Gruppentheorie

Andreas Slateff

30. November 2001

Kapitel 1

Gruppen

1.1 Grundlegende Definitionen und Beispiele

Definition 1.1 *Es seien G eine nichtleere Menge, $\cdot : G \times G \to G$ eine Abbildung und $e \in G$ ein Element. Man nennt $(G, \cdot, e)$ eine* Gruppe*, wenn gilt*

- *$\cdot$ ist assoziativ, $\forall a, b, c \in G : (ab)c = a(bc)$*
- *e ist ein neutrales Element, $\forall a \in G : ea = ae = a$*
- *alle Elemente haben ein Inverses, $\forall a \in G \, \exists a^{-1} \in G : aa^{-1} = a^{-1}a = e$*

G ist die *Trägermenge* der Gruppe, $\cdot$ die *Gruppenoperation.* Ist die Gruppenoperation kommutativ, so spricht man von einer *kommutativen* oder *Abelschen* Gruppe.

Ist aus dem Zusammenhang klar, was die Gruppenoperation und das neutrale Element sind, so erspart man sich auch das Anschreiben von $(G, \cdot, e)$ und bezeichnet oft kurz G selbst als Gruppe. Auch werden wir für verschiedene Gruppen $(G, \cdot, e_G)$ und $(H, *, e_H)$ die Gruppenoperationen und neutralen Elemente nicht immer unterschiedlich bezeichnen, sondern zur Vereinfachung manchmal bloß $\cdot$ und e schreiben.

Beispiele für Gruppen sind die ganzen Zahlen mit der Addition, $(\mathbb{Z}, +, 0)$, oder etwa die rationalen Zahlen ohne Null mit der Multiplikation, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$.

Weiter wird für jede nichtleere Menge M die Menge $S(M) := \{f : M \to M | f \text{ bijektiv}\}$ aller bijektiven Selbstabbildungen mit der Abbildungskomposition zu einer Gruppe $(S(M), \circ, \mathrm{id}_M)$. $S(M)$ heißt die *symmetrische Gruppe* auf M, ihre Elemente heißen *Permutationen* von M.

Ist $M = \{1, 2, ..., n\}$, so schreibt man auch $S(n)$ oder S_n statt $S(M)$. Für $M = \{1, 2\}$ besteht $S(M)$ aus den beiden Permutationen $(1) := (1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2)$ und $(12) := (1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1)$.

Für einen Vektorraum V wird die Menge $\mathrm{GL}(V) := \{f : V \to V | f \text{ linear, bijektiv}\}$ aller bijektiven linearen Abbildungen von V mit der Abbildungskomposition zu einer Gruppe $(\mathrm{GL}(V), \circ, \mathrm{id}_V)$, der *allgemeinen linearen Gruppe* von V.

Definition 1.2 *Es seien $(G, \cdot, e_G)$ und $(H, *, e_H)$ Gruppen und $H \subseteq G$ eine Teilmenge von G. Man nennt $(H, *, e_H)$ eine* Untergruppe *von G, falls die Gruppenoperationen auf H übereinstimmen, $\cdot|_{H \times H} = *$, und $e_G \in H$. Geschrieben wird dafür kurz $H \leq G$.*

Stimmen die Gruppenoperationen auf H überein, so sind notwendigerweise auch die neutralen Elemente gleich. Es gilt nämlich $e_H = e_H \cdot e_G = e_H * e_G = e_G$.

Eine nichtleere Teilmenge $H \subseteq G$ ist übrigens mit der eingeschränkten Gruppenoperation genau dann eine Untergruppe, wenn $\forall a, b \in H : ab^{-1} \in H$ (*Untergruppenkriterium*).

Jede Gruppe $(G, \cdot, e)$ hat die trivialen Untergruppen $\{e\}$ und G. Weiter liefern beliebige Durchschnitte von Familien von Untergruppen einer Gruppe G wieder Untergruppen von G.

Für zwei Teilmengen $A, B \subset G$ schreibt man $AB := \{ab | a \in A, b \in B\}$, insbesondere für $a, b \in G$ auch $Ab := \{ab | a \in A\}$ und $aB := \{ab | b \in B\}$.

Sind $H \leq G$ eine Untergruppe und $a \in G$, so heißt aH eine *Linksnebenklasse* von G nach H und Ha eine *Rechtsnebenklasse* von G nach H. In diesem Fall ist $\{aH | a \in G\}$ eine Klasseneinteilung (eine Partition) von G, genannt *Linksnebenklassenzerlegung* von G nach H. Analog ist $\{Ha | a \in G\}$ die *Rechtsnebenklassenzerlegung* von G nach H.

