

Spinoren in der relativistischen Physik (Teil1)

1	Spinorbasen und Spinoren	2
2	Ko- und kontravariante Spinoren	3
3	Zweistufige symmetrische und schiefsymmetrische Spinortensoren	4
4	Spinoren im vierdimensionalen komplexen euklidischen Raum	5
5	Spinoren im vierdimensionalen pseudoeuklidischen Raum vom Index 1	6
6	Spinorfelder	9
7	Zur Diracschen Wellengleichung	10
8	Zur relativistischen Quantenmechanik	11
9	Weiterführende Betrachtungen	18

Spinoren in der relativistischen Physik

Neben den Tensoren haben auch die Spinoren (die wie die Tensoren zu den zentroeuklidischen geometrischen Objekten gehören) eine große Bedeutung in der theoretischen Physik. Die grundlegenden Sachverhalte hierzu sollen im folgenden Beitrag zusammengefasst werden, wobei vor allem auf Anwendungen in der Physik Bezug genommen wird. Für das weitergehende mathematische Verständnis der relativistischen Quantentheorie ist die Spinorrechnung wichtig. Hier spielen Spinoren und Spinorfelder (bzw. auch Spinortensoren und Spinortensorfelder) im vierdimensionalen pseudo-euklidischen Raum vom Index 1 eine Rolle. Wir wollen Spinoren in den folgenden Räumen betrachten:

Im komplexen vierdimensionalen affinen Raum: A_4^+

Im komplexen vierdimensionalen euklidischen Raum: R_4^+ und

im komplexen vierdimensionalen pseudo-euklidischen Raum vom Index 1 $R_4^{(1)}$

Weiterhin sei A_2 ein reeller zweidimensionaler affiner Raum.

1 Spinorbasen und Spinoren

Im A_4^+ wird ein Ursprung $\mathbf{0}$ fest vorgegeben. Durch diesen Punkt geht ein Paar zweidimensionaler Ebenen, die wir mit A_2 und \hat{A}_2 bezeichnen. Nun wählen wir ein **affines 4-Bein**, das seinen Ursprung ebenfalls in $\mathbf{0}$ hat.

Die Vektoren \mathbf{b}_1 und \mathbf{b}_2 des 4-Beins sollen hierbei zu der Ebene A_2 und die Vektoren \mathbf{b}_1 und \mathbf{b}_2 sollen zur Ebene \hat{A}_2 gehören. Die Ebenen haben keine Richtung gemeinsam. Unser 4-Bein lässt sich damit wie folgt aufschreiben: $\mathfrak{R}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$.

Wir betrachten nun eine Transformation dieses 4-Beins, wobei wir **komplexe Transformationsmatrizen** U_μ^λ bzw. $U_{\hat{\mu}}^{\hat{\lambda}}$ verwenden. Wir betrachten hierzu die **Gruppe der unimodularen Transformationen**. Die Determinante der Transformationsmatrizen ist dann gleich eins. Bis auf diese Einschränkung können beliebige komplexe Zahlen in den Transformationsmatrizen stehen. Da wir die Basisvektoren „aufteilen“, bekommen wir 2 Transformationsgesetze:

$$\tilde{\mathbf{b}}_\mu = U_\mu^\lambda \mathbf{b}_\lambda \quad \tilde{\mathbf{b}}_{\hat{\mu}} = U_{\hat{\mu}}^{\hat{\lambda}} \mathbf{b}_{\hat{\lambda}} \quad \text{mit } \det |U_\mu^\lambda| = \det |U_{\hat{\mu}}^{\hat{\lambda}}| = 1 \quad (1.1)$$

Über λ bzw. $\hat{\lambda}$ wird hierbei summiert, wobei nur die Indexwerte 1 und 2 bzw. $\hat{1}$ und $\hat{2}$ angenommen werden (dies gilt auch analog in den folgenden Formeln). Das 4-Bein, das sich nach dem Gesetz (1.1) transformiert (unimodulare Transformationen) stellt eine **Spinorbasis** dar. Die neue Spinorbasis lässt sich wie folgt notieren:

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2)$$

Die Vektoren Ψ des Raumes A_4^+ , die wir auf die eine oder andere Spinorbasis beziehen, heißen **Spinoren**:

$$\Psi = (\Psi^\lambda, \Psi^{\hat{\lambda}}) = (\Psi^1, \Psi^2, \Psi^{\hat{1}}, \Psi^{\hat{2}}) \quad (1.2)$$

Wie wir an den Transformationsformeln (1.1) erkennen, bleiben die Basisvektoren nach der Transformation in der jeweiligen Ebene. Wir können jetzt noch zusätzlich diejenigen Fälle betrachten, bei denen die **Basisvektoren die Ebene wechseln**. Dieser Wechsel lässt sich durch folgende Indexvertauschungen darstellen:

$$\mathbf{b}_\lambda \leftrightarrow \mathbf{b}_{\hat{\lambda}} \quad (1.3)$$

und entsprechend für die Spinorkoordinaten:

$$\Psi_\lambda \leftrightarrow \Psi_{\hat{\lambda}} \quad \text{bzw.} \quad \Psi^\lambda \leftrightarrow \Psi^{\hat{\lambda}}$$

Durch Anwendung von (1.3) auf (1.1) ergeben sich die folgenden Transformationen:

$$\tilde{\mathbf{b}}_{\hat{\mu}} = U_{\hat{\mu}}^\lambda \mathbf{b}_\lambda \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{b}}_\mu = U_\mu^{\hat{\lambda}} \mathbf{b}_{\hat{\lambda}} \quad (1.4)$$

Die hierin vorkommenden Transformationsmatrizen sind ebenfalls unimodular. Ähnliche Beziehungen ergeben sich für den Spinor selbst. Die Formeln (1.4) würden sich dann für den Spinor wiederholen. Durch (1.1) und (1.4) werden sogenannte *quasispinorielle Abbildungen* beschrieben. Diese Abbildungen bilden eine Gruppe. Es sollen die quasispinoriellen Abbildungen nach (1.1) als quasispinorielle Abbildungen **erster Art** und die quasispinoriellen Abbildungen nach (1.4) als quasispinorielle Abbildungen **zweiter Art** bezeichnet werden.

