, wenn L eine homogene Funktion erster Ordnung in \dot{x} ist, also wenn für einen beliebigen positiven Parameter σ gilt¹⁰

$$L(x, \sigma \dot{x}) = \sigma L(x, \dot{x}). \quad (4.3.41)$$

Es ist allerdings eine hinreichende, keine notwendige Bedingung.

Beispiele

Es ist nun sehr leicht, Beispiele für Lagrangefunktionen zu konstruieren. Die freie Lagrangefunktion haben wir ja schon in Gl. (4.3.31) definiert. Einige mögliche Wechselwirkungsterme sind die mit äußeren Skalar- und Vektorfeldern

$$L_S = -g \sqrt{\dot{x}^2} \Phi(x), \quad (4.3.42)$$

$$L_V = -\frac{q}{c} \dot{x} A(x). \quad (4.3.43)$$

Dabei sind g und q Konstanten, die die Kopplung des Probeteilchens, beschrieben durch seine Weltkoordinaten x , an das Skalar- bzw. Vektorfeld beschreibt¹¹.

Die beiden Ansätzen gemeinsame Eigenschaft ist die **Lokalität**, d.h. die Kräfte auf das Teilchen mit den Weltkoordinaten x werden durch die **lokale Wechselwirkung** mit den äußeren Feldern $\Phi(x)$ bzw. $A(x)$ beschrieben, d.h. die Felder gestatten die Interpretation, daß keine Fernwirkung der Teilchen mit den Quellen wie in der Newtonschen Physik stattfindet, sondern eine Lokale mit den Quellen. Freilich ist dies beim gegenwärtigen Stand unserer Betrachtungen reine Semantik, denn das kann man ja etwa auch über die Lagrangefunktion der Wechselwirkung eines leichten Planeten mit einer als äußeren „Gravitationsfeld“, abstrahierten sehr viel schwereren Sonne so interpretieren. Der Unterschied wird erst offenkundig, wenn man Systeme von Punktladungen betrachtet und die Dynamik der Felder berücksichtigt. Wir werden darauf später noch zurückkommen.

Zunächst sei aber der Vollständigkeit halber noch kurz rekapituliert, was wir unter einem Skalar-, Vektor- bzw. allgemeiner einem **Tensorfeld** verstehen. Das ist im gegenwärtigen Zusammenhang wichtig, weil dies sicherstellt, daß die Lagrangefunktionen (4.3.42) und (4.3.43) tatsächlich Poincaré-invariant sind. Eine Poincaré-Transformation wirkt sich definitionsgemäß auf die Weltkoordinaten x des Teilchens wie folgt aus:

$$x \rightarrow x' = \Lambda x + a, \quad \Lambda \in \text{SO}(1,3)^\uparrow, \quad a \in \mathbb{R}^4, \quad (4.3.44)$$

¹⁰gemäß einem Satz, der als Eulers Theorem über homogene Funktionen bekannt ist.

¹¹Wir werden weiter unten sehen, daß (4.3.43) die Wechselwirkung eines mit der elektrischen Ladung q geladenen Punktteilchens mit dem elektromagnetischen Feld beschreibt, wobei A die vierdimensionale Zusammenfassung des Skalar- und Dreiervektorpotentials für das elektrische und magnetische Feld ist.

4. Spezielle Relativitätstheorie

wobei sowohl Λ als auch a konstant, also als vom Weltparameter λ unabhängig anzusehen sind. Es folgt sofort, daß sich die Ableitung der Weltkoordinaten homogen transformiert:

$$\dot{x} \rightarrow \dot{x}' = \Lambda \dot{x}. \quad (4.3.45)$$

Die Lagrangefunktionen (4.3.42-4.3.43) sind also Poincaré-invariant, wenn sich die Felder gemäß

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x) = \Phi[\Lambda^{-1}(x' - a)], \quad (4.3.46)$$

$$A(x) \rightarrow A'(x') = \Lambda A(x) = \Lambda A[\Lambda^{-1}(x' - a)] \quad (4.3.47)$$

transformieren. Dies *definiert* den mathematischen Begriff eines Feldes durch sein Transformationsverhalten unter einer bestimmten Gruppe. Es ist hervorzuheben, daß hier nicht gefordert wird, daß sich die Feldgrößen unter *allen* möglichen linearen (bzw. affinen) Transformationen der Weltkoordinaten wie Tensorkomponenten¹² verhalten müssen, sondern lediglich unter einer bestimmten Untergruppe, im gegebenen Falle der Poincarégruppe eben. Insofern unterscheidet sich der Tensorbegriff der Physiker ein wenig von dem engeren Begriff der Mathematiker.

Es ist weiter bemerkenswert, daß allein aufgrund der oben bereits besprochenen physikalischen operationalen Interpretation, daß die Felder als physikalische Größen als durch ihre Wirkung auf die Bewegung von Probeteilchen definiert anzusehen sind, wichtige Folgerungen über die Gestalt der **Feldgleichungen**, die die Dynamik der Felder sowie ihre Erzeugung aus Quellen gezogen werden können. Ein Beispiel ist bereits das in (4.3.43) eingeführte Vektorfeld A . Naiv betrachtet, könnte man denken, daß wir es hier mit vier Feldfreiheitsgraden zu tun hätten, denn A ist ja ein Vierervektor, besitzt also vier (reelle) Komponenten.

Andererseits besitzt jedoch die Lagrangefunktion (4.3.43) eine umfassende Symmetrie. Nimmt man nämlich an, daß das Vektorfeld der Vierergradient eines beliebigen Skalarfeldes χ ist,

$$A_\mu = \frac{\partial \chi}{\partial x^\mu} := \partial_\mu \chi := \chi_{,\mu}, \quad (4.3.48)$$

so wirkt sich das Vektorfeld nicht auf das Probeteilchen aus, denn die Lagrangefunktion (4.3.43) wird ja in diesem Falle zu einer totalen Ableitung nach dem Weltparameter λ , und die Variation des entsprechenden Beitrags zur Wirkung verschwindet:

$$L_\chi = -\frac{q}{c} \dot{x}^\mu \partial_\mu \chi = -\frac{q}{c} \frac{d\chi}{d\lambda}. \quad (4.3.49)$$

Da weiter (4.3.43) linear in A ist, ist für jedes solche Vektorfeld durch eine sogenannte **Eichtransformation**

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x), \quad (4.3.50)$$

wobei χ ein *beliebiges* Skalarfeld sein kann, eine Symmetrietransformation gegeben. Das bedeutet aber, daß eine physikalische Situation nicht durch ein spezifisches Feld A beschrieben wird, sondern eine ganze Klasse von Feldern, die alle A' enthält, welche aus A durch eine Eichtransformation der Gestalt (4.3.50) hervorgehen, dieselbe Bewegung beschreiben. Die Felder A' lassen sich physikalisch also durch nichts von dem ursprünglichen Feld A unterscheiden, und folglich kann man ungestraft eine Nebenbedingung stellen, ohne die beschriebene Situation zu ändern. Das bedeutet, daß ein Vektorfeld maximal drei statt vier unabhängige Komponenten besitzt.

¹²In diesem Zusammenhang verstehen wir darunter allgemein Tensoren n -ter Stufe, wobei die Skalar- ($k = 0$) und Vektorfelder ($k = 1$) als Spezialfälle anzusehen sind.

4.4. Das Noethertheorem für die Poincarésymmetrie

Die Nebenbedingungen können dabei die manifeste Poincaré-Kovarianz verletzen. Man kann z.B. ausschließlich mit Vektorfeldern arbeiten, für die $A^0 \cong 0$ ist, denn man kann sicher eine Funktion χ finden, die für ein gegebenes Vektorfeld A durch eine Eichtransformation (4.3.50) diese Bedingung erfüllt. Die Bewegungsgesetze für das Probeteilchen bleiben freilich ungeändert und sind folglich nach wie vor Poincaré-kovariante Gleichungen. Man erkaufte sich also i.a. die Bequemlichkeit manifest kovarianter Lagrangefunktionen mit der Einführung physikalisch überzähliger Freiheitsgrade.

Es sei der Vollständigkeit halber nur erwähnt, daß solche **Eichsymmetrien** ganz allgemein eine eminent wichtige Rolle in der modernen Physik einnehmen. So beruht das **Standardmodell der Elementarteilchen** auf solchen Eichsymmetrien. Wir werden im nächsten Band bei der Besprechung der Elektrodynamik sehen, daß schon in der klassischen Feldtheorie die Eichsymmetrie nützliche Dienste leistet. Betrachten wir nun noch die vollständigen Lagrangefunktionen für unsere Probeteilchen und werten die Euler-Lagrangegleichungen aus, um zu den Bewegungsgleichungen bzw. den entsprechenden Ausdrücken für die Minkowskikräfte zu gelangen. Wir setzen also

$$L = L_0 + L_S \text{ bzw. } L = L_0 + L_V. \quad (4.3.51)$$

Die Euler-Lagrangegleichungen ergeben nach Wahl des Weltparameters $\lambda = \tau$, wobei τ die Eigenzeit des Probeteilchens ist, die Bewegungsgleichungen

$$\left(m + \frac{g}{c}\phi\right)\ddot{x}^\mu = \frac{g}{c}(c^2\eta^{\mu\nu} - \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)\partial_\nu\Phi(x), \quad (4.3.52)$$

$$m\ddot{x}_\mu = \frac{q}{c}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\dot{x}^\nu. \quad (4.3.53)$$

In beiden Fällen ist wie zu erwarten die Bedingung (4.3.6) erfüllt, so daß also die Nebenbedingung $\dot{x}^2 = u^2 = c^2 = \text{const}$ konsistent mit den Bewegungsgleichungen (4.3.52) und (4.3.53) ist.

Die Gleichung im Falle der Wechselwirkung mit dem Skalarfeld weist die in der Newtonschen Mechanik unbekannte Besonderheit auf, daß ein Teil der Minkowskikraft $\propto \ddot{x}$ ist, d.h. die Kräfte werden in diesem Fall beschleunigungsabhängig! Wir haben diesen Term in (4.3.52) auf die linke Seite gebracht, um die Konsistenzbedingung (4.3.6) besser erkennen zu können.

Das Vektorfeld führt zu dem Bewegungsgesetz (4.3.53), welches die obige Überlegung zur Eichsymmetrie bestätigt: Da nämlich in (4.3.53) nur die antisymmetrisierte Ableitung der Vektorfelder auftritt, wirkt sich eine Eichtransformation (4.3.50) wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen des Feldes χ nicht auf die Bewegungsgleichung aus.

4.4 Das Noethertheorem für die Poincarésymmetrie

Wie wir schon in Abschnitt 2.4 gesehen haben, ist das Noether-Theorem von fundamentaler Bedeutung für die Modellbildung in der Physik, denn es verknüpft die Erhaltungsgrößen eines Systems mit den Symmetrien der seiner Beschreibung zugrundeliegenden Naturgesetze. Jede Einparameter-Liesymmetrie hat demzufolge einen Erhaltungssatz zur Folge. Umgekehrt definiert auch jeder Erhaltungssatz eine Symmetrie. Wir befassen uns in diesem Kapitel nur mit dem ersten Aspekt, nämlich der Folgerung der Erhaltungsgrößen aus Symmetrien der Variation der Wirkung. Wir wenden es dann auf die Raumzeitsymmetrien, die in der Poincaré-Invarianz der Naturgesetze enthalten sind, an und zeigen u.a., daß die oben definierten Größen für ein freies Teilchen tatsächlich Energie und Impuls als mit den Symmetrien der Naturgesetze unter Raum-Zeittranslationen im Sinne des Noethertheorems verknüpften Erhaltungsgrößen entsprechen. Selbstverständlich ergeben sich auch Drehimpulserhaltung und der Schwerpunktssatz aus der Symmetrie unter Lorentztransformationen.

4. Spezielle Relativitätstheorie

Wir leiten das Noethertheorem nochmals im Rahmen des relativistisch kovarianten Formalismus her. Wie wir sehen werden, wird der Beweis durch Einführung des Weltzeitskalar λ gegenüber der Herleitung in der Newtonschen Mechanik erheblich vereinfacht, da wir λ nicht mitvariieren müssen, da die Invarianz der Wirkung unter Umparametrisierungen von λ ja bereits als Konstruktionsprinzip ausgenutzt wurde und die Vereinbarkeit der Konsistenzbedingung (4.3.6) mit den Bewegungsgleichungen sicherstellt.