Als Beispiel betrachten wir $(G, \cdot, e) := (\mathbb{Z}, +, 0)$, mit $H := 2\mathbb{Z} = \{2z | z \in \mathbb{Z}\}$ als Untergruppe. Ist $a \in \mathbb{Z}$ gerade, so besteht $aH = a + 2\mathbb{Z} = \{a + 2z | z \in \mathbb{Z}\}$ aus allen geraden ganzen Zahlen. Ist $a \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist $aH = a + 2\mathbb{Z}$ die Menge aller ungeraden ganzen Zahlen. In beiden Fällen gilt $aH = Ha$, weil die Addition ganzer Zahlen kommutativ ist. Die Nebenklassenzerlegungen stimmen somit überein und haben die beiden Mengen der geraden und der ungeraden ganzen Zahlen als Elemente. Das sind genau die Restklassen ganzer Zahlen modulo 2.

Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ bildet man analog $H := n\mathbb{Z}$ und die Nebenklassenzerlegungen. Diese enthalten genau die Restklassen ganzer Zahlen modulo n. Üblich sind Bezeichnungen mit Überstreichen für die Restklassen: $\bar{a} := aH = a + n\mathbb{Z}$ für $a \in \mathbb{Z}$.

Für $H \leq G$ ist die Anzahl verschiedener Linksnebenklassen gleich der Anzahl verschiedener Rechtsnebenklassen und heißt der *Index* von H in G, in Zeichen $[G : H]$.

Leicht zu zeigen ist nun der folgende Satz von Lagrange:

Satz 1.1 *Es seien $(G, \cdot, e)$ eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann gilt: $[G : H] \cdot |H| = |G|$.*

Der Satz von Lagrange gilt auch für unendliche Gruppen.

1.2 Abbildungen zwischen Gruppen

Für einen Vektorraum V ist $\mathrm{GL}(V)$ eine Untergruppe von $S(V)$. Untergruppen von $\mathrm{GL}(V)$ sind besonders wichtig. Lineare Abbildungen endlichdimensionaler Vektorräume lassen sich ja durch Matrizen koordinatisieren. Man kann nun versuchen, Elemente einer Gruppe durch solche Matrizen darzustellen (genauer: durch eine Abbildung zuzuordnen), und die Gruppenoperation durch die Matrizenmultiplikation zu beschreiben. Das führt dann auf die sogenannte *Darstellungstheorie*, in diesem Fall auf eine Darstellung einer Gruppe durch eine Matrizengruppe.

Etliche Untergruppen der $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ haben einen eigenen Namen (Drehgruppe, Galilei-Gruppe, Lorentz-Gruppe, ...) und spielen in der Physik eine wesentliche Rolle. Sie können auch abstrakt formuliert und mit einer Darstellung veranschaulicht werden. Wir werden sie später genauer studieren.

Die Forderung, daß die Gruppenoperationen zweier Gruppen sich mit einer Abbildung vertragen, führt auf den folgenden Begriff:

Definition 1.3 *Es seien $(G_1, \cdot, e_1)$ und $(G_2, \cdot, e_2)$ Gruppen und $f : G_1 \to G_2$ eine Abbildung. Man nennt f einen* Gruppenhomomorphismus*, falls f mit der Gruppenoperation verträglich ist, $\forall a, b \in G_1 : f(ab) = f(a)f(b)$, und die neutralen Elemente aufeinander abbildet, $f(e_1) = e_2$. Die Menge aller solchen Gruppenhomomorphismen bezeichnen wir mit* $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$.

Die Komposition zweier Gruppenhomomorphismen liefert wieder einen Gruppenhomomorphismus. Das Bild eines Gruppenhomomorphismus ist eine Untergruppe.

Ein injektiver Gruppenhomomorphismus heißt ein *Gruppen-Monomorphismus*, ein surjektiver ein *Gruppen-Epimorphismus* und ein bijektiver ein *Gruppen-Isomorphismus*.

Gruppen bilden die Objekte einer Kategorie, die Kategorie **Grp** der Gruppen, mit den Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Definition 1.4 *Es seien* $(G_1, \cdot, e_1)$ *und* $(G_2, \cdot, e_2)$ *Gruppen und* $f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ *ein Gruppenhomomorphismus. Dann heißt die Menge* $\ker f := \{g \in G_1 | f(g) = e_2\}$ *der* Kern *von* f.