2 Ko- und kontravariante Spinoren

Wir erhalten analog den obigen Transformationsgesetzen (1.1) Transformationsgesetze für einen *kovarianten Spinor*, da er sich auf die obige Spinorbasis bezieht (gleiche (unimodulare) Transformationsmatrizen):

$$\tilde{\Psi}_\mu = U_\mu^\lambda \Psi_\lambda \quad \tilde{\Psi}_{\hat{\mu}} = U_{\hat{\mu}}^{\hat{\lambda}} \Psi_{\hat{\lambda}} \quad (2.1)$$

Die *kontravarianten Spinorkoordinaten* transformieren sich mit den kontragredienten (transponiert- inversen) Transformationsmatrizen:

$$\tilde{\Psi}^\mu = \bar{U}_\lambda^\mu \Psi^\lambda \quad \tilde{\Psi}^{\hat{\mu}} = \bar{U}_{\hat{\lambda}}^{\hat{\mu}} \Psi^{\hat{\lambda}} \quad (2.2)$$

Weiterhin gilt natürlich für die Einheitsmatrizen:

$$\delta_\nu^\lambda = \bar{U}_\mu^\lambda U_\nu^\mu \quad \delta_{\hat{\nu}}^{\hat{\lambda}} = \bar{U}_{\hat{\mu}}^{\hat{\lambda}} U_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} \quad (2.3)$$

Formal bestehen also viele Gemeinsamkeiten mit den Tensortransformationsgesetzen. Jetzt haben wir aber eine Aufteilung in jeweils 2 Transformationsgesetze für jede Indexstellung. Außerdem betrachten wir eine spezielle Transformationsgruppe. Die *Umrechnung von ko- in kontravariante Koordinaten und umgekehrt* ist sehr einfach möglich:

$$\Psi_1 = \Psi^2 \quad \Psi_2 = -\Psi^1 \quad \Psi^1 = \Psi^{\hat{2}} \quad \Psi^2 = -\Psi^{\hat{1}} \quad (2.4)$$

Man kann die Richtigkeit der Beziehungen (2.4) anhand der Transformationsgesetze (2.1) und (2.2) leicht nachweisen. Dieses Umrechnungsschema lässt sich auch auf Spinoren höherer Stufe übertragen.

3 Zweistufige symmetrische und schiefsymmetrische Spinortensoren

Bisher haben wir nur eine Art besonderen Vektor (im Komplexen) betrachtet, dessen Koordinaten ko- bzw. kontravariantes Transformationsverhalten besitzen und den wir auf die eine oder andere Spinorbasis beziehen können. Diesen Vektor nannten wir einen ko- bzw. kontravarianten Spinor. Höherstufige Spinoren nennt man auch **Spinortensoren**. Ein zweifach kontravarianter Spinortensor hat im allgemeinen Koordinaten der Form:

$$c^{\lambda\mu}, c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}, c^{\lambda\hat{\mu}}, c^{\hat{\lambda}\mu}$$

Ein *schiefsymmetrischer kontravarianter Spinortensor* hat die folgende Eigenschaften:

$$\boxed{\varepsilon^{\lambda\mu} = -\varepsilon^{\mu\lambda} \quad \varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = -\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\lambda}} \quad \varepsilon^{\lambda\hat{\mu}} = \varepsilon^{\hat{\lambda}\mu} = 0} \quad (3.1)$$

Die Koordinaten mit den gemischten Indizes verschwinden. Man kann zeigen, dass ε^{12} und $\varepsilon^{\hat{1}\hat{2}}$ *Invarianten* sind. Wir wählen nun einen speziellen schiefsymmetrischen Spinortensor, der bezüglich einer beliebigen Spinorbasis folgende Koordinaten hat:

$$\varepsilon_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = -\varepsilon^{\lambda\mu} = -\varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Durch *Überschiebung* mit diesem Spinortensor kann man die Indizes Heben und Senken:

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda} &= \varepsilon_{\lambda\mu} \Psi^{\mu} & \Psi_{\hat{\lambda}} &= \varepsilon_{\hat{\lambda}\hat{\mu}} \Psi^{\hat{\mu}} \\ \Psi^{\lambda} &= \varepsilon^{\lambda\mu} \Psi_{\mu} & \Psi^{\hat{\lambda}} &= \varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} \Psi_{\hat{\mu}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Mit (3.3) kommt man unter Verwendung von (3.2) wieder auf (2.4). Wir betrachten nun einen **2-fach kontravarianten symmetrischen Spinortensor**. Er hat die folgenden Eigenschaften:

$$\boxed{c^{\lambda\mu} = c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = 0 \quad c^{\lambda\hat{\mu}} = c^{\hat{\lambda}\mu}} \quad (3.4)$$

Bei *Transformation dieses Spinortensors* haben wir zu beachten, dass wir die kontragredienten Transformationsmatrizen nehmen (wegen den kontravarianten Indizes). Weiterhin haben wir zu beachten, dass wir zum einen diejenige Matrix benötigen, welche die Transformation in der Ebene A_2 vermittelt und zum anderen jene, welche die Transformation in der Ebene \hat{A}_2 vermittelt. Es ergibt sich damit das folgende Transformationsgesetz:

$$\boxed{\tilde{c}^{\lambda\hat{\mu}} = \bar{U}_a^{\lambda} \bar{U}_{\hat{\beta}}^{\hat{\mu}} c^{\alpha\beta}} \quad (3.5)$$

Wenn man von (3.5) die Determinante bildet und die Unimodularität der Transformationsmatrizen beachtet, so ergibt sich:

$$I = \det|\tilde{c}^{\lambda\hat{\mu}}| = \det|c^{\lambda\hat{\mu}}| = c^{1\hat{1}}c^{2\hat{2}} - c^{1\hat{2}}c^{2\hat{1}}$$

Die Determinante des Spinortensors (3.5) ist also eine Invariante I.