Wir betrachten eine beliebige infinitesimale Punkttransformation der Form

$$x(\lambda) \rightarrow x'(\lambda) = x(\lambda) + \delta x(x, \lambda), \quad \delta \lambda = 0. \quad (4.4.1)$$

Damit die Variation der Wirkung für beliebigen Trajektorien $x(\lambda)$ (und nicht nur für die Lösungen der Stationaritätsbedingung) invariant unter dieser Transformation bleibt, ergibt sich wie bei der Herleitung des Noether-Theorems in (2.4), daß es eine Funktion $\delta\Omega(x, \lambda)$ geben muß, so daß

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x - x^\nu \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \frac{d\delta\Omega}{d\lambda} \quad (4.4.2)$$

gilt. Dies ist die **Bedingung an die Lagrangefunktion L** dafür, daß (4.4.1) eine Symmetrietransformation ist.

Für die Lösungen der Bewegungsgleichungen (4.3.30) ergibt sich daraus nach einigen Umformungen der **Erhaltungssatz**

$$\frac{d}{d\lambda} \left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu + x^\nu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} + \delta\Omega \right) = 0. \quad (4.4.3)$$

Dieser Erhaltungssatz ist natürlich durch den Weltzeitskalar λ formuliert. Für jeden inertialen Beobachter bedeutet dies jedoch tatsächlich die zeitliche Erhaltung der angegebenen Größe, denn er kann ja seine Koordinatenzeit t als Weltzeitparameter wählen, denn das Variationsprinzip stellt ja die Unabhängigkeit der Beschreibung des Systems von dieser Wahl sicher.

Wenden wir uns nun den Poincaré-Transformationen zu. Diese sind affine Abbildungen der Raumzeit in sich:

$$\delta x^\mu = \delta \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \delta a^\mu, \quad \delta \omega^\mu{}_\nu, \delta a^\mu = \text{const.} \quad (4.4.4)$$

Dabei müssen die Erzeugenden $\delta \omega^\mu{}_\nu$ so beschaffen sein, daß sie in erster Ordnung die Bedingung (4.2.7) an eine Lorentztransformation erfüllen. Es ergibt sich, daß

$$\delta \omega_{\mu\nu} := \eta_{\mu\rho} \delta \omega^\rho{}_\nu = -\delta \omega_{\nu\mu} \quad (4.4.5)$$

sein muß. Dies ergibt $(4 \cdot 4 - 4)/2 = 6$ unabhängige Parameter für eine Lorentztransformation, wie es sein muß. Die drei Raum-Raum-Matrixelemente sind die Erzeugenden der Drehungen und die Zeit-Raum-Matrixelemente die der Lorentz-Boosts.

Es ist nun einfacher, die Translationen und Lorentztransformationen getrennt zu behandeln. Setzen wir also zunächst (4.4.4) mit $\delta \omega^\mu{}_\nu = 0$ in (4.4.2) ein. Die Bedingung (4.4.2) ergibt dann, daß

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.4.6)$$

sein muß, damit das Bewegungsgesetz für das Punktteilchen translationsinvariant in Raum und Zeit ist. Dann sind gemäß (4.4.3)

$$p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (4.4.7)$$

4.4. Das Noethertheorem für die Poincarésymmetrie

die dazugehörigen Erhaltungsgrößen, die wir entsprechend Energie ($E = c p^0$) und Impuls \vec{p} des Systems nennen.

Für das freie Teilchen erhalten wir gemäß (4.3.31)

$$p^\mu = mc \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = m u^\mu. \quad (4.4.8)$$

Für ein Teilchen in äußeren Feldern sind natürlich Energie und bestimmte Impulskomponenten nur dann erhalten, wenn die äußeren Felder nicht von der Zeit bzw. nicht von den entsprechenden Raumkoordinaten abhängen. Wir werden später bei der dynamischen Behandlung des Gesamtsystems aus Teilchen und Feldern sehen, daß die entsprechende Energie-Impulsbilanz dadurch wieder hergestellt wird, daß die Felder selbst Energie und Impuls tragen.

Wir betrachten weiter noch den Zusammenhang zwischen dem Dreierimpuls und der Dreiergeschwindigkeit. Es gilt

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \mathbf{v}. \quad (4.4.9)$$

Es ist also

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} \Rightarrow v^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 \gamma^2} = \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} (1 - v^2/c^2). \quad (4.4.10)$$

Lösen wir diese Gleichung noch v^2 auf, finden wir

$$v^2 = \frac{c^2 \mathbf{p}^2}{(mc)^2 + \mathbf{p}^2} \Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}}{mc} = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}. \quad (4.4.11)$$

Dabei haben wir uns im letzten Schritt die Nullkomponente von (4.4.8) verwendet:

$$\mathcal{E} = c p^0 = mc^2 \frac{dt}{d\tau} = mc^2 \gamma. \quad (4.4.12)$$

Wir können nun unter erneuter Verwendung (4.4.10) schreiben

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}}. \quad (4.4.13)$$

Setzen wir nun in (4.4.4) $\delta a^\mu = 0$, untersuchen also Lorentztransformationen (Boosts bzw. Drehungen), erhalten wir aus (4.4.2) die Bedingung

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) x^\nu \delta \omega^\mu{}_\nu = \frac{d}{d\lambda} \delta \Omega(x, \lambda). \quad (4.4.14)$$

Wegen der Antisymmetriebedingung (4.4.5) ist dies dann zu erfüllen, wenn

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} x^\nu - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} x^\mu = 0 \quad (4.4.15)$$

gilt. Für das freie Teilchen ergibt sich

$$\delta \Omega = \frac{mc}{2} \frac{\dot{x}^\mu x^\nu - \dot{x}^\nu x^\mu}{\sqrt{\dot{x}^\rho \dot{x}_\rho}} \delta \omega_{\mu\nu}. \quad (4.4.16)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie

Die Erhaltungsgröße für die Drehungen nennen wir **Drehimpuls**. Um das übliche Vorzeichen zu erhalten, definieren wir

$$\delta\Omega = \frac{1}{2} L^{\nu\mu} \delta\omega_{\mu\nu}. \quad (4.4.17)$$

Gl. (4.4.3) liefert dann $\delta\Omega$ selbst als die zur Lorentztransinvarianz gehörigen Erhaltungsgrößen, also

$$L^{\mu\nu} = \frac{mc}{\sqrt{\dot{x}_\rho \dot{x}^\rho}} (x^\mu \dot{x}^\nu - x^\nu \dot{x}^\mu) = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu. \quad (4.4.18)$$

Für die rein räumlichen Komponenten sind das gerade die Komponenten des Drehimpulses:

$$L^{mn} = \epsilon_{mnk} (\vec{x} \times \vec{p})^k, \quad (4.4.19)$$

wie es sein muß, wobei kleine lateinische Indizes in $\{1, 2, 3\}$ laufen und ϵ_{mnk} das Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen also das unter Permutationen seiner Indizes total antisymmetrische Symbol mit $\epsilon_{123} = 1$ bezeichnet.

Für die Zeit-Raumkomponenten ergibt sich die geradlinig gleichförmige Bewegung des Teilchens:

$$L^{0\mu} = ct p^\mu - x^m p^0 = \text{const} \quad (4.4.20)$$

Es ist also

$$x^m(t) = x^m(t=0) + t \frac{c p^m}{p^0} = x^m(t=0) + t \frac{c^2}{E} p^m. \quad (4.4.21)$$

Die Relativgeschwindigkeit zum Inertialsystem ist also $v = c^2 p/E$.

4.5 Bewegung von Ladungen im elektromagnetischen Feld

Wir betrachten als einfachstes Beispiel für die Bewegung elektrisch geladener Teilchen in der speziellen Relativitätstheorie die Bewegung in einem elektromagnetischen Feld, d.h.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \text{const}. \quad (4.5.1)$$

Wir gelangen zu physikalisch anschaulicheren Resultaten, wenn wir die zeit-räumlichen und die raum-räumlichen Feldstärkekomponenten mit Hilfe von Dreiervektoren schreiben, und zwar wie folgt

$$F^m{}_0 = E^m, \quad F^m{}_n = \epsilon_{lmn} B^l. \quad (4.5.2)$$

Die manifest kovarianten Bewegungsgleichungen (4.3.53) lauten bei Wahl der Eigenzeit als Weltzeitparameter

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (4.5.3)$$

Führen wir nun die Aufspaltung des elektromagnetischen Feldes in das elektrische Feld \mathbf{E} und \mathbf{B} gemäß (4.5.2) durch, folgt

$$m \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = \frac{q}{c} \mathbf{E} \frac{dx}{d\tau}, \quad m \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = q \mathbf{E} \frac{dt}{d\tau} + \frac{q}{c} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \times \mathbf{B}. \quad (4.5.4)$$

Es ist klar, daß diese Bewegungsgleichungen konstruktionsgemäß die Nebenbedingung (4.3.6) erfüllen. Bei unserer Wahl der Eigenzeit als Weltzeitparameter müssen wir also die mit den Bewegungsgleichungen kompatible Nebenbedingung

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = c^2 \quad (4.5.5)$$

4.5. Bewegung von Ladungen im elektromagnetischen Feld

erfüllen. Es sind also nur die drei räumlichen Gleichungen voneinander unabhängig, und die zeitliche Gleichung muß aus ihnen folgen.

Wir können also, wie schon oben gesehen, die Eigenzeit eliminieren, indem wir als unabhängigen Parameter die Koordinatenzeit $t = x^0/c$ verwenden. Dazu müssen wir nur beachten, daß

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \quad \text{mit} \quad v = \frac{dx}{dt}. \quad (4.5.6)$$

Es ist also

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = qE + \frac{q}{c} v \times B. \quad (4.5.7)$$

Diese Bewegungsgleichung ist in einem operationalen Sinne Grundlage für die Definition des elektrischen Feldes E und des magnetischen Feldes B : Empirisch hat man nämlich festgestellt, daß materiellen Körpern neben der Masse noch eine weitere fundamentale intrinsische Größe zugeordnet werden muß, nämlich die **elektrische Ladung** q . Dabei kann sowohl $q > 0$ als auch $q < 0$ sein. Die elektrischen Ladungen von Körpern führen zu Kraftwirkungen derselben aufeinander, die vermittels der Felder E und B gemäß (4.5.7) beschrieben werden. Dabei hat man sich E und B als durch andere elektrische Ladungen erzeugt vorzustellen. Die fundamentalen Naturgesetze, die diesen Feldern zugrundeliegen, insbesondere wie sich die Felder aus vorgegebenen Ladungen und deren Bewegung bestimmen lassen, sind in den **Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik** zusammengefaßt und werden den ausführlichen Gegenstandes des nächsten Bandes dieses Skripts bilden. Hier denken wir und E und B gegeben und betrachten lediglich die Bewegung eines Teilchens aufgrund der Wirkung dieser Felder gemäß der Bewegungsgleichung (4.5.7).

Führen wir auf der linken Seite die Impulse ein, lauten die Bewegungsgleichungen schließlich

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.5.8)$$

Sie sind durch die Beziehung (4.4.13) zu ergänzen:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2}}. \quad (4.5.9)$$

Diese beiden Gleichungen (4.5.8) und (4.5.9) bilden zusammen die **relativistischen Bewegungsgleichungen** für ein Teilchen in einem vorgegebenen elektromagnetischen Feld. Dazu betrachten wir nur die einfachsten Beispiele.

Die Korrektheit der relativistischen Beschreibung der Bewegung von Teilchen in elektromagnetischen Feldern stellt übrigens eine der überzeugendsten Bestätigungen für die relativistische Raumzeitstruktur dar. Insbesondere könnten die großen Teilchenbeschleuniger ohne Berücksichtigung der relativistischen Bewegungsgleichungen nicht erfolgreich konzipiert werden.