Der Kern von f ist das vollständige Urbild des neutralen Elements und ist eine Untergruppe von G_1.

Ein Gruppenhomomorphismus ist genau dann injektiv, wenn sein Kern nur das neutrale Element enthält. Der Kern eines Gruppenhomomorphismus f dient unter anderem dazu, Eigenschaften von f und ganz besonders des Bildes $f(G_1)$ zu verstehen. Wir werden gleich sehen, daß mit Hilfe der Kerne sogar eine Klassifikation aller Bilder einer Gruppe unter Gruppenhomomorphismen bis auf Isomorphie möglich ist.

1.3 Strukturen von Gruppen

Ein erstes Resultat zur Klassifikation von Gruppen gibt der folgende Darstellungssatz von Cayley:

Satz 1.2 *Jede Gruppe ist isomorph zu einer Gruppe von Permutationen. Für jede Gruppe* $(G, \cdot, e)$ *gibt es einen injektiven Gruppenhomomorphismus* $\pi : G \to S(G)$ *in die symmetrische Gruppe auf* G*, und dessen Bild ist eine zu* G *isomorphe Untergruppe der* $S(G)$*. Für* $a \in G$ *leistet* $\pi(a) := (G \ni g \mapsto ag \in G)$ *das Gewünschte.*

Zum Beweis überprüft man die Homomorphismuseigenschaft durch direktes Nachrechnen und zeigt, daß der Kern der Abbildung π nur das neutrale Element enthält.

Kerne sind zwar Untergruppen, aber im Allgemeinen ist nicht jede Untergruppe Kern eines Gruppenhomomorphismus.

Genauer gefaßt wird die Situation durch den folgenden Begriff:

Definition 1.5 *Es seien* $(G, \cdot, e)$ *eine Gruppe und* $N \leq G$ *eine Untergruppe. Man nennt* N *einen* Normalteiler *oder eine* invariante Untergruppe *von* G*, falls* N *unter Konjugationen mit Gruppenelementen invariant bleibt,* $\forall g \in G : gNg^{-1} \subseteq N$*. Symbolisch schreibt man* $N \trianglelefteq G$*.*

In einer Abelschen Gruppe ist jede Untergruppe auch Normalteiler, in einer Nicht-Abelschen Gruppe im Allgemeinen jedoch nicht. Zur Übung bestimme man alle Untergruppen und Normalteiler der Gruppen $S(3)$ und $S(4)$. Für $n \in \mathbb{N}$ bildet die Menge A_n aller geraden Permutationen einen Normalteiler von S_n.

Eine äquivalente Bedingung für eine Untergruppe N, Normalteiler in G zu sein, ist übrigens $\forall g \in G : gN = Ng$, kurz: Linksnebenklasse = Rechtsnebenklasse. Insbesondere ist die Menge aller Linksnebenklassen gleich der Menge aller Rechtsnebenklassen. Diese Menge $G/N := \{gN | g \in G\}$ ist für das Studium der Struktur von Gruppen und von Gruppenhomomorphismen so wichtig, daß sie eine eigene Bezeichnung verdient. Auf ihr läßt sich sofort in natürlicher Weise eine Gruppenoperation definieren, $gN \cdot hN := (gh)N$, womit G/N die Struktur einer Gruppe mit dem neutralen Element N erhält. Die Abbildung $\pi : G \to G/N$ mit $\pi(g) = gN$, die jedem Gruppenelement seine Nebenklasse zuordnet, ist surjektiv und wird als *kanonische Projektion* bezeichnet.

Definition 1.6 *Es seien G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, G/N wie oben. Dann heißt G/N die* Faktorgruppe *von G nach N.*