4 Spinoren im vierdimensionalen komplexen euklidischen Raum

Bisher betrachteten wir Spinoren im vierdimensionalen komplexen affinen Raum. Vom **euklidischen Raum** wissen wir, dass wir ihn mit der Einführung einer Metrik und damit auch eines Linienelementes gewinnen. Weiterhin ist bekannt, dass jenes Linienelement eine Invariante darstellt. Eine ähnliche **Invariante** können wir nun auch **mit komplexen Zahlen** (komplexe Koordinaten $x^1 \dots x^4$) bilden:

$$I = -((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2) \quad (4.1)$$

Natürlich ist auch $-I$ eine Invariante. Im vorhergehenden Abschnitt stellten wir fest, dass die Determinante des Spinortensors $c^{\lambda\hat{\mu}}$ ebenfalls eine Invariante darstellt. Es stellt sich die Frage: *Wie können wir einen Spinortensor $c^{\lambda\hat{\mu}}$ mit komplexen Zahlen $x^1 \dots x^4$ so aufbauen, dass seine Determinante die Invariante (4.1) ergibt?*

Wie man einfach nachrechnet, ergibt sich z.B. die folgende Möglichkeit:

$$\begin{pmatrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + ix^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + ix^4 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Umgekehrt ergeben sich $x^1 \dots x^4$ aus den Koordinaten des kontravarianten gemischten 2-stufigen Spinortensors $c^{\lambda\hat{\mu}}$. Aus (4.2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{2}(c^{1\hat{2}} + c^{2\hat{1}}) & x^2 &= \frac{1}{2i}(c^{1\hat{2}} - c^{2\hat{1}}) \\ x^3 &= \frac{1}{2}(c^{1\hat{1}} - c^{2\hat{2}}) & x^4 &= \frac{1}{2i}(c^{1\hat{1}} + c^{2\hat{2}}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Wir stellen uns jetzt die Frage, wie sich die komplexen Zahlen $x^1 \dots x^4$ transformieren. Zunächst ermitteln wir (mit diesen Zahlen) nach (4.2) den Spinortensor gegenüber einer Spinorbasis \mathfrak{R} . Anschließend transformieren wir diesen Spinortensor nach dem Gesetz (3.5) (Spinortensorkoordinaten in Bezug auf die Spinorbasis $\tilde{\mathfrak{R}}$). Mit den neuen Koordinaten des Spinortensors gehen wir in die Beziehungen (4.3) und erhalten jetzt die transformierten x^i . Wegen der Invarianzeigenschaft (4.1) ergibt sich, dass dabei die x^i eine **komplexe orthonormierte Transformation** erfahren. Man spricht hier von einer **Quasidrehung** im R_4^+ . Die quasispinoriellen Transformationen im A_4^+ bestimmen also Quasidrehungen im R_4^+ . Wenn man die Transformationsmatrizen mit -1 multipliziert, erhält man eine **zweite**

quasispinorielle Transformation. Zu dieser Transformation ergibt sich aber die gleiche Quasidrehung. Da wir bei der Transformation die quasispinorielle Abbildung (1.1) zugrunde legen, erhalten wir die **eigentlichen Quasidrehungen**. (Wir gehen im nächsten Abschnitt etwas genauer darauf ein.)

Zusammenfassend stellt man fest: Die quasispinorielle Gruppe im A_4^+ ist einer Gruppe isomorph, welche die Gruppe der eigentlichen Quasidrehungen im R_4^+ zweifach überdeckt.

Wir können nun die Gruppe der **quasispinoriellen Abbildungen erweitern**, indem wir diejenigen Fälle hinzunehmen, bei denen die Basisvektoren die Ebene wechseln. Dies haben wir oben schon betrachtet (Beziehungen 1.3 und 1.4). Die zugehörige Transformation des symmetrischen Spinortensors ist:

$$\tilde{c}^{\lambda\hat{\mu}} = c^{\hat{\lambda}\mu} = c^{\mu\hat{\lambda}} \quad (4.4)$$

Bei Hinzunahme dieser Transformationen, werden nicht nur die eigentlichen, sondern auch alle **uneigentlichen Quasidrehungen** im R_4^+ erzeugt.

Nach Anwendung von (4.4) auf (4.3) ergibt sich jetzt für die x^i :

$$\tilde{x}^1 = x^1 \quad \tilde{x}^2 = -x^2 \quad \tilde{x}^3 = x^3 \quad \tilde{x}^4 = x^4 \quad (4.5)$$

Die quasispinoriellen Abbildungen zweiter Art erzeugen also im R_4^+ eine **Spiegelung jedes 4-Beins** in Richtung der x_2 Achse. Wendet man diese Spiegelung auf alle möglichen eigentlichen Quasidrehungen im R_4^+ an, so erhält man **alle Quasidrehungen** im R_4^+ .

Aus den Beziehungen (4.3) lässt sich noch etwas Interessantes unmittelbar erkennen: Einen einstufigen Tensor können wir auf einen 2-stufigen Spinortensor zurückführen. In analoger Weise kann ein beliebiger m -stufiger Tensor $V^{i_1 \dots i_m}$ im R_4^+ auf einen **$2m$ -stufigen Spinortensor** $c^{\lambda_1 \hat{\mu}_1 \dots \lambda_m \hat{\mu}_m}$ (der bezüglich jedes Indexpaares symmetrisch ist) zurückgeführt werden. Wegen der Symmetrie von (4.2) erhält man:

$$\begin{pmatrix} c^{\hat{1}1} & c^{\hat{1}2} \\ c^{\hat{2}1} & c^{\hat{2}2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + ix^4 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 + ix^4 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

5 Spinoren im vierdimensionalen pseudo-euklidischen Raum vom Index 1

Spinoren in diesem Raum haben für die relativistische Quantentheorie eine große Bedeutung. Wir wählen einen $R_4^{(1)}$ aus dem R_4^+ aus. Hierzu gehen wir wie folgt vor: Im R_4^+ haben wir 4-Beine der Form $V_1 = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$. Wir wählen jetzt ein neues 4-Bein, indem wir $\mathbf{b}_0 = i\mathbf{b}_4$ setzen. Wir haben damit einen imaginären Einheitsvektor \mathbf{b}_0 , einen **Einheitsvektor mit einer imaginären Länge**. Das neue 4-Bein lässt sich jetzt wie folgt aufschreiben: $V_2 = \{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Die Koordinaten bezüglich dieses 4-Beins sind reell. Wir bezeichnen sie mit: $x^0 \dots x^3$. Die Koordinaten bezüglich des 4-Beins V_1 werden mit $x^1 \dots x^4$ bezeichnet. Es bestehen die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= i\mathbf{b}_4 \\ x^4 &= ix^0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

x^4 ist eine **imaginäre Koordinate**. Wenn wir in (5.1) die zweite Gleichung mit \mathbf{b}_0 multiplizieren, bekommen wir : $x^4\mathbf{b}_4 = x^0\mathbf{b}_0$, also eine Komponentengleichheit. Wegen $g_{00} = \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = -1$ und $x_0 = g_{00}x^0$ folgt:

$$x_0 = -x^0 \tag{5.2}$$

Die 4- Beine der Form V_1 die durch (5.1) eineindeutig mit den 4-Beinen V_2 verknüpft sind, heißen **angegliederte Vierbeine** V_{12} . Der Spinortensor (4.2) geht jetzt wegen (5.1) in den folgenden Spinortensor über:

$$\begin{pmatrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - x^0 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 - x^0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