4.5.1 Bewegung im homogenen elektrischen Feld

Wir betrachten als erstes den Fall $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)^t = \text{const}$, $\mathbf{B} = 0$. Im folgenden schreiben wir der Bequemlichkeit halber $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$. Die Anfangsbedingungen seien obdA. wie folgt gewählt

$$x_0 = 0, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}_0 = \frac{m}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \mathbf{v}_0. \quad (4.5.10)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie

Dann folgen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{dp_x}{dt} = qE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0. \quad (4.5.11)$$

Dann ergibt sich zusammen mit den Anfangsbedingungen (4.5.10) sofort

$$p_x = qEt + p_{0x}, \quad p_y = p_{y0}, \quad p_z = 0. \quad (4.5.12)$$

Verwenden wir nun (4.5.9) für die x -Komponente, finden wir

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qEt + p_{0x}}{\sqrt{M_{\perp}^2 + (qEt + p_{0x})^2/c^2}} \quad \text{mit} \quad M_{\perp}^2 = m^2 + p_{y0}^2/c^2. \quad (4.5.13)$$

Integration nach t ergibt nach einigen einfachen Umformungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (4.5.10)

$$x(t) = \frac{1}{qE} \left[\sqrt{(M_{\perp}c)^2 + c^2(qEt + p_{0x})^2} - \sqrt{(M_{\perp}c)^2 + c^2p_{0x}^2} \right]. \quad (4.5.14)$$

Die y -Komponente von (4.4.13) liefert

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{\sqrt{M_{\perp}^2 + (qEt + p_{0x})^2/c^2}}, \quad (4.5.15)$$

was wir wieder unmittelbar integrieren können

$$y = \frac{p_y c}{qE} \left[\operatorname{arsinh} \left(\frac{qEt + p_{0x}}{M_{\perp}c} \right) - \operatorname{arsinh} \left(\frac{p_{0x}}{M_{\perp}c} \right) \right]. \quad (4.5.16)$$

Aus (4.5.13) und (4.5.15) folgt übrigens noch, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v^2 = c^2, \quad (4.5.17)$$

d.h. die Geschwindigkeit bleibt zu allen Zeiten unterhalb der Grenzgeschwindigkeit c , wie es sein muß.

Wir können noch den **nichtrelativistischen Grenzfall** gewinnen, wenn wir annehmen, daß $|p_0| \ll mc$. Dann gilt für kleine t in quadratischer Ordnung in qEt und $p_0/(mc)$:

$$x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\cong} \frac{p_{0x}t}{m} + \frac{qE}{2m}t^2, \quad y(t) \underset{t \rightarrow 0}{\cong} \frac{p_y}{m}t. \quad (4.5.18)$$

Dies entspricht genau dem Resultat für die Bewegung eines nichtrelativistischen Punktteilchens, auf das die konstante Kraft $F_x = qE$ wirkt, wie es sein muß.

Für $t \rightarrow \infty$ erhalten wir den **ultrarelativistischen Grenzfall**:

$$\begin{aligned} x(t) &\underset{t \rightarrow \infty}{\cong} \operatorname{sign}(qE)ct - \frac{c}{(Eq)^2} \left(\sqrt{c^2m^2 + p_0^2}Eq - p_{0x}|Eq| \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{t} \right), \\ y(t) &\underset{t \rightarrow \infty}{\cong} \frac{p_y c}{qE} \left[\ln 2 + \ln \left(\frac{|qEt + p_{0x}|}{M_{\perp}c} \right) - \operatorname{arsinh} \left(\frac{p_{0x}}{M_{\perp}c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

4.5. Bewegung von Ladungen im elektromagnetischen Feld

In x -Richtung läuft das Teilchen also nahezu mit Lichtgeschwindigkeit, während sich die y -Komponente nur logarithmisch mit der Zeit ändert.

Wir zeigen zur Illustration noch, daß sich das Problem auch mit den kovarianten Gleichungen (4.5.3) noch eleganter lösen läßt. Wir können gleich die in zeitliche und räumliche Komponenten aufgespaltene Form der Gleichungen (4.5.4) verwenden. Da für unser homogenes Feld die Gleichungen nicht von x^μ abhängen, führen wir zunächst die **Vierergeschwindigkeit**

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.5.20)$$

ein. Dann folgen die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\frac{du^0}{d\tau} = \frac{qE}{mc} u^1, \quad \frac{du^1}{d\tau} = \frac{qE}{mc} u^0 e_x. \quad (4.5.21)$$

Daraus folgt sofort, daß

$$u^2 = u_0^2, \quad u^3 = u_0^3 = 0 \quad (4.5.22)$$

ist. Zur Lösung der Bewegung in x -Richtung müssen wir nur die beiden entsprechenden Gleichungen addieren:

$$\frac{d}{d\tau}(u^0 + u^1) = \frac{qE}{mc}(u^0 + u^1). \quad (4.5.23)$$

Die Lösung ist

$$u^0 + u^1 = (u_0^0 + u_0^1) \exp\left(\frac{qE}{mc} \tau\right). \quad (4.5.24)$$

Weiter gilt noch die Nebenbedingung (4.5.5), d.h.

$$u_\mu u^\mu = c^2 \Rightarrow (u^0)^2 - (u^1)^2 = c^2 + (u_0^2)^2 + (u_0^3)^2 = (u_0^0)^2 - (u_0^1)^2. \quad (4.5.25)$$

Mit (4.5.24) folgt

$$(u_0^0)^2 - (u_0^1)^2 = (u^0 + u^1)(u^0 - u^1) = (u_0^0 + u_0^1) \exp\left(\frac{qE}{mc} \tau\right) (u^0 - u^1). \quad (4.5.26)$$

Also ist

$$u^0 - u^1 = (u_0^0 - u_0^1) \exp\left(-\frac{qE}{mc} \tau\right). \quad (4.5.27)$$

Zusammen mit (4.5.24) folgt also

$$\begin{aligned} u^0 &= u_0^0 \cosh\left(\frac{qE}{mc} \tau\right) + u_0^1 \sinh\left(\frac{qE}{mc} \tau\right), \\ u^1 &= u_0^0 \sinh\left(\frac{qE}{mc} \tau\right) + u_0^1 \cosh\left(\frac{qE}{mc} \tau\right). \end{aligned} \quad (4.5.28)$$

Dies nochmals hochintegriert liefert schließlich

$$\begin{aligned} x^0 = ct &= \frac{qE}{mc} \left[u_0^0 \sinh\left(\frac{qE}{mc} \tau\right) + u_0^1 \cosh\left(\frac{qE}{mc} \tau\right) - u_0^1 \right], \\ x^1 &= \frac{qE}{mc} \left[u_0^0 \cosh\left(\frac{qE}{mc} \tau\right) + u_0^1 \sinh\left(\frac{qE}{mc} \tau\right) - u_0^0 + x_0^1 \right], \\ x^2 &= x_0^2 + u_0^2 \tau, \\ x^3 &= x_0^3. \end{aligned} \quad (4.5.29)$$

4. Spezielle Relativitätstheorie

Dabei haben wir den Zeitnullpunkt so gewählt, daß $t(0) = 0$ ist und für die beiden letzten Gleichungen (4.5.22) berücksichtigt. Spezialisieren wir dies auf den oben im Dreierformalismus betrachteten Fall $u_0^1 = 0$, erhalten wir wieder die dort angegebene Lösung, wenn wir τ zugunsten von t eliminieren und beachten, daß wegen $u^\mu = p^\mu/m$

$$(u_0^0)^2 - (u_0^1)^2 = M_\perp^2 c^2 / m^2 \quad (4.5.30)$$

folgt.

4.5.2 Bewegung im homogenen Magnetfeld

Wir betrachten nun den Fall der Bewegung eines geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld. Wir setzen also in (4.5.8) $E = 0$ und $\mathbf{B} = (0, 0, B)^t = \text{const}$ mit $B > 0$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{qB}{c} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5.31)$$

Als Anfangsbedingungen wählen wir obdA.

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad v_x(0) = v_{0x}, \quad v_y(0) = 0, \quad v_z(0) = v_{0z}. \quad (4.5.32)$$

Multiplizieren (4.5.31) mit \mathbf{p} , erhalten wir wegen (4.5.9)

$$\mathbf{p} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{p}^2)}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{p}^2 = \text{const}. \quad (4.5.33)$$

Damit ist aufgrund von (4.5.9) aber auch $v^2 = \text{const}$, und dadurch vereinfacht sich (4.5.31) zu

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B} := \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (4.5.34)$$

Dabei ist

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{qB\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{mc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5.35)$$

Dies bedeutet wegen (1.6.42), daß

$$\mathbf{v}(t) = \hat{D}_3(-\omega t) \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \cos(\omega t) \\ -v_{0x} \sin(\omega t) \\ v_{0z} \end{pmatrix}, \quad (4.5.36)$$

wobei wir die Anfangsbedingungen (4.5.32) berücksichtigt haben. Die Ortskomponenten ergeben sich durch Integration nach t , wiederum unter Einarbeitung der Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}/\omega \sin(\omega t) \\ v_{0x}/\omega \cos(\omega t) \\ v_{0z} t \end{pmatrix}. \quad (4.5.37)$$

Das Teilchen bewegt sich also auf einer Schraubenlinie konstanter Ganghöhe, wobei die Projektion auf die (xy) -Ebene ($\perp \mathbf{B}$) ein Kreis mit Radius

$$R = \frac{v_{0x}}{\omega} = \frac{v_{0x} mc}{qB\sqrt{1-v_0^2/c^2}} \quad (4.5.38)$$

ist. Die Schraubenlinie bildet dabei für positiv (negativ) geladene Teilchen mit \mathbf{B} eine Linksschraube (Rechtsschraube).

Teil II

Mechanik der Kontinua

Kapitel 5

Einführung in die Statistische Physik

In diesem Kapitel gehen wir zur Beschreibung der Materie als kontinuierliches Medium über. Dazu betrachten wir als Beispiel die **kinetische Gastheorie Boltzmanns**, die von der **atomistischen Struktur** der Materie ausgeht und die makroskopischen Eigenschaften derselben durch Mittelung über sehr viele Teilchen zu beschreiben versucht. Wir betrachten hier die **klassische statistische Physik** und behandeln die Atome bzw. Moleküle als klassische Punktteilchen. Es wird sich später zeigen, daß die prinzipiellen Ergebnisse für makroskopische Körper in einem sehr großen Anwendungsbereich dadurch erstaunlich gut genähert werden, obwohl für die mikroskopische Beschreibung der Materie eigentlich die Anwendung der Quantentheorie erforderlich ist.

Nach der relativ kurzen Betrachtung der kinetischen Gastheorie werden wir vor allem die **Fluiddynamik**, also die **Hydro- und Aerodynamik** sowie die Theorie des elastischen Festkörpers entwickeln. Auf die eigentliche Statistische Physik werden wir sinnvollerweise erst in der quantentheoretischen Vielteilchentheorie genauer eingehen, denn nur dies stellt den dafür adäquaten Rahmen dar. Wir werden uns auch größtenteils auf die **nichtrelativistische Formulierung** der Theorie beschränken und nur kurz auf relativistische Verallgemeinerungen eingehen, die wir im nächsten Band dieser Gesamtschau der theoretischen Physik anhand der **Elektrodynamik der makroskopischen Materie** auszubauen gedenken.

5.1 Die Phasenraumverteilungen

Das Ziel der statistischen Mechanik ist die Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines makroskopischen Systems sehr vieler Teilchen aufgrund eines **mikroskopischen Modells** für diese Teilchen. Wir betrachten dazu den einfachsten Fall eines Gases, das wir uns als abgeschlossenes System aus N gleichartigen Punktteilchen, die durch **Paarwechselwirkungen** mit miteinander wechselwirken, vorstellen. Wir nehmen weiter an, die Paarwechselwirkungen können durch ein zeitunabhängiges Zentralpotential beschrieben werden, so daß wir die Dynamik des Systems auf der Ebene der einzelnen Punktteilchen durch eine **Hamilton-Funktion** der Gestalt

$$H(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{j=1}^N \sum_{k < j} V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (5.1.1)$$

beschreiben können.

Dabei bedeuten die $(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$ ($i \in \{1, \dots, N\}$) den vollständigen Satz der Orte und Impulse der N -Teilchen,

die zusammengenommen den $6N$ -dimensionalen **Phasenraum** des Punktteilchensystems parametrisieren.

Die Bewegungsgleichungen sind durch die **Hamiltonschen kanonischen Gleichungen**

$$\frac{d\mathbf{x}_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_j} = \frac{\mathbf{p}_j}{m} = \mathbf{v}_j, \quad \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_j} = -\sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (5.1.2)$$

gegeben. Es ist klar, daß wir für ein reales makroskopisches System diese Gleichungen nicht einmal explizit hinschreiben können, denn es besteht typischerweise aus $N \simeq N_A \simeq 6 \cdot 10^{23}$ Teilchen, wobei N_A die **Avogadro-Zahl** bezeichnet, die definitionsgemäß diejenige Zahl von ^{12}C -Atomen angibt, die in 12 g isotopenreinen Kohlenstoff besteht.