Als Beispiel betrachten wir wieder Restklassen, $G := \mathbb{Z}$ mit der Addition, $n \in \mathbb{N}$, $N := n\mathbb{Z}$. Wir haben schon gesehen, daß dabei Rechts- und Linksnebenklassen übereinstimmen, es liegt also mit $n\mathbb{Z}$ ein Normalteiler von $\mathbb{Z}$ vor. Nun können wir die Menge der Restklassen korrekt als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnen, wir können Restklassen addieren und deren Inverse bilden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} | a \in \mathbb{Z}\} &= \{a + n\mathbb{Z} | a \in \{0, 1, \dots, n-1\}\} \\
\bar{a} &:= a + n\mathbb{Z} \\
\bar{a} + \bar{b} &= \overline{a+b} \\
\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} &= \bar{a} \\
\bar{0} &= \bar{n} \\
\overline{-a} = \overline{0-a} &= \overline{n-a} \\
\bar{a} + \overline{n-a} = \bar{a} + \overline{-a} = \overline{a-a} &= \bar{0}
\end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \bar{0})$ ist eine endliche Gruppe, die sogenannte *zyklische Gruppe der Ordnung n, C_n*. Der Name rührt daher, daß wir bei gegebenem $a \in \{1, \dots, n\}$ auch schreiben können $\bar{a} = \underbrace{\bar{1} + \cdots + \bar{1}}_{a\text{-mal}}$, sich jedes Gruppenelement als gegebenenfalls mehrfache Summe ein und desselben Elements $\bar{1}$ schreiben läßt, und $\underbrace{\bar{1} + \cdots + \bar{1}}_{n\text{-mal}} = \bar{0}$ gilt. $\bar{1}$ ist dann ein sogenanntes zyklisches Element der Ordnung n, und es erzeugt die ganze Gruppe. Die zyklischen Gruppen sind Abelsch und spielen eine zentrale Rolle in der Strukturtheorie Abelscher Gruppen.

Für $n \in \mathbb{N}$ bildet die Menge A_n aller geraden Permutationen einen Normalteiler von S_n. Ist zusätzlich $n \geq 3$, so ist die Nebenklassenzerlegung von S_n nach A_n gegeben durch $\{A_n, S_n \setminus A_n\}$ und der Index von $A_n in S_n$ beträgt $[S_n : A_n] = 2$.

Die in der Definition eines Normalteiles auftretende Abbildung $G \to G$, $a \mapsto a^g := gag^{-1}$ mit $g \in G$ heißt *Konjugation* mit g und ist ein Gruppen-Isomorphismus. Wir werden die Konjugation später bei der Operation von Gruppen auf Mengen genauer studieren.

Zurück zu den Kernen von Gruppenhomomorphismen. Wir sind jetzt in der Lage, folgenden zentralen Satz über Kerne und Normalteiler zu beweisen:

Satz 1.3 *Es seien $(G_1, \cdot, e_1)$ und $(G_2, \cdot, e_2)$ Gruppen und $f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\ker f$ ein Normalteiler in G_1. Ist umgekehrt $N \triangleleft G_1$ ein Normalteiler, dann gibt es eine Gruppe G_2 und einen Gruppenhomomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, dessen Kern genau N ist.*

Beweis: Laut Definition gilt $\ker f = \{a \in G_1 | f(a) = e_2\}$. Für jedes $g \in G_1$ und $a \in \ker f$ gilt nun

$$f(gag^{-1}) = f(g)f(a)f(g)^{-1} = f(g)e_2 f(g)^{-1} = e_2$$

und daher liegt gag^{-1} in $\ker f$, womit der erste Teil des Satzes gezeigt ist.

Für den Beweis des zweiten Teils setzt man $G_2 := G_1/N$ und $f : G_1 \to G_2$ mit $f(g) := gN$. Die Elemente von G_2 sind die Nebenklassen von G_1 nach N, das neutrale Element in G_2 ist N.

Nun haben wir einerseits $N \subseteq \ker f$, denn für $a \in N$, gilt $f(a) = aN \subset N$, weil N selbst Untergruppe ist und die Gruppenoperation nicht aus N herausführt.

Andererseits haben wir auch $\ker f \subseteq N$, weil jedes $g \in \ker f$ laut Definition des Kerns $gN = f(g) = e_2 = N$ erfüllt. Daraus folgt $\forall n \in N : gn \in N$ und Multiplikation von rechts mit n^{-1} liefert $gnn^{-1} = ge_1 = g \in Nn^{-1} \subseteq N$, weil N selbst Untergruppe ist. Damit ist der Satz bewiesen.□

Normalteiler entsprechen also genau den Kernen von Gruppenhomomorphismen. Man kann mit Hilfe der Normalteiler auch sämtliche Bilder einer Gruppe unter einem Gruppen-Homomorphismus bis auf Isomorphie klassifizieren. Das drückt der folgende Homomorphiesatz aus.