In der kovarianten Formulierung erhalten wir wegen (5.2)

$$\begin{pmatrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + x_0 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 + x_0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Die Matrizen (5.3) und (5.4) sind **hermitesch** (Wenn die Matrix transponiert wird, gehen ihre Elemente in die konjugiert komplexen Elemente über). Dies kann man wie folgt ausdrücken:

$$c^{\lambda\hat{\mu}} = (c^{\mu\hat{\lambda}})^* \tag{5.5}$$

Nach einer Transformation dieses Spinortensors soll jener **hermitesch bleiben** (damit bleibt auch $x^1 x^2 x^3$ reell und x^4 imaginär). Dies ist dann gewährleistet wenn:

$$U_{\hat{\beta}}^{\hat{\mu}} = \pm (U_{\beta}^{\mu})^* \tag{5.6}$$

Wir zeigen dies anhand des Transformationsgesetzes für den Spinortensor:

$$\tilde{c}^{\lambda\hat{\mu}} = (\bar{U}_{\alpha}^{\lambda})^* (\bar{U}_{\hat{\beta}}^{\hat{\mu}})^* (c^{\alpha\hat{\beta}})^* = \bar{U}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\lambda}} \bar{U}_{\beta}^{\mu} c^{\beta\hat{\alpha}}$$

Analog erhalten wir in Bezug auf die quasispinoriellen Abbildungen 2. Art (Siehe Beziehung (1.3))

$$U_{\hat{\beta}}^{\mu} = \pm (U_{\beta}^{\hat{\mu}})^* \tag{5.7}$$

Mit (5.6) erhält man eigentliche (positives Vorzeichen) oder uneigentliche Quasidrehungen dritter Art (negatives Vorzeichen) im $R_4^{(1)}$. Mit (5.7) erhält man eine Spiegelung. Hierzu sei folgendes bemerkt: Die **Koordinatentransformation** der x^i lässt sich in der folgenden Form aufschreiben:

$$\tilde{x}^i = \bar{A}_k^i x^k \quad i, k = 0 \dots 3 \quad (5.8)$$

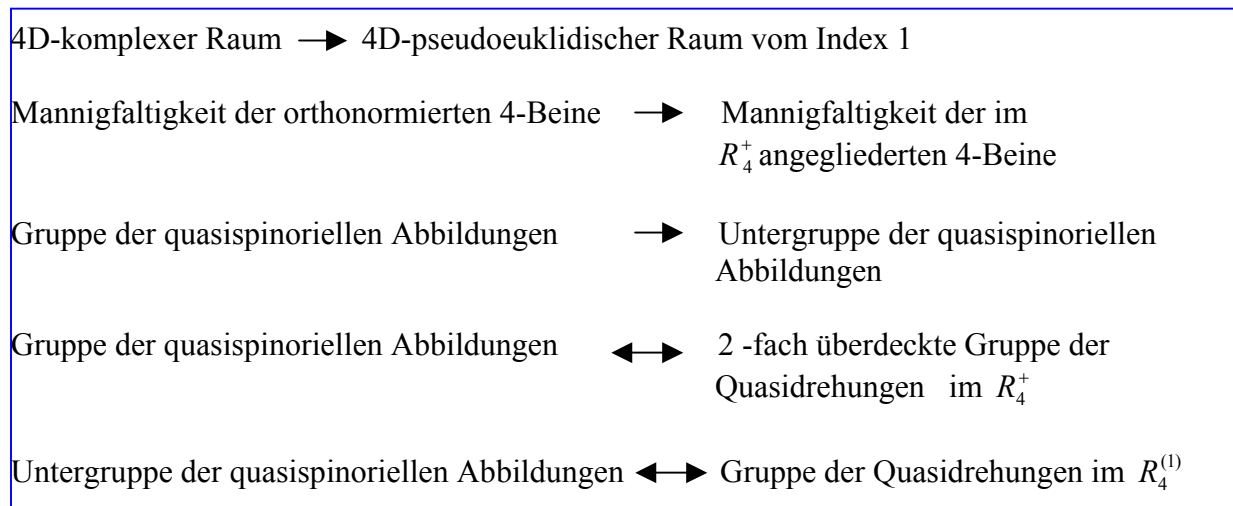
Nach der Determinante der hierin vorkommenden Transformationsmatrix richtet sich die Einteilung in **eigentliche und uneigentliche Bewegungen**. Es werden die folgenden Unterscheidungen vorgenommen:

- a) $A_0^0 > 0 \quad \det |A_l^m| > 0$ Eigentliche Bewegung
 - b) $A_0^0 > 0 \quad \det |A_l^m| < 0$ Uneigentliche Bewegung 1. Art
 - c) $A_0^0 < 0 \quad \det |A_l^m| > 0$ Uneigentliche Bewegung 2. Art
 - d) $A_0^0 < 0 \quad \det |A_l^m| < 0$ Uneigentliche Bewegung 3. Art
- $l, m = 1, 2, 3 \quad i, k = 0, 1, 2, 3$
 $\det |A_i^k| = 1$ für a) und d) $\det |A_i^k| = -1$ für b) und c)

Die uneigentlichen Bewegungen lassen sich durch **Orientierungsänderungen der reellen Einheitsvektoren** oder /und des imaginären Einheitsvektors erklären.

Wir stellen die Zusammenhänge schematisch dar:

Hierin soll der Pfeil „Auswahl“ und der Doppelpfeil „isomorphe Abbildung“ bedeuten.



Ein **vollständig kovarianter gemischter Spinortensor** transformiert sich mit den entsprechenden unimodularen Transformationsmatrizen, wobei wir wieder beachten müssen, dass die Transformationsmatrizen für beide Ebenen (siehe oben) verwendet werden:

$$\tilde{c}_{\lambda\hat{\mu}} = U_\lambda^\alpha U_{\hat{\mu}}^{\hat{\beta}} c_{\alpha\hat{\beta}} \quad (5.9)$$

Nach dem invarianten Schema (2.4) können die Indizes gesenkt werden:

$$c_{1\hat{1}} = c^{2\hat{2}} \quad c_{2\hat{2}} = c^{1\hat{1}} \quad c_{1\hat{2}} = -c^{2\hat{1}} \quad c_{2\hat{1}} = -c^{1\hat{2}} \quad (5.10)$$

Zur Spinoralgebra sei noch folgendes ergänzt: Die Addition von Spinoren kann nur bei genauer Übereinstimmung der Indexbilder erfolgen. Eine **Verjüngung** und eine **Überschiebung** erfolgt nur über 2 Indizes mit oder über 2 Indizes ohne Dach (siehe Formel (3.3)).