Dies führt uns dazu, makroskopische Größen wie Teilchendichte und -fluß durch Mittelwerte über die entsprechenden Größen der mikroskopischen Konstituenten zu beschreiben. Dazu führen wir zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f^{(N)}(t; \mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$ ein, die die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür angibt, zur Zeit t die N Teilchen an den Phasenraumpunkten $(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$ zu finden, d.h. die Wahrscheinlichkeit, die Teilchen in einem Phasenraumvolumenelement $d^{3N}x d^{3N}p$ zu finden, ist

$$dP^{(N)}(t; \mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) = d^{3N}x d^{3N}p f^{(N)}(t; \mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i). \quad (5.1.3)$$

Es ist natürlich genauso unmöglich, eine solche Verteilungsfunktion für $N \simeq N_A$ Teilchen anzugeben wie die Phasenraumtrajektorien der Teilchen selbst. Vielmehr sind wir an den **Verteilungen für die reduzierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen**

$$f^{(k)}(t; \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1; \dots; \mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k) = \int d^3x_{k+1} d^3p_{k+1} \dots d^3x_N d^3p_N f^{(N)}(t; \mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) \quad (5.1.4)$$

für kleine $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Insbesondere sind wir an der **Einteilchenphasenraumverteilung** $f^{(1)}(t; \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1)$ interessiert. Sie gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte an, daß sich irgendein herausgegriffenes Teilchen zur Zeit t am Phasenraumpunkt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1)$ befindet. Dabei ist es wichtig zu bemerken, daß die Teilchen praktisch ununterscheidbar sind¹. Wir dürfen also annehmen, daß die Phasenraumwahrscheinlichkeitsdichte $f^{(N)}$ vollständig symmetrisch unter Vertauschung der Teilchen ist, d.h. es gilt für alle $P \in S_N$, wobei S_N die Gruppe der Permutationen von N Elementen bezeichnet,

$$f^{(N)}(t; \mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) \equiv f^{(N)}(t; \mathbf{x}_{P(i)}, \mathbf{p}_{P(i)}). \quad (5.1.5)$$

Dies ist dann offensichtlich auch für die reduzierten Wahrscheinlichkeitsdichten $f^{(k)}$ der Fall, und es ist unerheblich, über welche spezifischen $N - k$ Phasenraumvolumina in (5.1.4) integriert wird.

Wir wollen nun eine Gleichung für die Einteilchenphasenraumverteilung $f^{(1)}$ herleiten, die auf reale Phänomene anwendbar ist. Dazu betrachten wir zunächst eine exakte Bewegungsgleichung für die vollständige Verteilung $f^{(N)}$. Dazu nehmen wir an, daß wir für alle N Teilchen Anfangsbedingungen $(\mathbf{x}_i^{(0)}, \mathbf{p}_i^{(0)})$ bei $t = t_0$ vorgegeben haben und bezeichnen die exakten Lösungen der Bewegungsgleichungen (5.1.2) mit $(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$. Für diese Bewegung haben wir in Abschnitt 2.15 das **Liouville-Theorem** hergeleitet, welches besagt, daß die Jacobi-Determinante für die als **Phasenraumfluß** bezeichnete Abbildung $(\mathbf{x}_i^{(0)}, \mathbf{p}_i^{(0)}) \mapsto (\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$ zeitlich konstant ist (vgl. Gl. (2.15.10)). Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß für das hier betrachtete abgeschlossene System das Phasenraumvolumenelement

¹Die Quantentheorie lehrt uns, daß Teilchen sogar strikt ununterscheidbar sind, wenn sie sich nicht durch irgendwelche intrinsischen Merkmale wie Masse oder Ladung unterscheiden.

5.2. Die BBGKY-Hierarchie

unter dem durch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen generierten Phasenraumfluß ungeändert bleibt. Hat man also irgendeine N -Teilchen-Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anfangsbedingungen $f_0^{(N)}(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) = f^{(N)}(t_0, \mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$ gegeben, so muß $f^{(N)}(t; \mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) d^{3N}x d^{3N}p$ zeitlich konstant bleiben. Da das Phasenraumvolumenelement selbst aufgrund des Liouville-Theorems zeitlich invariant ist, folgt die **Liouville-Gleichung**

$$\frac{d}{dt} f^{(N)}(t; \mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{x}_j} \dot{\mathbf{x}}_j + \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_j} \dot{\mathbf{p}}_j \right] = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \{f^{(N)}, H\}_{\text{pb}} = 0, \quad (5.1.6)$$

wobei wir im letzten Schritt unter Anwendung der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen (5.1.2) die Poisson-Klammerschreibweise verwendet haben haben.

5.2 Die BBGKY-Hierarchie

Wir wollen nun dynamische Gleichungen für die reduzierten Verteilungsfunktionen $f^{(k)}$ finden, indem wir die Liouville-Gleichung (5.1.6) über eine geeignete Zahl von Phasenraumvariablen gemäß der Definition (5.1.4) integrieren. Für $k = 1$ müssen wir über $(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2), \dots, (\mathbf{x}_N, \mathbf{p}_N)$ integrieren. Indem wir die Poisson-Klammer ausschreiben und den Term mit dem Potential auf die rechte Seite bringen, erhalten wir

$$\partial_t f_1^{(1)} + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\mathbf{p}_1}{m} = N \int d^3x_2 d^3p_2 \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \frac{\partial V_{12}}{\partial \mathbf{x}_1}, \quad (5.2.1)$$

wobei wir die abkürzende Schreibweise $V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = V_{12}$ und $f^{(2)}(t; \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2) = f_{12}^{(2)}$ usw. eingeführt haben. Auf der linken Seite haben wir angenommen, daß alle nicht aufgeführten Beiträge beim Integrieren über die Konfigurationsraumvariablen verschwinden, da die Integranden jeweils totale Divergenzen bzgl. dieser Variablen sind, so daß wir mit dem Gaußschen Integralsatz unter der Annahme, daß die Phasenraumverteilungen $f^{(k)}$ im Unendlichen hinreichend schnell abfallen. Genauer betrachtet ist der exakte Faktor auf der rechten Seite von Gl. (5.2.1) $(N - 1)$. Allerdings können wir wegen $N \gg 1$ diese Subtilität vernachlässigen.

Die allgemeine Struktur für die Gleichungen für die $f^{(k)}$ wird schon durch dieses einfachste Beispiel klar: Die Gleichung für $f^{(k)}$ wird stets die nächst höhere Verteilung $f^{(k+1)}$ beinhalten. Man erhält dann eine praktisch unendliche Anzahl gekoppelter Differential-Integral-Gleichungen, die die gesamte Hierarchie dieser Verteilungen miteinander verknüpft. Man nennt diese Gleichungen die **BBGKY-Hierarchie**, benannt nach Bogoliubov, Born, Green, Kirkwood und Yvon. Es ist klar, daß auch eine probabilistische Behandlung der Dynamik des Systems bei nur ungenau bekannten Anfangsbedingungen praktisch nicht exakt durchgeführt werden kann, denn es ist freilich ebenso unmöglich die vollständige Hierarchie von Gleichungen zu lösen wie die Bewegungsgleichungen für 10^{27} wechselwirkende Teilchen. Wir müssen also die Komplexität der Dynamik durch geeignete Näherungsannahmen zu einer praktisch lösbaren Aufgabe reduzieren. Dazu benötigen wir im folgenden lediglich die nächst höhere Gleichung der BBGKY-Hierarchie, d.h. die Gleichung für $k = 2$:

$$\begin{aligned} \partial_t f_{12}^{(2)} + \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\mathbf{p}_1}{m} + \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\mathbf{p}_2}{m} - \frac{\partial V_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial V_{12}}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_2} \\ = N \int d^3x_3 d^3p_3 \left(\frac{\partial f_{123}^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial V_{13}}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial f_{123}^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial V_{23}}{\partial \mathbf{x}_2} \right). \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

5.3 Die Boltzmann-Gleichung für ein verdünntes Gas

In diesem Abschnitt leiten wir die berühmte **Boltzmannsche Transportgleichung** für die Einteilchenphasenraumverteilung für ein verdünntes Gas her, indem wir unter den folgenden Annahmen über die höheren Verteilungsfunktionen die BBGKY-Hierarchie abbrechen:

1. Das Wechselwirkungspotential ist nur über einen endlichen Abstand d wirksam, d.h. die Kräfte $\partial_{\mathbf{x}_1} V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ sind für Abstände $r_{12} = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| > d$ vernachlässigbar.
2. Der mittlere Abstand $\bar{r} := \langle r_{12} \rangle$ zweier Teilchen ist groß gegen die Reichweite des Potentials, d.h. $\bar{r} \gg d$.

Um die BBGKY-Hierarchie auf dem Niveau der Einteilchenverteilung abzuschneiden, müssen wir zunächst die Gleichung für die Zweiteilchenverteilungsfunktion (5.2.2) betrachten, um einen geeigneten Ansatz für die Zweiteilchenverteilung auf der rechten Seite von (5.2.1) zu erhalten. Die Näherung beruht auf einer formalen Entwicklung nach der gemäß den obigen Annahmen kleinen Größe d/\bar{r} . Betrachten wir den ersten Term auf der rechten Seite von (5.2.2), brauchen wir aufgrund der ersten Annahme über die kurze Reichweite der Wechselwirkungskräfte nur über einen kleinen Bereich $\mathbf{x}_3 \lesssim d$ zu integrieren. In diesem Bereich können wir die Wechselwirkungskraft durch

$$\frac{\partial V_{13}}{\partial \mathbf{x}_1} \simeq \frac{\partial V(|\mathbf{x}_1|)}{\partial \mathbf{x}_1} \quad (5.3.1)$$

nähern und somit diesen Faktor aus dem Integral herausziehen. Dann erhalten wir

$$N \int d^3 \mathbf{x}_3 d^3 \mathbf{p}_3 \frac{\partial f_{123}^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial V_{13}}{\partial \mathbf{x}_1} \simeq N \frac{\partial V(|\mathbf{x}_1|)}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{d^3}{V}, \quad (5.3.2)$$

wobei V das Gesamtvolumen des das Gas enthaltenden Behälters bezeichnen soll. Weiter ist $V \simeq N\bar{r}^3$ und daher

$$N \int d^3 \mathbf{x}_3 d^3 \mathbf{p}_3 \frac{\partial f_{123}^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial V_{13}}{\partial \mathbf{x}_1} \simeq \frac{\partial V(|\mathbf{x}_1|)}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{d^3}{\bar{r}^3}. \quad (5.3.3)$$

Die gleiche Art von Näherungen können wir nun auch auf den zweiten Term auf der rechten Seite von (5.2.2) anwenden. Diese Betrachtung ergibt, daß die ganze rechte Seite um den Faktor $d^3/\bar{r}^3 \ll 1$ kleiner ist als die linke Seite, so daß wir die rechte Seite in der hier betrachteten niedrigsten Ordnung der Entwicklung einfach ganz vernachlässigen können, d.h. wir können statt (5.2.2)

$$\partial_t f_{12}^{(2)} + \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\mathbf{p}_1}{m} + \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\mathbf{p}_2}{m} - \frac{\partial V_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial V_{12}}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial f_{12}^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_2} = 0 \quad (5.3.4)$$

annehmen. Dies können wir auch als Liouvillegleichung für die Bewegung zweier Teilchen in der Form

$$\frac{d}{dt} f_{12}^{(2)} = \partial_t f_{12}^{(2)} + \{f_{12}^{(2)}, H^{(2)}\}_{\text{pb}} = 0 \quad (5.3.5)$$

schreiben, wobei die Hamilton-Funktion für zwei Teilchen durch

$$H^{(2)} = \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{2m} + V_{12} \quad (5.3.6)$$

gegeben ist.

Die physikalische Interpretation von (5.3.4) ist nun leicht verständlich: (5.3.5) drückt die Tatsache aus, daß die Zweiteilchenkorrelationsfunktion zeitunabhängig ist, solange man Zusammenstöße mit anderen Teilchen vernachlässigen kann. Da aber die Reichweite des Wechselwirkungspotentials zwischen den Teilchen sehr viel kleiner als der mittlere Abstand der Teilchen untereinander ist, d.h. $d \ll \bar{r}$, ist die mittlere Zeit t_{coll} zwischen zwei Stößen sehr groß im Vergleich zur Dauer der Kollision als solcher. In der hier betrachteten führenden Ordnung in dem **Gasparameter** $(d/\bar{r})^3$ können wir die Veränderungen von $f^{(2)}$ aufgrund von Dreiteilchenstößen vernachlässigen und somit den Stoßterm auf der rechten Seite von (5.2.2) vernachlässigen.