Satz 1.4 *Es seien $(G_1, \cdot, e_1)$ und $(G_2, \cdot, e_2)$ Gruppen. Weiter seien $f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ ein Gruppenhomomorphismus und $\pi : G_1 \to G_1/\ker f$ die kanonische Projektion. Dann ist das Bild von G_1 unter f isomorph zu $G_1/\ker f$ und es gibt genau einen Isomorphismus $\tilde{f} : G_1/\ker f \to f(G_1)$ mit $f = \tilde{f} \circ \pi$.*

Beweis: Man zeigt zunächst die Wohldefiniertheit von $\tilde{f}$. Es bezeichne $N := \ker f$ den Kern von f, das ist ein Normalteiler in G_1. Es seien $g, h \in G_1$ mit $gN = hN$. Dann gilt $h^{-1}g \in N$ und somit

$$f(h^{-1}g) = f(h^{-1})f(g) = f(h)^{-1}f(g) \in f(N) = \{e_2\},$$

also $f(h)^{-1}f(g) = e_2$ und $f(g) = f(h)$. Setze nun $\tilde{f}(gN) := f(g)$. $\tilde{f}$ ist eine wohldefinierte Abbildung. Direktes Nachrechnen zeigt, $\tilde{f}$ ist ein Gruppen-Homomorphismus. Wegen

$$f(g) = \tilde{f}(gN) = \tilde{f}(\pi(g)) = (\tilde{f} \circ \pi)(g)$$

ist auch $f = \tilde{f} \circ \pi$ erfüllt. Ebenfalls wurde mit den bisherigen Schritten bereits die Eindeutigkeit von $\tilde{f}$ gezeigt. Offensichtlich ist $\tilde{f}$ surjektiv auf das Bild von f. Zum Beweis der Injektivität betrachten wir den Kern von $\tilde{f}$.

$$\begin{gathered} gN \in \ker \tilde{f} \Leftrightarrow \tilde{f}(gN) = e_2 \Leftrightarrow \\ f(g) = e_2 \Leftrightarrow g \in \ker f \Leftrightarrow \\ g \in N \Rightarrow gN = N. \end{gathered}$$

Also ist der Kern von $\tilde{f}$ gleich $\{N\}$ und besteht nur aus dem neutralen Element von G_1/N, was zu zeigen war. Somit ist $\tilde{f}$ ein Isomorphismus.□

Kapitel 2

Operieren von Gruppen

2.1 Grundlegende Definitionen

In diesen Abschnitt untersuchen wir ein gewisses Zusammenspiel von Gruppen und anderen Objekten. Beispielsweise hatten wir Drehungen als Elemente von Drehgruppen, und Punkte als Elemente eine affinen Raumes, die durch die Drehungen bewegt werden.

Definition 2.1 *Es seien* $(G, \cdot, e)$ *eine Gruppe und* X *eine nichtleere Menge. Weiter sei* $. : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g.x$ *eine Abbildung. Das Tripel* $(G, X, .)$ *heißt eine* (Links-)Operation *oder* (Links-)Aktion *von* G *auf* X*, falls die Gruppenoperationen mit der Operationsabbildung* $.$ *verträglich sind,* $\forall a, b \in G \forall x \in X : a.(b.x) = (ab).x$ *und* $\forall x \in X : e.x = x$.

Ist aus dem Zusammenhang klar, welche Operation gemeint ist, so werden wir anstatt $a.x$ auch kurz ax schreiben. Auch bezeichnet man oft $.$ selbst als Operation der Gruppe auf der Menge.

Jede Gruppe $(G, \cdot, e)$ operiert auf sich selbst, indem man als Operationsabbildung $.$ die Gruppenoperation $\cdot$ nimmt. Für eine Gruppe G und ein Element $g \in G$ gibt es die Linkstranslation $\lambda_g : G \to G$, $\lambda(g)(a) = ga$. Das ist eine bijektive Selbstabbildung, daher liegt λ_g in $S(G)$. Die Abbildung $\lambda : G \to S(G)$, $g \mapsto \lambda_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus und trat bereits im Darstellungssatz von Cayley auf.