6 Spinorfelder

Nachdem wir grundsätzliche Sachverhalte der Spinoralgebra in verschiedenen vierdimensionalen Räumen zusammengefasst haben, gehen wir nun zur Spinoranalysis im $R_4^{(1)}$ über. In jedem Punkt dieses Raumes sei nun ein Spinor gegeben. Also gilt:

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda} &= \Psi_{\lambda}(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ \Psi_{\hat{\lambda}} &= \Psi_{\hat{\lambda}}(x^0, x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Wir erhalten damit ein kovariantes Spinorfeld. Analog stellt sich das entsprechende kontravariante Spinorfeld dar.

Wir führen die **Differentialoperatoren** $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $i = 0, 1, 2, 3$ ein. Diese Operatoren transformieren sich (wie man durch Anwendung der Kettenregel leicht ersieht) wie die kovarianten Koordinaten eines Tensors erster Stufe. Wir können deshalb die kovarianten Koordinaten des Vektors \mathbf{x} im Spinortensor (5.4) durch entsprechende Differentialoperatoren ersetzen und erhalten damit den folgenden **Operator-Spinortensor**:

$$\begin{pmatrix} D^{1\hat{1}} & D^{1\hat{2}} \\ D^{2\hat{1}} & D^{2\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_3 + \partial_0 & \partial_1 + i\partial_2 \\ \partial_1 - i\partial_2 & -\partial_3 + \partial_0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Es gilt: $D^{\lambda\mu} = D^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = 0$ $D^{\lambda\hat{\mu}} = D^{\hat{\lambda}\mu}$ (Symmetriebedingung)

Wegen dieser Symmetriebedingung brauchen also nur die gemischten Indizes des Operator-Spinortensors (6.2) berücksichtigt zu werden. Mit Hilfe von (6.2) kann man **invariante differentielle Abhängigkeiten zwischen Spinorfeldern** aufstellen. Durch Überschiebung dieses Operator-Spinortensors mit dem Spinorfeld entsteht ein neues Spinorfeld:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{\lambda} &= D^{\lambda\hat{\mu}} \Psi_{\hat{\mu}} \\ \tilde{\Psi}_{\hat{\lambda}} &= D^{\hat{\lambda}\mu} \Psi_{\mu} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Diese Beziehungen sind invariant (dies folgt aus ihrer tensoriellen Struktur). Es sei noch erwähnt, dass im allgemeinen über die Indizes $1, 2, \hat{1}, \hat{2}$ in beiden Beziehungen zu summieren ist. Wegen der Symmetrieeigenschaft (siehe oben) fallen jedoch die Summanden

mit gleicher Indexstruktur (beide Indizes im Spinortensor mit oder beide ohne Dach) heraus. Wir wollen im folgenden Anwendungen in der relativistischen Quantentheorie betrachten.

7 Zur Diracschen Wellengleichung

Wir behandeln diese relativistische Wellengleichung für das freie Elektron. Hierzu betrachten wir die Verhältnisse in einem $R_4^{(1)}$, dem **Minkowski-Raum**, welcher der **speziellen Relativitätstheorie zugrunde liegt**.

Hierzu setzt man speziell (für die 4 Dimensionen):

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad (7.1)$$

c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)

Es soll jetzt also zusätzlich die Zeitabhängigkeit der Ereignisse berücksichtigt werden. Um die **Zustandsänderungen freier Elektronen** in der Zeit zu untersuchen, benutzen wir die Gleichungen (6.3) für das Spinorfeld, welche eine invariante Beschreibung gestatten. Wir gehen aber jetzt vom kovarianten Spinorfeld zur kontravarianten Darstellung des gleichen Spinorfeldes über (mit Hilfe des Operator- Spinortensors) und erhalten damit (und unter Berücksichtigung einer Konstante):

$$\begin{aligned} \kappa_0 \Psi^{\hat{\lambda}} &= D^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} \Psi_{\hat{\mu}} \\ \kappa_0 \Psi_{\hat{\lambda}} &= D^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} \Psi_{\mu} \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\kappa_0 = \frac{m_0 c}{\hbar} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Hierin ist:

m_0 Ruhemasse des Elektrons

h Plancksches Wirkungsquantum

Dies sind die Diracschen Wellengleichungen für das freie Elektron. Eine Herleitung aus dem relativistischen Energie-Impulssatz werden wir später ausführen. Die Gleichungen (7.2) stellen ein **System von 4 partiellen Differentialgleichungen im Komplexen** für die Spinorkoordinaten dar. Lösungen werden wir später betrachten. Wenn wir die Differentialgleichungen (7.2) mit Hilfe von (6.2) und (2.4) ausführlich aufschreiben (und die Symmetrie beachten), erhalten wir:

$$\begin{aligned} -\kappa_0 \Psi_2 - \partial_0 \Psi_1 &= \partial_3 \Psi_1 - \partial_1 \Psi_2 + i\partial_2 \Psi_2 \\ \kappa_0 \Psi_1 - \partial_0 \Psi_2 &= \partial_1 \Psi_1 - i\partial_2 \Psi_1 - \partial_3 \Psi_2 \\ -\kappa_0 \Psi_2 - \partial_0 \Psi_1 &= \partial_3 \Psi_1 + \partial_1 \Psi_2 - i\partial_2 \Psi_2 \\ \kappa_0 \Psi_1 - \partial_0 \Psi_2 &= \partial_1 \Psi_1 + i\partial_2 \Psi_1 - \partial_3 \Psi_2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Interessant ist, dass wir aus dem Spinorfeld $\Psi^\lambda, \Psi^{\hat{\lambda}}$ das **Vektorfeld der Stromdichte** $A^i = -2x^i$ berechnen können. Hierzu konstruieren wir zunächst wieder einen **symmetrischen Spinortensor** $c^{\lambda\hat{\mu}}$ aus dem Spinorfeld $\Psi^\lambda, \Psi^{\hat{\lambda}}$ und dem hierzu konjugierten Spinorfeld:

$$\begin{aligned} c^{\lambda\hat{\mu}} &= \Psi^\lambda (\Psi^{\hat{\mu}})^* + (\Psi^{\hat{\lambda}})^* \Psi^{\hat{\mu}} \\ c^{\hat{\mu}\lambda} &= \Psi^{\hat{\mu}} (\Psi^\lambda)^* + (\Psi^\mu)^* \Psi^\lambda \end{aligned} \quad (7.4)$$