Kehren wir nun zu (5.2.1) zurück. Um diese Gleichung in sich geschlossen zu machen, müssen wir den Stoßterm auf der rechten Seite mit Hilfe der Einteilchenverteilungsfunktion $f^{(1)}$ ausdrücken. Betrachten wir nun einen Zeitpunkt t_0 , zu dem die zwei Teilchen, die wir durch die Zweiteilchenverteilung $f^{(2)}$ im Stoßterm beschreiben, sich in einem gegenüber der Reichweite des Potentials d großen Entfernung zueinander befinden. Dann können wir die Boltzmannsche **Hypothese vom molekularen Chaos** als weitere Annahme einführen, derzufolge die beiden Teilchen unter diesen Umständen als stochastisch voneinander unabhängig angesehen werden dürfen, d.h.

$$f_{12}^{(2)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \simeq f_{12}^{(2)}(t_0) = f^{(1)}(t_0, \mathbf{x}_1^{(0)}, \mathbf{p}_1^{(0)}) f^{(1)}(t_0, \mathbf{x}_2^{(0)}, \mathbf{p}_2^{(0)}) := f_{10}^{(1)} f_{20}^{(1)}, \quad (5.3.7)$$

wo $(\mathbf{x}_j^{(0)}, \mathbf{p}_j^{(0)})$ für $j \in \{1, 2\}$ diejenigen Phasenraumkoordinaten der beiden Teilchen sind, so daß diese Teilchen bei $t > t_0$ die Phasenraumkoordinaten $(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j)$ erreichen. In diesem Sinne werden die $(\mathbf{x}_j^{(0)}, \mathbf{p}_j^{(0)})$ Funktionen von $(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j)$ und t . Wir bemerken, daß wir an dieser Stelle stillschweigend die Zeit als gerichtete Größe betrachten, wie es durch das **Kausalitätsprinzip** gefordert.

Aufgrund von (5.3.4) und (5.3.7) gilt also

$$\frac{d f_{10}^{(1)} f_{20}^{(1)}}{dt} = \left[\frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\mathbf{p}_2}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} - \frac{\partial V_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial V_{12}}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right] f_{10}^{(1)} f_{20}^{(1)} = 0. \quad (5.3.8)$$

Dies lösen wir nach dem Ausdruck mit dem Gradienten nach \mathbf{p}_1 auf und setzen diesen in den Stoßterm von (5.2.1) ein. Da die Beiträge mit Ableitungen bzgl. \mathbf{x}_2 und \mathbf{p}_2 als totale Divergenzen geschrieben werden können, verschwinden die entsprechenden Integrale, und wir erhalten für den Stoßterm²

$$\frac{1}{N} C[f] := N \int d^3 \mathbf{x}_2 d^3 \mathbf{p}_2 \left[\frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\mathbf{p}_2}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \right] f_{10}^{(1)} f_{20}^{(1)}. \quad (5.3.9)$$

Wegen der räumlichen Translationsinvarianz der Zweiteilchenhamiltonfunktion (5.3.6) kann der Ausdruck $f_{10}^{(1)} f_{20}^{(2)}$ nur von den Relativkoordinaten $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ abhängen, und es gilt daher

$$\frac{1}{N} C[f] = N \int d^3 \mathbf{x}_2 d^3 \mathbf{p}_2 \mathbf{v}_{\text{rel}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_{10}^{(1)} f_{20}^{(1)}. \quad (5.3.10)$$

Dabei haben wir die Relativgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{m} \quad (5.3.11)$$

²Der Faktor $1/N$ wird sogleich noch klar werden.

der beiden Teilchen eingeführt. Nun führen wir Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) für \mathbf{r} ein, wobei wir die z -Achse in die Richtung von \mathbf{v}_{rel} legen. Dann vereinfacht sich das Integral in (5.3.10) zu

$$\frac{1}{N}C[f] = N \int d^3x_2 d^3p_2 v_{\text{rel},z} \frac{\partial}{\partial z} f_{1^0}^{(1)} f_{2^0}^{(1)} = \int d^3p_2 d\rho d\varphi \rho v_{\text{rel}} \left[f_{1^0}^{(1)} f_{2^0}^{(1)} \right]_{z \rightarrow -\infty}^{z \rightarrow \infty}, \quad (5.3.12)$$

wobei $z \rightarrow \pm\infty$ symbolisiert, daß die Komponente der Relativkoordinate der beiden Teilchen zur Zeit t bzgl. der Richtung von \mathbf{v}_{rel} groß gegenüber der Reichweite der Wechselwirkung d ist. Dabei bedeutet " $z \rightarrow -\infty$ " sich die Teilchen zur Zeit t aufeinander zubewegen, aber noch weit im Vergleich zur Wechselwirkungsreichweite voneinander entfernt sind, d.h. der Stoß hat zur Zeit t noch gar nicht stattgefunden, und die Teilchen waren zur Zeit t_0 noch weiter voneinander entfernt. Dies bedeutet, daß $\mathbf{p}_1^{(0)} = \mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2^{(0)} = \mathbf{p}_2$ sein müssen, denn die Impulse können sich bei der Bewegung zwischen t_0 und t nicht geändert haben, wenn keine wesentliche Wechselwirkung zwischen den Teilchen stattgefunden hat.

Falls hingegen zur Zeit t " $z \rightarrow +\infty$ " gilt, bewegen sich die Teilchen voneinander weg, und es muß im Zeitintervall (t_0, t) ein Stoß stattgefunden haben, d.h. daß die beiden Teilchen vor dem Stoß, zur Zeit $t = t_0$, solche Impulse \mathbf{p}'_1 und \mathbf{p}'_2 gehabt haben müssen, daß sie aufgrund des Stoßes zur betrachteten Zeit t die Impulse \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 besitzen.

Das Flächenelement $\rho d\rho d\varphi$ senkrecht zur Relativgeschwindigkeit besitzt die Bedeutung eines differentiellen Wirkungsquerschnitts $d\sigma$ für die elastische Zweiteilchenstreuung, welche einen Übergang von Impulsen $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ nach $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ ($z \rightarrow -\infty$) bzw. einen Stoß von Impulsen $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ nach $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ ($z \rightarrow +\infty$) bewirkt. Während des Stoßes bleiben freilich Gesamtimpuls und -energie der beiden Teilchen erhalten,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{2m}. \quad (5.3.13)$$

Nun ist $v_{\text{rel}} \rho d\rho d\varphi = v_{\text{rel}} d\sigma$ die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und pro Projektil- und Targetteilchen für eine Kollision w_{fi} , die von einem Anfangsimpulszustand i zu einem Endimpulszustand f der beiden Teilchen führt. Damit gelangen wir schließlich zu dem folgenden Ausdruck für den Stoßterm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}C[f] = N \int d^3p_2 \int d^3p'_1 \int d^3p'_2 & \left[w(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \leftarrow \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) f^{(1)}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}'_1) f^{(1)}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}'_2) \right. \\ & \left. - w(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 \leftarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) f^{(1)}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) f^{(1)}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Nun bringen wir schließlich Gl. (5.2.1) noch in eine in der kinetischen Gastheorie üblichere Form, indem wir sie mit der Gesamtteilchenzahl N multiplizieren und als Gleichung für die Gesamtphasenraumdichte $f = N f^{(1)}$ schreiben. Die Bedeutung von f ist also, daß sich in einem Phasenraumelement $d^3x d^3p$ um den Phasenraumpunkt (\mathbf{x}, \mathbf{p}) zur Zeit t im Mittel $dN = d^3x d^3p f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ Teilchen befinden. Setzen wir also (5.3.14) in (5.2.1) ein, erhalten wir schließlich die **Boltzmann-Gleichung**

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \right] f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) = \int d^3p_2 \int d^3p'_1 \int d^3p'_2 & \\ \times \left[w(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \leftarrow \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}'_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}'_2) \right. & \\ \left. - w(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 \leftarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_2) \right]. & \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Die physikalische Interpretation des Stoßintegrals auf der rechten Seite ist nun sehr einfach: Es beschreibt die Rate von Zweiteilchenstößen, die entweder den Impuls eines der beiden betrachteten Teilchen von einem beliebigen Anfangsimpuls zum Impuls \mathbf{p}_1 ändert (entsprechend dem ersten positiven

Term im Stoßintegral, dem **Gewinnterm**) oder den Anfangsimpuls \mathbf{p}_1 eines der beiden Teilchen in irgendeinen anderen Impuls \mathbf{p}'_1 ändert (entsprechend dem zweiten negativen Term im Stoßintegral, dem **Verlustterm**).

Wir können das Stoßintegral noch vereinfachen, indem wir berücksichtigen, daß der Hamilton-Operator (5.1.1) sowohl unter Zeitumkehr $T(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) = (\mathbf{x}_i, -\mathbf{p}_i)$ als auch unter räumlichen Spiegelungen $P(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) = (-\mathbf{x}_i, -\mathbf{p}_i)$ invariant ist. Das impliziert die entsprechenden Symmetrien für die Streuraten, d.h.

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \leftarrow \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) &= \omega(-\mathbf{p}'_1, -\mathbf{p}'_2 \leftarrow -\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2) \quad (\text{Zeitumkehrsymmetrie}), \\ \omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \leftarrow \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) &= \omega(-\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2 \leftarrow -\mathbf{p}'_1, -\mathbf{p}'_2) \quad (\text{Spiegelsymmetrie}). \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Dabei haben wir in der ersten Gleichung berücksichtigt, daß die Zeitumkehroperation sowohl die Impulse umkehrt als auch Anfangs- und Endzustände der betrachteten Teilchen vertauscht. Wenden wir auf die erste Beziehung noch die Spiegellungssymmetrie an, erhalten wir schließlich

$$\omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \leftarrow \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = \omega(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 \leftarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2). \quad (5.3.17)$$

Diese Beziehung nennt man die **Relation des detaillierten Gleichgewichts**, denn sie besagt, daß die Rate von Kollisionen, die die Änderung der Impulse zweier Teilchen in einem Zweiteilchenstoß von $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ nach $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$ bewirken, ebenso groß ist wie die Rate des entsprechend umgekehrten Prozesses. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß diese Beziehung bereits hinreicht, die **Gleichgewichtsverteilung** der Teilchen, also die zeitlich konstante Lösung der Boltzmann-Gleichung zu bestimmen. Wie wir sehen werden, führt dies dazu, daß diese Verteilung universell ist, d.h. nicht von der genauen Form des Wechselwirkungspotentials abhängt. Verwenden wir (5.3.17) in (5.3.15), vereinfacht sich die Boltzmann-Gleichung zu

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \right] f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) &= \int d^3 \mathbf{p}_2 \int d^3 \mathbf{p}'_1 \int d^3 \mathbf{p}'_2 \omega(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 \leftarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ &\times [f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}'_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}'_2) - f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_2) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_2)]. \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit der wichtigen Bemerkung, daß diese Form der Boltzmann-Gleichung auch ohne die Annahme der T - und P -Symmetrie der Wechselwirkungen hergeleitet werden kann, wozu wir allerdings auf die Quantentheorie vorgreifen müssen [LL81].

Dazu verwenden wir das allgemeine Prinzip der quantenmechanischen Streutheorie, wonach die Übergangsrate w_{fi} mit Hilfe der entsprechenden **Strematrixelemente** ausgedrückt werden kann,

$$w_{fi} = |S_{fi}|^2, \quad (5.3.19)$$

wobei der Streuoperator die quantenmechanische Zeitevolution von einem Anfangszustand sehr weit voneinander entfernter und damit praktisch freier Teilchen zu einem Endzustand beschreibt. Dieser Streuoperator ist unitär. Um das Argument zu vereinfachen, nehmen wir an, die Teilchen seien in einem großen endlichen Volumen mit periodischen Randbedingungen für die quantenmechanischen Wellenfunktionen eingesperrt. Dann nehmen die möglichen Impulswerte diskrete Zustände an, und die Unitaritätsbeziehung für die S -Matrix

$$\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger = \mathbb{1} \quad (5.3.20)$$

kann in der Form

$$\sum_f S_{fi}^* S_{fi} = \sum_i S_{fi} S_{fi}^* \Rightarrow \sum_f w_{fi} = \sum_i w_{fi} \quad (5.3.21)$$

geschrieben werden. Im Limes eines unendlichen Volumens gehen die Summen in Integrale über, und die Relation lautet

$$\int d^3 p'_1 d^3 p'_2 w(p_1, p_2 \leftarrow p'_1, p'_2) = \int d^3 p'_1 d^3 p'_2 w(p'_1, p'_2 \leftarrow p_1, p_2). \quad (5.3.22)$$

In der ursprünglichen Form der Boltzmann-Gleichung (5.3.15) betrifft die Integration über die Impulse p'_1 und p'_2 nur die Rate w , und wir können (5.3.22) verwenden, um die Boltzmann-Gleichung in die vereinfachte Form (5.3.18) zu bringen.