Allgemein liefert jede Operation $(G, X, .)$ einen Gruppenhomomorphismus $G \to S(X)$, $g \mapsto (x \mapsto g.x)$ und umgekehrt jeder Gruppenhomomorphismus $G \to S(X)$ eine Operation. Seinen Kern nennt man auch den *Kern der Operation.*

Ist der Kern der Operation trivial, so heißt die zugehörige Operation *effektiv* oder auch *treu.* Das ist genau dann der Fall, wenn $\forall a, b \in M$ gilt

$$\forall x \in X : ax = bx \Rightarrow a = b.$$

Liegen mit $(G, X, .)$ eine Operation und mit $Y \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge von X vor und wird diese bei der Operation in sich selbst abgebildet, gilt also $G.Y \subseteq Y$, so heißt Y *invariant* unter der Operation von G. Durch Einschränkung erhält man dann eine Operation von G auf Y. Analog erhält man für eine Untergruppe $H \leq G$ durch Einschränken eine Operation $(H, X, .)$.

Bei Normalteilern kann man etwas weiter gehen:

Lemma 2.1 *Es seien* $(G, X, .)$ *eine Operation,* $\phi : G \to S(X)$ *der zugehörige Gruppenhomomorphismus,* $N \trianglelefteq G$ *ein Normalteiler von* G*, der zusätzlich im Kern der Operation liegt,* $N \subseteq \ker \phi$*. Dann wird eine Operation* $(G/N, X, .)$ *induziert, die* $gN.x = g.x$ *leistet.*

Zum Beweis wende man die Homomorphiesätze an.

Insbesondere induziert jede Operation $(G, X, .)$ eine effektive Operation $(G/\ker\phi, X, .)$.

2.2 Bahnen

Gewisse Teilmengen von X sind minimal invariant:

Definition 2.2 *Es sei $(G, X, .)$ eine Operation. Dann nennt man für jedes $x \in X$ die Menge $Gx := \{g.x | g \in G\}$ die* Bahn *oder den* Orbit *von x unter G. Die Menge aller Bahnen in X wird mit X/G bezeichnet. Jede Abbildung $X/G \to X$, die jeder Bahn Gx einen ihrer Repräsentanten x zuordnet, heißt eine* Transversale. *Das (vollständige) Bild einer Transversalen nennt man einen* Fundamentalbereich *bezüglich der Operation von G auf X.*

Ein Fundamentalbereich bildet ein vollständiges Repräsentantensystem für die Menge der Bahnen. Wenn man explizit hervorheben möchte, daß eine Links-Operation vorliegt, so schreibt man anstatt X/G auch $G \setminus X$ - die operierende Gruppe steht dann auch links.

Eine invariante Menge $Y \subseteq X$ muß für jeden Punkt $y \in Y$ auch die Bahn Gy umfassen.

Für das Anfangswertproblem einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{gathered} y' = Ay, \quad y(0) = y_0 \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad y_0 \in \mathbb{R}^n \end{gathered}$$

ist die Lösung durch $y(t) = e^{tA}y_0$ gegeben. Die Abbildung $\mathrm{Fl} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t, y0) \mapsto e^{tA}y_0$ ist eine Operation der Gruppe $(\mathbb{R}, +, 0)$ auf der Menge $\mathbb{R}^n$ und heißt Fluß des zur Differentialgleichung gehörenden Vektorfeldes (Richtungsfeldes). Der Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to S(\mathbb{R})$ leistet $t \mapsto \mathrm{Fl}_t := (y_0 \mapsto y(t))$. Die Verträglichkeit der Operation mit der Gruppenoperation (der Addition) lautet hier $\mathrm{Fl}_t \circ \mathrm{Fl}_s = \mathrm{Fl}_{t+s}$ und $\mathrm{Fl}_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Es liegt ein kontinuierliches Dynamisches System vor. Die Bahnen der Operation sind genau die Orbits der Differentialgleichung. Sie sind unter dem Fluß invariant. Die Menge der Bahnen entspricht in etwa dem Phasenportrait der Lösungen der Differentialgleichung (die Topologie, die Lage der Bahnen zueinander haben wir nicht berücksichtigt). Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen lehrt, wie die Bahnen durch die Jordan-Blöcke und invarianten Unterräume der Matrix A klassifiziert werden können. Den gruppentheoretischen Zusammenhang von Jordan-Normalform und Klassifikation der Bahnen werden wir in Kürze kennenlernen.

2.3 Stabilisatorgruppe

Wir entfernen uns nun inhaltlich etwas von der Menge X und ihren Teilmengen und wenden uns mehr der auf X operierenden Gruppe G zu. Über X hatten wir so gut wie gar nichts vorausgesetzt, keinerlei algebraische Struktur, keine Topologie. Hingegen haben wir auf G die algebraische Struktur einer Gruppe, die wir etwas mehr ausnützen wollen. Es ist nun durchaus eine interessante Frage, wie Untergruppen von G mit der Operation zusammenhängen.