Hieraus lässt sich nach (4.3) der Vektor (Tensor erster Stufe) x^i und damit nach obiger Formel die Stromdichte berechnen. Wir beachten noch die Beziehung $x^4 = ix^0$ und erhalten:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{2}(c^{1\hat{2}} + c^{2\hat{1}}) & x^2 &= \frac{1}{2i}(c^{1\hat{2}} - c^{2\hat{1}}) \\ x^3 &= \frac{1}{2}(c^{1\hat{1}} - c^{2\hat{2}}) & x^0 &= -\frac{1}{2}(c^{1\hat{1}} + c^{2\hat{2}}) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Aus (7.4) ersehen wir, wie wir aus **einem Spinor und dem konjugierten Spinor** einen Spinortensor erhalten (also einen Spinor höherer Stufe). In (7.5) sehen wir wieder, wie wir aus dem Spinortensor einen Vektor erhalten. **Hinweis:** Es handelt sich hier natürlich um Vektorfelder, Spinorfelder und Spinortensorfelder. Da dies aber aus dem Zusammenhang klar ist, lassen wir die Bezeichnung „Feld“ weg.

Im folgenden wollen wir auf den physikalischen Hintergrund einiger Grundgleichungen der klassischen und der relativistischen Quantenmechanik (Differentialgleichungen) eingehen.

8 Zur Quantenmechanik

Zwischen dem Mikro- und Makrokosmos gibt es gewisse Analogien. Dennoch lassen sich die Gesetze des Makrokosmos nicht auf die des Mikrokosmos übertragen. Betrachtet man Elementarteilchen, so ist daher die Quantenmechanik oder die relativistische Quantenmechanik heranzuziehen. Max Planck und A. Einstein hatten gefolgert, dass Licht aus Strömen von bewegten Quanten, den Photonen besteht, die sich mit $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ im

Vakuum ausbreiten. Solche Quanten können nur in einem ganzzahligen Vielfachen der kleinsten Wirkung emittiert oder absorbiert werden. Diese kleinste Wirkung ist eine fundamentale Naturkonstante und wird als **Plancksches Wirkungsquantum** h bezeichnet. Die **Energie der Photonen** berechnet sich zu: $W_p = h \cdot f$. Hierin ist f die Frequenz des Lichtes.

Weiterhin folgt auch $W_p = m_p \cdot c^2$, worin m_p die *Bewegungsmasse des Photons* bedeutet. Über diese Formeln können wir einer Frequenz eine Photonenmasse (Bewegungsmasse) zuordnen und umgekehrt. Hiermit ist gleichzeitig ein Zusammenhang zwischen Wellen- und Teilcheneigenschaften gegeben. W. Heisenberg stellte fest, dass sich der Ort eines Elementarteilchens nicht genau angeben lässt. Es lässt sich daher nur eine **Aufenthaltswahrscheinlichkeit** der Elementarteilchen berechnen (für die Elektronen gibt es hierfür Orbitalmodelle). Ort und Impuls eines Elementarteilchens bzw. Energie und Zeit lassen sich nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit angeben. Es gilt die **Heisenbergsche Unschärferelation**:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar \quad \text{oder} \quad \Delta E \cdot \Delta t = \hbar \quad (8.1)$$

Δx - Ortsunschärfe Δp - Impulsunschärfe
 ΔE - Unschärfe der Energie Δt - Unbestimmtheit der Zeit

Wird der Ort eines Elementarteilchens genauer bestimmt, wächst die Unschärfe des Impulses und umgekehrt. Will man die Zeit genauer angeben, so wächst die Unschärfe der Energie und umgekehrt. Weiterhin musste in einer vollständigen Elementarteilchentheorie auch der Eigendrehimpuls (Spin) der Elementarteilchen berücksichtigt werden. Elektronen z.B. haben einen halbzahligen Spin, sind **Fermionen** und unterliegen hinsichtlich der Besetzung von Energieniveaus dem **Pauli-Prinzip**. Photonen hingegen haben einen ganzzahligen Spin und gehören zu den **Bosonen**. Die Zustände von Elementarteilchen werden auch durch **Quantenzahlen** beschrieben, die aus der Theorie folgen (z.B. Haupt- und Nebenquantenzahl, magnetische Quantenzahl, Spinquantenzahl).

Wie gewinnen wir aber die grundlegenden Differentialgleichungen der Quantenmechanik? In der Quantenmechanik werden z.B. für den Impuls und die Energie **komplexe Operatoren** eingeführt. Diese Operatoren sind mit der **Energie- und Impulserhaltung** verknüpft. Die Impulserhaltung hängt mit der Homogenität des Raumes und die Energieerhaltung hängt mit der Homogenität der Zeit zusammen. Weiterhin benötigt man **lineare, selbstadjungierte Operatoren** (für die Darstellung reeller Größen). Man erhält folgende Operatoren (die obigen Bedingungen gerecht werden):

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (8.2)$$

Um nun eine Differentialgleichung für eine Wellenfunktion zu erhalten, geht man von der Formel für die Gesamtenergie E (Hamilton-Funktion) aus und setzt die Operatoren (8.2) entsprechend ein. Wir gehen zunächst von der **klassischen Hamilton-Funktion** aus:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + V(\mathbf{r}) \quad (8.3)$$

Der erste Summand ist die kinetische und der zweite Summand ist die potentielle Energie, die vom Ortsvektor \mathbf{r} abhängt. \mathbf{p} ist der Impulsvektor und m_0 die Masse. Jetzt setzen wir in (8.3) für die Energie und den Impuls die Operatoren (8.2) ein, und erhalten folgenden **Hamilton-Operator**:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + V(\mathbf{r}) \quad (8.4)$$

Wir wenden diese Operatorgleichung auf eine **Wellenfunktion** $\Psi(\mathbf{r}, t)$ an. Diese Funktion hängt also vom Ortsvektor und der Zeit ab. Mit ihr kann die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsdichte berechnet werden. Wir erhalten:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (8.5)$$

Dies ist die **Schrödinger-Gleichung**. Sie wird in der **nichtrelativistischen Quantenphysik** angewendet. Es stellte sich heraus, dass die Schrödinger-Gleichung relativistische