Wir werden sehen, daß die oben erwähnte Universalität der Gleichgewichtsverteilung allein auf dieser Form (5.3.18) beruht und nicht auf der stärkeren Relation des detaillierten Gleichgewichts (5.3.17). Wir benötigen dazu also nur die schwächere Form (5.3.22), die auch für Wechselwirkungen gilt, die nicht zeitumkehr- und spiegelsymmetrisch sind!

5.4 Die Entropie und das H -Theorem

Die Entropie eines Gases von N Teilchen ist durch den semiklassischen Ausdruck

$$S(t) = - \int d^3 x d^3 p f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \{ \ln [h^3 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})] - 1 \} \quad (5.4.1)$$

definiert, wobei $h = 2\pi\hbar$ die Plancksche Konstante bedeutet. Dies zeigt, daß zu einer detaillierten Begründung auch der klassischen statistischen Mechanik eigentlich quantentheoretische Argumente erforderlich sind. Wie wir sehen werden, ist allerdings der genaue Wert dieser Konstanten, die die Dimension einer Wirkung (also Impuls \times Länge) besitzt, im Rahmen der klassischen statistischen Physik nicht von herausragender Bedeutung. Wir benötigen allerdings eine solche Konstante, um das Argument im Logarithmus dimensionslos zu machen, denn f besitzt als Einteilchenphasenraumverteilung die Dimension $[h^{-3}]$. Zur physikalischen Bedeutung dieser Größe gelangen wir durch die folgenden Betrachtungen.

Jetzt wollen wir das **Boltzmannsche H-Theorem**³ beweisen, demzufolge die Entropie notwendig monoton wächst, welches eines der wesentlichen Resultate der kinetischen Theorie und der Thermodynamik ist. Es wird oft behauptet, daß das H-Theorem die Gerichtetheit der Zeit für makroskopische Systeme begründet (**thermodynamischer Zeitpfeil**). Wie wir oben gesehen haben, ist dies allerdings ein Zirkelschluß, denn bei der Herleitung der Boltzmann-Gleichung haben wir bereits die Zeitrichtung aufgrund des Kausalitätsprinzips verwendet. Wir können also allenfalls konstatieren, daß der „thermodynamische“ mit dem „kausalen Zeitpfeil“ übereinstimmt.

Um das H-Theorem zu beweisen, leiten wir (5.4.1) nach der Zeit ab,

$$\dot{S}(t) = - \int d^3 x d^3 p \frac{\partial f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial t} \ln [f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) h^3]. \quad (5.4.2)$$

Wir verwenden nun die Boltzmann-Gleichung (5.3.18) für $\partial_t f$. Der Term mit der räumlichen Ableitung aus dem Driftterm auf der linken Seite kann dabei als totale Divergenz geschrieben werden und verschwindet demzufolge beim Integrieren über \mathbf{x} , so daß allein der Beitrag vom Stoßterm

$$\dot{S}(t) = - \int d^3 x d^3 p C[f; t, \mathbf{x}, \mathbf{p}] \ln [f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) h^3] \quad (5.4.3)$$

³Der Name H-Theorem geht auf Boltzmanns Benennung der Entropie durch den griechischen Buchstaben Eta zurück.

übrig bleibt. Da wir solche Ausdrücke noch öfter benötigen werden, führen wir zur Abkürzung zunächst das **Stoßfunktional**

$$\text{Coll}[\phi; t, \mathbf{x}_1] := \int d1 C[f; 1] \phi_1 = \int d1 d2 d1' d2' w(1'2' \leftarrow 12) \phi_1 (f_{1'} f_{2'} - f_1 f_2) \quad (5.4.4)$$

für eine beliebige Einteilchenphasenraumfunktion ϕ ein, wobei $d1 = d^3 \mathbf{p}_1$, $\phi_1 = \phi(t_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1)$, etc. bedeuten sollen. Jetzt können wir im zweiten Term die Impulsintegrationsvariablen (12) und (1'2') vertauschen sowie (5.3.17) verwenden. Dann erhalten wir

$$\text{Coll}[\phi; \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1] = \int d2 d1' d2' w(1'2' \leftarrow 12) (\phi_1 - \phi_{1'}) f_{1'} f_{2'}. \quad (5.4.5)$$

Da andererseits alle Teilchen miteinander identisch sind, können wir in dieser Gleichung wiederum die Paare (11') und (22') vertauschen. Addieren wir das Resultat hinzu und teilen durch 2, ergibt sich die symmetrische Form

$$\text{Coll}[\phi] = \frac{1}{2} \int d2 d1' d2' w(1'2' \leftarrow 12) (\phi_1 + \phi_2 - \phi_{1'} - \phi_{2'}) f_{1'} f_{2'}. \quad (5.4.6)$$

Setzen wir gemäß (5.4.3) $\phi = \ln(f h^3)$, finden wir

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \int d1 d2 d1' d2' d^3 \mathbf{x}_1 w(1'2' \leftarrow 12) f_{1'} f_{2'} \ln \left(\frac{f_{1'} f_{2'}}{f_1 f_2} \right). \quad (5.4.7)$$

Dies können wir in der Form

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \int d1 d2 d1' d2' d^3 \mathbf{x} w(1'2' \leftarrow 12) f_1 f_2 \frac{f_{1'} f_{2'}}{f_1 f_2} \ln \left(\frac{f_{1'} f_{2'}}{f_1 f_2} \right). \quad (5.4.8)$$

schreiben. Setzen wir andererseits in (5.4.6) $\phi = 1$ ein, erhalten wir

$$\frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{p} C[f; t, \mathbf{x}, \mathbf{p}] = 0. \quad (5.4.9)$$

Addieren wir dies zu (5.4.8), finden wir

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \int d1 d2 d1' d2' d^3 \mathbf{x} w(1'2' \leftarrow 12) f_1 f_2 \left\{ \frac{f_{1'} f_{2'}}{f_1 f_2} \left[\ln \left(\frac{f_{1'} f_{2'}}{f_1 f_2} \right) - 1 \right] + 1 \right\}. \quad (5.4.10)$$

Betrachten wir nun die Funktion $f(\alpha) = 1 + \alpha(\ln \alpha - 1)$ für $\alpha > 0$. Sie verschwindet für $\alpha = 1$, und es gilt $f'(\alpha) = \ln \alpha$, $f''(\alpha) = 1/\alpha$. D.h. bei $\alpha = 1$ nimmt die Funktion ihr einziges Minimum an, und das bedeutet, daß $f(\alpha) \geq 0$ und $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Damit folgt aus (5.4.10) in der Tat

$$\dot{S} \geq 0, \quad \dot{S} = 0 \Leftrightarrow f_{1'} f_{2'} = f_1 f_2, \quad (5.4.11)$$

Dabei hat man zu bedenken, daß dies unter der Bedingung der Energie-Impulserhaltung in Zweiteilchenstoßprozessen gilt.

5.5 Lokales Gleichgewicht

Wir betrachten als nächstes (näherungsweise) Lösungen der Boltzmann-Gleichung (5.3.18), die von allgemeinerer Bedeutung für die Gasdynamik sind. Dies wird uns auf die Herleitung klassischer Kontinuumsbeschreibungen für Gase und Flüssigkeiten führen, nämlich die **Euler-Gleichungen für ideale Fluide** und die **Navier-Stokes-Gleichungen für viskose Fluide**. Später werden wir bei der Behandlung der Elektrodynamik sehen, daß wir auch die makroskopischen elektrodynamischen Eigenschaften der Materie mit solchen Methoden zumindest qualitativ verstehen können.

In diesem Abschnitt suchen wir nach zeitunabhängigen Lösungen der Boltzmann-Gleichung, d.h. Einteilchengleichgewichtsverteilungen, die $\partial_t f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$ erfüllen. Es ist klar, daß eine notwendige (aber nicht hinreichende!) Bedingung dafür ist, daß die Entropie (5.4.1) zeitlich konstant bleibt.

Wir betrachten nun zunächst die schwächere Forderung, daß $\dot{S} = 0$ ist. Wie wir bei unserem Beweis des H-Theorems gesehen haben, ist dazu notwendig, daß die Gleichung (5.4.11) erfüllt ist. Schreiben wir nun

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \exp[\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})], \quad (5.5.1)$$

so lautet diese Gleichung

$$\phi_{1'} + \phi_{2'} = \phi_1 + \phi_2, \quad (5.5.2)$$

die für alle Streuprozesse $1'2' \leftarrow 12$, also unter den Nebenbedingungen der Impuls- und Energieerhaltung

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} = \frac{p'^2_1}{2m} + \frac{p'^2_2}{2m}, \quad (5.5.3)$$

zu gelten hat. Um die Funktionalgleichung (5.5.2) unter diesen Nebenbedingungen zu lösen, verwenden wir die Methode der Lagrangemultiplikatoren. Wir können dann (5.5.2) unabhängig voneinander nach $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ variieren. Dies ergibt die Gleichung

$$\partial_{\mathbf{p}} \phi + \beta \mathbf{p}/m + \mathbf{k} = 0 \quad (5.5.4)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\beta(t, \mathbf{x}) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mathbf{k}(t, \mathbf{x}) \mathbf{p} - \Omega(t, \mathbf{x}). \quad (5.5.5)$$

Dabei ist es wichtig zu bemerken, daß die Lagrangemultiplikatoren β und \mathbf{k} **vom Impuls unabhängige Funktionen** von t und \mathbf{x} sein müssen. Dies in unseren Ansatz (5.5.1) eingesetzt ergibt

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = A(t, \mathbf{x}) \exp \left[-\beta(t, \mathbf{x}) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mathbf{k}(t, \mathbf{x}) \mathbf{p} \right] \quad (5.5.6)$$

mit

$$A(t, \mathbf{x}) = \exp[-\Omega(t, \mathbf{x})]. \quad (5.5.7)$$

Dabei kann $A(t, \mathbf{x})$ verwendet werden, um in Abhängigkeit von den übrigen Lagrange-Multiplikatoren β und \mathbf{k} die räumliche Anfangsdichteverteilung der Teilchen festzulegen. Man nennt (5.5.6) die **Maxwell-Boltzmann-Verteilung des lokalen Gleichgewichts**.

Globales oder **thermisches Gleichgewicht** liegt vor, wenn A, β und \mathbf{k} zeitlich konstant sind. Dann ist nämlich natürlich auch die stärkere Forderung, $\partial_t f = 0$ erfüllt, d.h. es gilt $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, und S wird maximal.

5.6 Ideale Fluide

5.7 Thermodynamische Zustandsgrößen

Anhang A

Mathematischer Anhang

A.1 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die allgemeine lineare Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung lautet

$$\ddot{x}(t) + A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = C(t). \quad (\text{A.1.1})$$

Dabei sind A , B und C vorgegebene Funktionen der unabhängigen Variablen t und $x(t)$ die gesuchte Funktion. Hier besprechen wir nur die wichtigsten Grundlagen über die Struktur der Lösungen solcher linearer Differentialgleichungen. Konkrete Beispiele liefern die im Haupttext behandelten harmonischen Oszillatoren.