Definition 2.3 *Es seien $(G, X, .)$ eine Operation und $x \in X$. Dann nennt man $G_x := \{g \in G | gx = x\}$ den* Einpunkt-Stabilisator *von x, oder auch* Isotropiegruppe, Standgruppe *von x.*

Für jedes $x \in X$ ist der Einpunkt-Stabilisator G_x eine Untergruppe von G. Die Menge $\{x\}$ ist genau dann invariant, wenn $G_x = G$; in diesem Fall nennt man x einen *Fixpunkt* der Operation. Die Bahn eines Fixpunkts besteht nur aus einem Element. Die Menge aller Fixpunkte bezeichnen wir mit $\mathrm{Fix}_G(X) := \{x \in X | Gx = \{x\}\}$.

Den Kern einer Operation erhält man, indem man den Durchschnitt aller Stabilisatorgruppen bildet. Insbesondere ist der Kern der Operation ein Normalteiler jedes Einpunkt-Stabilisators.

Als Beispiel betrachten wir die Gruppe $SO(2)$ der Drehungen um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$. Drehungen um den Ursprung sind bijektive lineare Abbildungen, und lassen sich mit Hilfe von Drehmatrizen beschreiben. Die $SO(2)$ ist eine Untergruppe der $GL(2,\mathbb{R})$. Jede Drehung läßt den Ursprung $(0,0)$ fest, also ist $(0,0)$ ein Fixpunkt, seine Stabilisatorgruppe ist die ganze Drehgruppe, $SO(2)_{(0,0)} = SO(2)$. Jeder andere Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wird durch Drehungen auf einer Kreisbahn um den Ursprung bewegt, seine Bahn ist der Kreis $SO(2)(x_0, y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 || (x,y)| = |(x_0,y_0)|\}$, und die Stabilisatorgruppe besteht bloß aus der identischen Abbildung, $SO(2)_{(x_0,y_0)} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\}$, einer Drehung mit Drehwinkel Null. Somit besteht der Kern der Operation als Durchschnitt aller Einpunkt-Stabilisatoren nur aus dem neutralen Element der Gruppe, die Operation ist effektiv. Die Menge $\mathbb{R}^2/SO(2)$ aller Bahnen besteht aus dem Ursprung und konzentrischen Kreisen mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Jeder Bahn kann man ihren Schnittpunkt mit der nichtnegativen x-Achse, das ist der Punkt mit den Koordinaten $(\text{Kreisradius}, 0)$, als Repräsentant zuordnen. Das liefert eine Transversale, und die nichtnegative x-Achse ist ein Fundamentalbereich.

2.4 Konjugation

Für die weitere Untersuchung greifen wir auf die Konjugation zurück, auf die wir bereits bei der Vorstellung von Normalteilern gestoßen sind. Sie wird sich als das Bindeglied zwischen Stabilisatorgruppen und Bahnpunkten erweisen. Wir beginnen mit ihrer Definition.

Definition 2.4 *Es sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Dann induziert jedes Element $g \in G$ eine Abbildung $.^g : G \to G$, $a \mapsto a^g := gag^{-1}$. Diese nennt man die* Konjugation *mit g.*

Die Konjugation ist ein Isomorphismus, denn für $a, b, g \in G$ gilt

$$a^g b^g = gag^{-1}gbg^{-1} = gabg^{-1} = (ab)^g,$$
$$e^g = geg^{-1} = gg^{-1} = e$$

und für $a, g, h \in G$ gilt

$$(a^g)^h = (gag^{-1})^h = hgag^{-1}h^{-1} = (hg)a(hg)^{-1} = a^{(hg)}$$
$$(a^g)^{(g^{-1})} = a^{(g^{-1}g)} = a^e = eae^{-1} = eae = a$$
$$(.^{g^{-1}}) \circ (.^g) = \mathrm{id}_G$$

analog umgekehrt. Mit $. : G \times G \to G$, $g.a := a^g$ ist eine Operation der Gruppe G auf sich selbst definiert. Man sagt, G operiert auf sich durch Konjugation.