Quantenphänomene nicht beschreiben konnte. In dieser Gleichung ist z.B. die relativistische Massezunahme nicht berücksichtigt. Weiterhin werden Raum und Zeit in ihr nicht gleichberechtigt behandelt (erste Ableitung nach der Zeit aber zweite Ableitungen nach den Komponenten des Ortsvektors). Um eine relativistische Quantentheorie zu schaffen, muss man vom [relativistischen Energie-Impulssatz](#) ausgehen. Dieser lässt sich aus der Formel für die [relativistische Massezunahme](#)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad m_0 \text{ Ruhemasse } m \text{ Bewegungsmasse} \quad (8.6)$$

und aus der [Masse-Energie Äquivalenz](#):

$$E = mc^2 \quad \text{bzw.} \quad E_0 = m_0c^2 \quad E_0 \text{ Ruheenergie } E \text{ Gesamtenergie} \quad (8.7)$$

unter Berücksichtigung von $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

herleiten. Man erhält:

$$\frac{E^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m_0^2c^2 \quad (8.8)$$

Das Einsetzen der Operatoren (8.2) in (8.8) für die Energie und den Impuls und die Anwendung auf eine Wellenfunktion liefert die [Klein-Gordon-Gleichung](#):

$$-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{r}, t) = -\hbar^2 \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + m_0^2 c^2 \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (8.9)$$

In dieser Gleichung sind alle Variablen gleichberechtigt. Diese Gleichung bildet eine wichtige Grundlage der Quantenfeldtheorie. Sie wird z.B. für die Beschreibung von Mesonen verwendet. M.Dirac hatte nun eine Gleichung gefunden, die allen Anforderungen genügt (für die Beschreibung von Elektronen) und sehr gut mit dem Experiment übereinstimmt. Er ging hierbei von der Klein-Gordon-Gleichung aus, fasste aber den Operator auf der rechten Seite von (8.9) als [Quadrat eines neuen Operators D](#) auf. Also:

$$D^2 = -\hbar^2 \Delta + m_0^2 c^2 \quad (8.10)$$

Der neue (lineare) Operator D soll nur erste Differentialoperatoren enthalten. Für diesen Operator wird daher der folgende Ansatz gemacht:

$$D = -i\hbar \left(\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha^3 \frac{\partial}{\partial z} \right) + \alpha^4 m_0 c \quad (8.11)$$

Damit das Quadrat von (8.11) die Gleichung (8.10) ergibt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\{\alpha^i, \alpha^k\} = \alpha^i \alpha^k + \alpha^k \alpha^i = \begin{cases} 2 & \text{für } i=k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (8.12)$$

Die α^i müssen den Charakter von Operatoren haben. Selbige lassen sich als 4×4 **Matrizen** darstellen. Um diesen Sachverhalt zu kennzeichnen, wollen wir für diese und andere Matrizen fette Buchstaben verwenden. Für diese Matrizen sind mehrere Darstellungen möglich. Eine gebräuchliche Darstellung ist die folgende:

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} -\sigma^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^k \end{pmatrix} \quad \text{für } k=1,2,3 \quad \alpha^4 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

Die Matrizen σ^k sind die **Paulischen Spinmatrizen**. Dies sind folgende 2×2 Matrizen:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Weiter ist: $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Wie man nachprüft, gilt für diese Matrizen (entsprechend 8.12):

$$\{\alpha^i, \alpha^k\} = \alpha^i \alpha^k + \alpha^k \alpha^i = \begin{cases} 2\mathbf{I} & \text{für } i=k \\ \mathbf{0} & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (8.15)$$

Der Operator (8.11) nimmt jetzt folgende Form an:

$$\hat{D} = -i\hbar \left(\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha^3 \frac{\partial}{\partial z} \right) + \alpha^4 m_0 c \quad (8.16)$$

Wenn wir die Bezeichnungen $x^1 = x$ $x^2 = y$ $x^3 = z$ einführen und die Abkürzung $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ verwenden, so können wir den Operator (8.16) auch in folgender Form notieren:

$$\hat{D} = -i\hbar \sum_{k=1}^3 \alpha^k \partial_k + \alpha^4 m_0 c \quad (8.17)$$

Die Operatorgleichung zur Gleichung (8.9) lässt sich unter Verwendung des neuen Operators wie folgt aufschreiben:

$$-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} = \hat{D}^2 \quad (8.18)$$

Zieht man die Wurzel (und nimmt die positive Lösung), so erhält man unter Verwendung von (8.17) und nach Anwendung auf Ψ die **Dirac-Gleichung**:

$$-i \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi - i\hbar \sum_{k=1}^3 \alpha^k \partial_k \Psi + \alpha^4 m_0 c \Psi = \mathbf{0} \quad (8.19)$$

Hierin ist Ψ ein 4-Spinor. Wir führen jetzt die Diracschen **Gammamatrizen** ein. Sie ergeben sich wie folgt aus den α^k :

$$\gamma^0 = (\gamma^0)^{-1} = \alpha^4 \quad \gamma^k = \gamma^0 \alpha^k \quad (8.20)$$

Aus (8.20) und unter Verwendung von (8.13) ergibt sich:

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^k \\ -\sigma^k & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, 3 \quad (8.21)$$

Wir multiplizieren die Gleichung (8.19) mit γ^0 und erhalten wegen (8.20):

$$-i\gamma^0 \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi - i\hbar \sum_{k=1}^3 \gamma^k \partial_k \Psi + m_0 c \Psi = \mathbf{0} \quad (8.22)$$

Verwenden wir die Abkürzung: $\partial_0 = \frac{\partial}{c\partial t}$, so entsteht aus Gleichung (8.22) nach Zusammenfassung die Dirac-Gleichung in der folgenden Form:

$$\left(-i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + m_0 c \right) \Psi = \mathbf{0} \quad (8.23)$$

Hierin wird über μ von 0 bis 3 summiert.