Man nennt die obige Gleichung **homogen**, wenn $C(t) = 0$ und entsprechend **inhomogen**, wenn $C(t) \neq 0$. Wir betrachten zuerst die Lösungsstruktur der **homogenen Gleichung**

$$\ddot{x}(t) + A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = 0. \quad (\text{A.1.2})$$

Da die Ableitungsoperation linear ist, d.h. für irgendwelche zwei Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, die mindestens zweimal differenzierbar sind,

$$\frac{d}{dt}[C_1x_1(t) + C_2x_2(t)] = C_1\dot{x}_1 + C_2\dot{x}_2, \quad \frac{d^2}{dt^2}[C_1x_1(t) + C_2x_2(t)] = C_1\ddot{x}_1 + C_2\ddot{x}_2 \quad (\text{A.1.3})$$

gilt, ist für zwei Lösungen x_1 und x_2 von (A.1.2) auch die **Linearkombination**

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \quad (\text{A.1.4})$$

mit $C_1, C_2 = \text{const}$ eine weitere Lösung. Es ist weiter klar, daß wir zur genauen Festlegung der Lösung **Anfangsbedingungen** fordern müssen, d.h. wir verlangen von der Lösung x der DGL zusätzlich, daß sie und ihre erste Ableitung bei $t = 0$ bestimmte Werte annimmt:

$$x(0) \stackrel{!}{=} x_0, \quad \dot{x}(0) \stackrel{!}{=} v_0. \quad (\text{A.1.5})$$

Nehmen wir an, wir hätten zwei Lösungen x_1 und x_2 gefunden, können wir versuchen, die Konstanten C_1 und C_2 in der Linearkombination (A.1.4) so zu bestimmen, daß diese Anfangsbedingungen (A.1.5) gelten, d.h. wir müssen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1x_1(0) + C_2x_2(0) &= x_0 \\ C_1\dot{x}_1(0) + C_2\dot{x}_2(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

A.1. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

nach C_1 und C_2 auflösen. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\dot{x}_2(0)$ und die zweite mit $x_2(0)$ und subtrahieren die beiden entstehenden Gleichungen, finden wir

$$C_1[x_1(0)\dot{x}_2(0) - x_2(0)\dot{x}_1(0)] = \dot{x}_2(0)x_0 - x_2(0)v_0. \quad (\text{A.1.7})$$

Wenn die eckige Klammer nicht verschwindet, können wir nach C_1 auflösen:

$$C_1 = \frac{\dot{x}_2(0)x_0 - x_2(0)v_0}{x_1(0)\dot{x}_2(0) - x_2(0)\dot{x}_1(0)}. \quad (\text{A.1.8})$$

Unter derselben Voraussetzung können wir auf ähnliche Weise auch C_2 berechnen:

$$C_2 = \frac{v_0x_1(0) - x_0\dot{x}_1(0)}{x_1(0)\dot{x}_2(0) - x_2(0)\dot{x}_1(0)}. \quad (\text{A.1.9})$$

Wir untersuchen nun noch, wann die Bedingung, daß der Nenner in (A.1.8) und (A.1.9) für die Lösungen x_1 und x_2 der DGL nicht verschwindet, erfüllt ist. Es handelt sich um die Determinante der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems (A.1.6). Um diesen Ausdruck näher zu untersuchen, definieren wir für die beiden Lösungen die **Wronski-Determinante** genannte Größe

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t). \quad (\text{A.1.10})$$

Berechnen wir die Zeitableitung, finden wir mit Hilfe der Produktregel nach einiger Rechnung

$$\dot{W}(t) = x_1(t)\ddot{x}_2(t) - x_2(t)\ddot{x}_1(t). \quad (\text{A.1.11})$$

Jetzt verwenden wir, daß x_1 und x_2 Lösungen der DGL (A.1.2) sind und setzen

$$\ddot{x}_j(t) = -A(t)\dot{x}_j(t) - B(t)x_j(t), \quad j \in \{1, 2\} \quad (\text{A.1.12})$$

in (A.1.11) ein. Das ergibt

$$\dot{W}(t) = -A(t)[x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)] = -A(t)W(t). \quad (\text{A.1.13})$$

Teilen wir dies durch $W(t)$ erhalten wir

$$\frac{\dot{W}(t)}{W(t)} = -A(t) \quad (\text{A.1.14})$$

Integrieren wir diese Gleichung bzgl. t von $t = 0$ bis t , erhalten wir

$$\ln \left(\frac{W(t)}{W(0)} \right) = - \int_0^t dt' A(t'). \quad (\text{A.1.15})$$

Lösen wir dies nach $W(t)$ auf, finden wir schließlich

$$W(t) = W(0) \exp \left[- \int_0^t dt' A(t') \right]. \quad (\text{A.1.16})$$

Das bedeutet aber, daß entweder $W(t) = 0 = \text{const}$ ist (nämlich wenn $W(0) = 0$) oder $W(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Untersuchen wir deshalb weiter, was es für die Lösungen x_1 und x_2 der DGL bedeutet, wenn $W(t) = 0$ für alle t gilt. Aus der Definition der Wronski-Determinante (A.1.10) folgt dann

$$x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} = \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)}. \quad (\text{A.1.17})$$

Auch diese Gleichung können wir wieder bzgl. t von 0 bis t integrieren, und das ergibt

$$\ln\left(\frac{x_1(t)}{x_1(0)}\right) = \ln\left(\frac{x_2(t)}{x_2(0)}\right) \Rightarrow x_2(t) = \frac{x_2(0)}{x_1(0)} x_1(t). \quad (\text{A.1.18})$$

Das bedeutet aber, daß $W(t) = 0$ genau dann, wenn $x_2(t) = C x_1(t)$ mit $C = x_2(0)/x_1(0) = \text{const}$ ist. Die Anfangsbedingungen (A.1.5) sind also durch die Linearkombination (A.1.4) genau dann immer erfüllbar, wenn die Lösungen x_1 und x_2 **linear unabhängig** sind und daher $W(0) \neq 0$ ist. Um also die **allgemeine Lösung der homogenen DGL** zu finden, müssen wir nur irgendwelche zwei linear unabhängigen Lösungen finden. Die allgemeine Lösung ist dann durch die allgemeine Linearkombination (A.1.4) gegeben.

Kommen wir nun auf die inhomogene Gleichung (A.1.1) zurück. Nehmen wir wieder an, daß $x_1^{(\text{inh})}(t)$ und $x_2^{(\text{inh})}(t)$ Lösungen dieser inhomogenen Gleichung ist. Wegen der Linearität der Ableitungsoperation und der Linearität der linken Seite der inhomogenen Gleichung erfüllt dann offenbar $x_1^{(\text{inh})}(t) - x_2^{(\text{inh})}(t)$ die *homogene DGL*. Das bedeutet aber, daß bei Kenntnis von zwei linear unabhängigen Lösungen $x_1^{(\text{hom})}(t)$ und $x_2^{(\text{hom})}(t)$ der *homogenen DGL* diese Differenz durch eine Linearkombination dieser Lösungen gegeben sein muß. Es ist also die *allgemeine* Lösung der inhomogenen Gleichung durch

$$x(t) = C_1 x_1^{(\text{hom})}(t) + C_2 x_2^{(\text{hom})}(t) + x_1^{(\text{inh})}(t) \quad (\text{A.1.19})$$

gegeben. Haben wir also die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gefunden, genügt es, nur eine einzige spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu kennen, um alle Lösungen in der Form (A.1.19) angeben zu können. Es ist klar, daß auch hier die Anfangsbedingungen (A.1.5) durch die entsprechende Berechnung der Integrationskonstanten C_1 und C_2 stets erfüllbar sind, wenn nur $x_1^{(\text{hom})}(t)$ und $x_2^{(\text{hom})}(t)$ linear unabhängig sind und also die Wronski-Determinante $W(0) \neq 0$ ist.

Anhang B

Kegelschnitte

In diesem Anhang wollen wir kurz auf die verschiedenen analytischen Darstellungen von **Kegelschnitten** eingehen, denn diese benötigen wir für ein vollständiges Verständnis des Keplerproblems in Abschnitt 2.6.

B.1 Definition der Kegelschnitte

Für unsere Zwecke ist nicht die Definition der Kegelschnitte als die Schnittkurven einer Ebene mit einem Kreiskegel bequem, sondern zunächst einmal die **Ortsdefinitionen**. Wir unterscheiden drei Grundtypen:

- **Ellipse:** Für eine Ellipse sind zwei Punkte in einer Ebene vorgegeben, die **Brennpunkte** oder **Foci** F_1 und F_2 . Die Ellipse ist dann diejenige Kurve in dieser Ebene, für die jeder Punkt P auf der Ellipse die Gleichung

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a = \text{const} \quad (\text{B.1.1})$$

ist, d.h. für jeden Punkt P der Ellipse ist die *Summe* der Abstände von den beiden Brennpunkten gleich $2a$.

Daraus ergibt sich auch die praktische Möglichkeit eine Ellipse zu zeichnen, die sog. Gärtnerkonstruktion. Man befestigt die Enden einer Schnur der Länge $2a$ in den beiden Brennpunkten und zeichnet dann die Kurve, die sich ergibt, wenn man den Stift entlang des straff gespannten Seils führt. Der Name „Gärtnerkonstruktion“ rührt daher, dass man dieses Verfahren zum Begrenzen schöner ellipsenförmiger Beete im Garten anwenden kann.

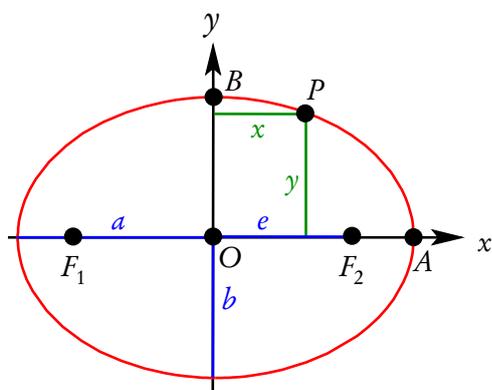
- **Hyperbel:** Auch für eine Hyperbel sind zwei Brennpunkte F_1 und F_2 vorgegeben. Hier ist die *Differenz* der Abstände der Punkte auf der Hyperbel betragsmäßig konstant, d.h.

$$||F_1P| - |F_2P|| = 2a. \quad (\text{B.1.2})$$

- **Parabel:** Für eine Parabel ist ein Brennpunkt F vorgegeben und eine Gerade, die sog. **Leitgerade** in einer Ebene. Die Parabel ist dann durch diejenigen Punkte in der Ebene definiert, für die die Summe der Abstände von der Geraden und dem Brennpunkt konstant ist.

B.2 Analytische Beschreibung in der Ebene

B.2.1 Ellipse



Beginnen wir mit der Ellipse und betrachten die nebenstehende Skizze. Zuerst leiten wir einige geometrische Eigenschaften her. Betrachten wir dazu den Punkt A auf der großen Halbachse der Ellipse. Aus der Definition der Ellipse folgt dann

$$|F_1A| + |F_2A| = (e + a) + (a - e) = 2a. \quad (\text{B.2.1})$$

Damit ist die entlang der Ellipse konstante Summe $2a$. Wenden wir den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck OF_2B an, erhalten wir

$$e^2 + b^2 = a^2, \quad (\text{B.2.2})$$

denn die Hypotenuse dieses Dreiecks ist aus Symmetriegründen $(|F_1B| + |F_2B|)/2 = 2a/2 = a$. Nun können wir eine Gleichung für die Koordinaten (x, y) des Punktes P herleiten. Es ist nämlich, wieder nach dem Satz des Pythagoras

$$|F_1P| = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}, \quad |F_2P| = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}. \quad (\text{B.2.3})$$

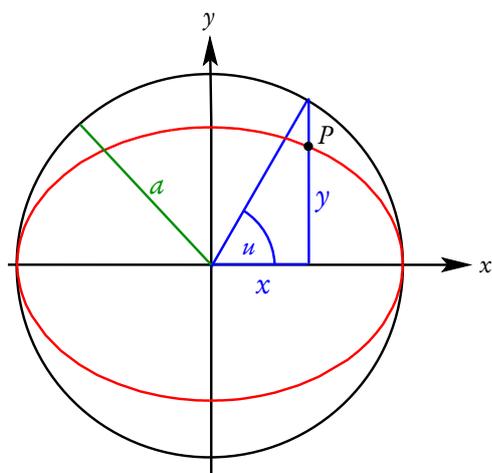
Damit folgt

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a. \quad (\text{B.2.4})$$

Man kann nach einer einfachen aber etwas umfangreichen Rechnung (*Übungsaufgabe!*) zeigen, dass daraus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.2.5})$$

folgt.



Eine andere nützliche Darstellung ergibt sich mit Polarkoordinaten mit dem Mittelpunkt der Ellipse als Ursprung. Aus der nebenstehenden Skizze lesen wir zunächst ab

$$x = a \cos u \quad (\text{B.2.6})$$

Setzen wir dies in (B.2.5) ein, erhalten wir

$$\cos^2 u + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \cos^2 u = \sin^2 u. \quad (\text{B.2.7})$$

Man macht sich schnell klar, dass man mit

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u, \quad u \in [0, 2\pi) \quad (\text{B.2.8})$$

eine vollständige Parametrisierung der Ellipse erhält.