Wir betrachten ein Beispiel. Es seien $V = \mathbb{R}^n$ als endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $G = \mathrm{GL}(V)$. G operiere auf sich durch Konjugation. Für zwei Abbildungen $f, g \in \mathrm{GL}(V)$ bedeutet Konjugation nichts anderes als $f^g = g \circ f \circ g^{-1}$. Wir benutzen die kanonische Basis

E von V und nennen die Koordinatisierungsabbildung für Vektoren $\Phi_E : V \to \mathbb{R}^n$ und jene für Abbildungen Φ_{EE}. Mit Hilfe von Φ_{EE} wird jede Abbildung $f \in G$ mit einer invertierbaren Matrix $\Phi_{EE}(f) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ihrer Koordinatenmatrix bezüglich der kanonischen Basis, identifiziert, und umgekehrt stammt jede invertierbare Matrix von einer Abbildung $f \in G$. Bei einem Basiswechsel zur Basis C wird die Koordinatenmatrix $\Phi_{EE}(f)$ in die Koordinatenmatrix $\Phi_{CC}(f)$ transformiert. Das geschieht mit den Transformationsmatrizen T_{EC} und $T_{CE} = T_{EC}^{-1}$. Die Reihenfolge der Basen in der Notation ist von-nach. Dieser Transformationsvorgang lautet explizit

$$\Phi_{CC}(f) = T_{EC} \cdot \Phi_{EE}(f) \cdot T_{CE} = T_{EC} \cdot \Phi_{EE}(f) \cdot T_{EC}^{-1},$$

und entspricht gerade der Konjugation. Auch T_{EC} ist ja eine invertierbare Matrix und läßt sich als ein $\Phi_{EE}(g)$ auffassen. $\Phi_{CC}(f)$ ist dann $\Phi_{EE}(f^g)$. Die Bahnen der Operation durch Konjugation bestehen aus allen invertierbaren Matrizen (bzw. Abbildungen) mit gleicher reeller Jordan-Normalform. Die Zuordnung der reellen Jordan-Normalform liefert eine Transversale, die invertierbaren Matrizen in Jordan-Normalform bilden einen Fundamentalbereich.

Für das Studium von Bahnen mit Hilfe der Einpunkt-Stabilisatoren beobachtet man zunächst, daß die Stabilisatorgruppen der Punkte einer Bahn auseinander durch Konjugation hervorgehen. Genauer beschreibt diesen Sachverhalt das folgende

Lemma 2.2 *Es seien $(G, X, .)$ eine Operation, $g \in G$ und $x \in X$. Dann gilt $G_{g.x} = g\, G_x\, g^{-1} = (G_x)^g$.*

Beweis: Es sei $h \in G$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} h.(g.x) &= g.x \\ \Leftrightarrow g^{-1}.(h.(g.x)) &= g^{-1}.(g.x) \\ \Leftrightarrow (g^{-1}hg).x &= x. \end{aligned}$$

Damit zeigen wir die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} h \in G_{g.x} &\Leftrightarrow h^{(g^{-1})} \in G_x \\ \Leftrightarrow (h^{(g^{-1})})^g &\in (G_x)^g \Leftrightarrow h \in (G_x)^g \end{aligned}$$

und das ist gerade die Aussage des Lemmas.□.

Will man Operationen mit Hilfe von Einpunkt-Stabilisatoren (die ja Untergruppen sind) studieren, so reicht es aus, dies bis auf zueinander konjugierte Untergruppen zu tun. Das ist eine wesentliche Vereinfachung für die Klassifikation von Operationen. Als nächstes verbinden wir Nebenklassen von Einpunkt-Stabilisatoren mit Bahnpunkten und bekommen damit auch eine Aussage über die Kardinalität eines Orbits - durch rein gruppentheoretische Methoden.

Satz 2.1 *Es seien $(G, X, .)$ eine Operation und $x \in X$. Die Fasern der surjektiven Abbildung $G \to Gx$, $g \mapsto g.x$ sind genau die Linksnebenklassen des Einpunkt-Stabilisators G_x von x. Insbesondere ist $|Gx| = [G : G_x]$.*

Beweis: Es seien $g, h \in G$. Diese liegen genau dann in derselben Faser, wenn $g.x = h.x$ bzw. $h^{-1}g.x = x$ also $h^{-1}g \in G_x$, was $gG_x = hG_x$ bedeutet, und der erste Teil des Satzes ist gezeigt. Der Satz von Lagrange liefert sofort die Kardinalitätsaussage. Damit ist der ganze Satz bewiesen.□