B.2. Analytische Beschreibung in der Ebene

Mit dieser Parametrisierung lässt sich auch leicht die Fläche der Ellipse berechnen. Diese Fläche wird offenbar durch die beiden Parameter $\lambda \in [0, 1]$ und $u \in [0, 2\pi)$ vermöge

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \cos u \\ b \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2.9})$$

parametrisiert. Wir bilden nun infinitesimale Flächenelemente, die durch die Koordinatenlinien $\lambda = \text{const}$ und $u = \text{const}$ aufgespannt werden. Die Flächennormalenvektoren sind dann

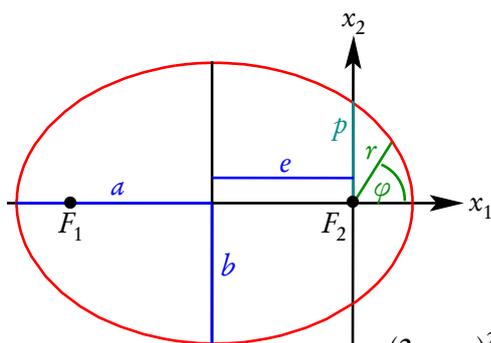
$$d^2\vec{F} = \partial_\lambda \vec{r} \times \partial_u \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} a \cos u \\ b \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \sin u \\ b \cos u \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda ab \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2 u + \sin^2 u \end{pmatrix} = \lambda ab \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2.10})$$

Damit ist die Fläche der Ellipse

$$\int_F |d^2\vec{F}| = ab \int_0^1 d\lambda \int_0^{2\pi} du \lambda = 2\pi ab \int_0^1 d\lambda \lambda = \pi ab. \quad (\text{B.2.11})$$

Es ist klar, dass im Grenzfall $a = b$ (was $e = 0$ impliziert) die Ellipse zu einem Kreis mit Radius a wird.

Schließlich benötigen wir für das Verständnis des Kepler-Problems noch die Ellipsengleichung in Polarkoordinaten mit dem Ursprung in einem Brennpunkt (s. nebenstehende Skizze). Dies lesen wir wieder direkt aus der geometrischen Definition (B.2.1) ab:



$$r + \sqrt{(2e + r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi} = 2a. \quad (\text{B.2.12})$$

Dies formen wir zunächst um in

$$\begin{aligned} (2a - r)^2 &= (2e + r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi \\ &= 4e^2 + 4er \cos \varphi + r^2. \end{aligned} \quad (\text{B.2.13})$$

Mit (B.2.2) und mit den durch

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \epsilon = \frac{e}{a} \quad (\text{B.2.14})$$

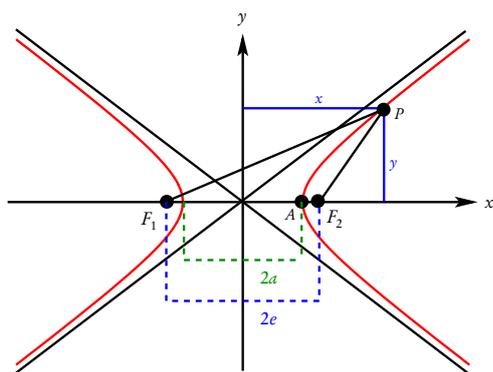
definierten Parametern p (**Halbparameter**) numerischen Exzentrizität ϵ (**numerische Exzentrizität**) finden wir schließlich

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}. \quad (\text{B.2.15})$$

Dies erklärt auch den in der nebenstehenden Skizze eingezeichneten Halbparameter, denn offenbar ist $p = r(\varphi = \pi/2)$.

B.2.2 Hyperbel

B. Kegelschnitte



Betrachten wir Punkt A der nebenstehend abgebildeten Hyperbel, finden wir aus der oben angegebenen Ortsdefinition, dass in der Tat

$$||F_1A| - |F_2A|| = 2a \quad (\text{B.2.16})$$

ist. Mit dem Satz des Pythagoras lesen wir für die Ortskoordinaten

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (\text{B.2.17})$$

Nach einigen einfachen aber umfangreichen Umformungen, erhält man

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b = \sqrt{e^2 - a^2}. \quad (\text{B.2.18})$$

Dies beschreibt beide Äste der Hyperbel.

Eine nützliche Parameterdarstellung erhält man mit Hilfe der **Hyperbelfunktionen** \cosh und \sinh (Cosinus bzw. Sinus hyperbolicus), deren Name von dieser geometrischen Bedeutung herrührt, und die durch

$$\cosh u = \frac{1}{2}[\exp(u) + \exp(-u)], \quad \sinh u = \frac{1}{2}[\exp(u) - \exp(-u)]. \quad (\text{B.2.19})$$

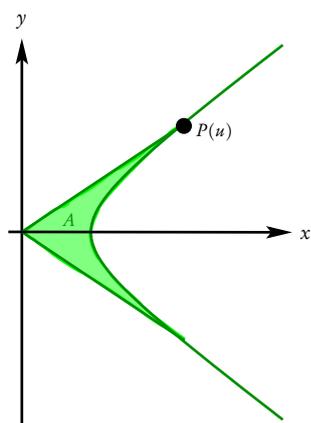
Wir erhalten dann den rechten (oberes Vorzeichen) bzw. linken (unteres Vorzeichen) Ast der Hyperbel durch

$$x = a \cosh u, \quad y = b \sinh u, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.2.20})$$

denn man beweist leicht durch direktes Nachrechnen mit (B.2.19) (*Übung*), dass stets

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \quad (\text{B.2.21})$$

gilt.



Die geometrische Bedeutung von u finden wir durch Berechnung der nebenstehend gezeichneten Fläche A . Wir können die Fläche offenbar mit den Parametern $\lambda \in [0, 1]$ und $u' \in [-u, u]$ parametrisieren mittels

$$\vec{x}(\lambda, u') = \begin{pmatrix} \lambda a \cosh u' \\ \lambda b \sinh u' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2.22})$$

Die Flächennormalenvektoren sind dann (*Nachrechnen!*)

$$\begin{aligned} d^2\vec{F} &= \partial_\lambda \vec{x} \times \partial_{u'} \vec{x} \\ &= d\lambda du' \begin{pmatrix} a \cosh u' \\ b \sinh u' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \sinh u' \\ b \cosh u' \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= d\lambda \lambda a b du' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cosh^2 u' - \sinh^2 u' \end{pmatrix} \\ &= d\lambda \lambda a b du' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.23})$$

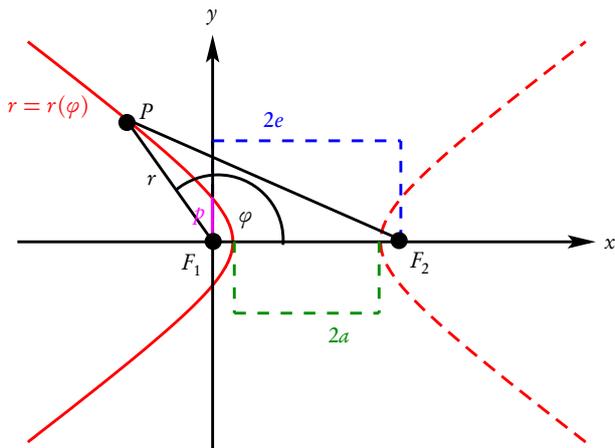
B.2. Analytische Beschreibung in der Ebene

Damit wird die besagte Fläche

$$A = \int_0^1 d\lambda \int_{-u}^u du' |d^2\vec{F}| = ab \int_0^1 d\lambda \int_{-u}^u du' \lambda = ab u. \quad (\text{B.2.24})$$

Setzen wir $a = b = 1$, wird $A = u$, d.h. u gibt die Fläche des entsprechenden Segments einer Einheitshyperbel¹.

¹Man kann sich klar machen, dass man dies auch ähnlich am Einheitskreis für den Winkel sagen kann (*Übungsaufgabe!*).



Für die Bahnbewegung beim Kepler-Problem benötigen wir wieder die Beschreibung des einen Hyperbelastes in Polarkoordinaten mit dem einen Brennpunkt im Koordinatenursprung. Da die Astronomen den sonnennächsten Punkt als Bezugspunkt verwenden, d.h. das Perihel bzw. Periastron entspricht $\varphi = 0$, handelt es sich um den linken Ast. Mit Hilfe des Cosinus-Satzes für das Dreieck F_1F_2P lesen wir ab

$$|PF_2|^2 = (2e)^2 + r^2 - 4er \cos \varphi. \quad (\text{B.2.25})$$

Mit der Definition der Hyperbel erhalten wir damit

$$|PF_2| - |PF_1| = \sqrt{(2e)^2 + r^2 - 4er \cos \varphi} - r = 2a. \quad (\text{B.2.26})$$

Dies wollen wir nach r auflösen. Dazu rechnen wir

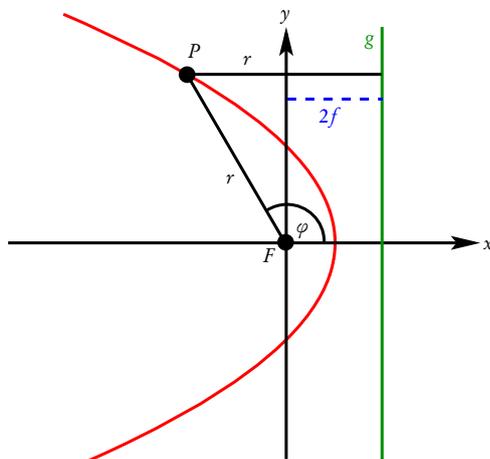
$$(2a + r)^2 = (2e)^2 + r^2 - 4er \cos \varphi \quad (\text{B.2.27})$$

Mit der binomischen Formel auf der linken Seite folgt nach einigen einfachen Umformungen

$$(2a)^2 + 4ar + r^2 = (2e)^2 + r^2 - 4er \cos \varphi \Rightarrow r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}. \quad (\text{B.2.28})$$

Dabei ist wieder $p = b^2/a$ und $\epsilon = e/a$, d.h. die Formeln sind formal identisch mit denen bei der Ellipse. Der entscheidende Unterschied ist, dass bei der Hyperbel $e > a$ ist, d.h. $\epsilon > 1$. Da $r \geq 0$ ist, ist der geometrisch sinnvolle Winkelbereich eingeschränkt. Wählen wir als Bereich $\varphi \in (-\pi, \pi)$, folgt aus $1 + \epsilon \cos \varphi \geq 0$, dass $\cos \varphi \geq -1/\epsilon$ sein muss, d.h. $|\varphi| \leq \arccos(-1/\epsilon)$, d.h. der geometrisch sinnvolle Bereich ist $\varphi \in (-\arccos(-1/\epsilon), \arccos(-1/\epsilon))$. Bei der Annäherung von φ an die entsprechenden Werte $\pm \arccos(-1/\epsilon)$ wird $r \rightarrow \infty$, d.h. die Hyperbelbahn ist unendlich ausgedehnt. Beim Kepler-Problem bedeutet dies, dass sich der Himmelskörper aus dem Unendlichen an die Sonne annähert und auch wieder im Unendlichen verschwindet, d.h. es liegt keine gebundene Bahn wie bei der Ellipse vor.

B.2.3 Parabel



Bei der Parabel beschränken wir uns auf die Herleitung der für das Kepler-Problem benötigten Gleichung in Polarkoordinaten mit dem Brennpunkt im Koordinatenursprung. Aus der Definition der Parabel lesen wir ab

$$r = 2f - r \cos \varphi \Rightarrow r(\varphi) = \frac{2f}{1 + \cos \varphi} = \frac{p}{1 + \cos \varphi}, \quad (\text{B.2.29})$$

d.h. auch hier haben wir mit dem Parameter $p = 2f$ dieselbe Form für die Gleichung wie bei Ellipse und Hyperbel, wobei aber $\epsilon = 1$ ist. Der geometrische Winkelbereich ist offenbar $\varphi \in (-\pi, \pi)$, wobei für $\varphi \rightarrow \pm\pi$ offenbar $r \rightarrow \infty$ ist. Auch die Parabelbahn entspricht also beim Kepler-Problem einer ungebundenen Bewegung.

B.2. Analytische Beschreibung in der Ebene

Literaturverzeichnis

- [BG69] V. Berzi and V. Gorini, Reciprocity Principle and the Lorentz Transformations, *Jour. Math. Phys.* **10**, 1518 (1969), <https://doi.org/10.1063/1.1665000>.
- [CH10] W. Cassing and H. v. Hees, *Mathematische Methoden für Physiker*, Universität Gießen (2010), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/maphy.pdf>.
- [LL81] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics Volume X*, Pergamon Press (1981).