Im Abschnitt 7 hatten wir eine andere Darstellung der Diracschen Wellengleichung betrachtet. Wir wollen jetzt eine ähnliche Darstellung verwenden, die zu (8.23) äquivalent ist. Fasst man den 4-Spinor Ψ als einen Spinor auf, der aus den 2-Spinoren ϕ_λ und $\chi^{\hat{\mu}}$ zusammengesetzt ist, so lässt sich Ψ als **Bispinor** wie folgt darstellen:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_\lambda \\ \chi^{\hat{\mu}} \end{pmatrix} \quad (8.24)$$

Wie z.B. die Beziehungen (6.3) zeigen, können wir mit Hilfe eines Operator- Spinortensors (kurz: Spinoroperator) $D'^{\lambda\hat{\mu}}$ invariante Differentialgleichungen für die Spinorfelder aufstellen. Wird dies auf (8.24) angewendet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} i\kappa_0 \chi_{\hat{\mu}} &= D'_{\lambda\hat{\mu}} \phi^\lambda \\ i\kappa_0 \phi^\lambda &= D'^{\lambda\hat{\mu}} \chi_{\hat{\mu}} \end{aligned} \quad (8.25)$$

Hierin ist jetzt:

$$\begin{pmatrix} D'_{1\hat{1}} & D'_{1\hat{2}} \\ D'_{2\hat{1}} & D'_{2\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_3 - i\partial_4 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 - i\partial_4 \end{pmatrix} \quad (8.25a)$$

Wir wollen uns nun überlegen, wie wir von (8.25) auf unsere frühere Form (7.2) der Dirac-Gleichung kommen. Wir betrachten hierzu die zweite Gleichung von (8.25). Nach Division durch die imaginäre Einheit „i“ ergibt sich:

$$\kappa_0 \phi^{\lambda} = -D'^{\lambda\hat{\mu}} i \chi_{\hat{\mu}} \quad (8.25b)$$

$i \chi_{\hat{\mu}}$ hat die Bedeutung von $\Psi_{\hat{\mu}}$ in unserer früheren Beziehung. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass $-D'^{\lambda\hat{\mu}}$ unser früherer Spinoroperator (6.2) ist. Wenn wir das Minuszeichen von (8.25b) in (8.25a) hineinnehmen und berücksichtigen, dass $\partial_4 = -i\partial_0$ ist, so erhalten wir aus (8.25a):

$$\begin{pmatrix} D_{1\hat{1}} & D_{1\hat{2}} \\ D_{2\hat{1}} & D_{2\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_3 + \partial_0 & -\partial_1 + i\partial_2 \\ -\partial_1 - i\partial_2 & \partial_3 + \partial_0 \end{pmatrix}$$

Gehen wir von diesem kovarianten Spinoroperator zum vollständig kontravarianten Spinoroperator über, so erhalten wir schließlich (6.2).

Wie aus (8.25) ersichtlich ist, gehen die Spinorfelder (die zum obigen Bispinor gehören) durch Überschiebung mit dem ko- bzw. kontravarianten Spinoroperator auseinander hervor. Diese Gleichungen lassen sich verallgemeinern. So ist es möglich, weitere invariante Differentialgleichungen mit Spinorfeldern (oder wie wir auch sagen: mit Spinortensordfeldern) zu gewinnen (symmetrische Spinorfelder). Hierzu gehen wir zu Spinorfeldern höherer Stufe über (durch direkte Produkte von Spinoren kann man höherstufige Spinoren gewinnen (ähnlich wie in der Tensorrechnung)). Nach (8.25) kommen als kovariante Indizes für das Spinorfeld nur Indizes der Form $\hat{\mu}$ in Frage und als kontravariante Indizes nur Indizes der Form μ . Wir betrachten eine Erweiterung der Gleichungen (8.25) auf Spinorfelder dritter Stufe. Es entsteht:

$$\begin{aligned} i \kappa_0 \chi_{\hat{\mu}\hat{\beta}}^{\alpha} &= D'_{\lambda\hat{\mu}} \phi_{\hat{\beta}}^{\lambda\alpha} \\ i \kappa_0 \phi_{\hat{\beta}}^{\lambda\alpha} &= D'^{\lambda\hat{\mu}} \chi_{\hat{\mu}\hat{\beta}}^{\alpha} \end{aligned} \quad (8.26)$$

Auf diese Art und Weise lassen sich weitere relativistische Wellengleichungen gewinnen (Gleichungen für beliebige Spins. Welche Spins beschrieben werden, richtet sich nach der Anzahl der oberen und der unteren Indizes der Spinorfelder).

Betrachten wir abschließend einige einfache Lösungen der Dirac-Gleichung. In die Dirac-Gleichung

$$-i \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi - i \hbar \sum_{k=1}^3 \alpha^k \partial_k \Psi + \alpha^4 m_0 c \Psi = \mathbf{0} \quad (8.27)$$

gehen wir mit dem Ansatz

$$\Psi = \mathbf{U} \phi \quad (8.28)$$

worin \mathbf{U} ebenfalls ein 4-Spinor ist. Die Dirac-Gleichung hat ebene Wellen als Lösung. Für ϕ setzen wir deshalb

$$\phi = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{i\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{E}{\hbar}t\right)} \quad (8.29)$$

Hierin ist \mathbf{k} der Wellenzahlvektor. Im folgenden setzen wir:

$$\mathbf{k} = (k_1 = k_x, k_2 = k_y, k_3 = k_z)^T$$

Nach Einsetzen des Ansatzes (8.28) mit (8.29) in (8.27), der Ausführung der Differentiationen und der Multiplikation mit ϕ^* ergibt sich:

$$\left[E - \left(\hbar c \sum_{i=1}^3 \alpha^i k_i + \alpha^4 m_0 c^2 \right) \right] \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (8.30)$$

Wir wenden hierauf von links den Operator

$$\left[E + \left(\hbar c \sum_{i=1}^3 \alpha^i k_i + \alpha^4 m_0 c^2 \right) \right] \quad \text{an und erhalten wegen der Bedingungen (8.15):}$$

$$E = \pm \sqrt{c^2 \hbar^2 \mathbf{k}^2 + m_0^2 c^4} \quad (8.31)$$

Mit (8.31) ergeben sich **Lösungen mit positiver und mit negativer Energie**. Eine Erklärung hierzu bietet die Diracsche Löchertheorie. Man stellt sich vor, dass alle Zustände mit negativer Energie besetzt sind. Ein Loch im unendlichen Untergrund der negativ geladenen Elektronen in Zuständen negativer Energie bewegt sich genauso, wie ein positiv geladenes Teilchen (gleicher Masse) im entsprechenden Zustand positiver Energie. Damit konnte auch das Antiteilchen des Elektrons (das Positron) vorhergesagt werden. Vergleichen wir (8.31) mit dem relativistischen Energie-Impulssatz,

$$\frac{E^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2 \quad \text{so findet man die Beziehung: } \mathbf{p}^2 = \hbar^2 \mathbf{k}^2 \quad (8.32)$$

Es müssen sich aber i.a. 4 unterschiedliche Lösungen für \mathbf{U} ergeben, denn \mathbf{U} ist ein 4-Spinor. Eine Gleichung für \mathbf{U} stellt die Gleichung (8.30) dar. Wir können aber auch die Dirac-Gleichung in der Form

$$\left(-i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + m_0 c \right) \Psi = \mathbf{0} \quad (8.33)$$

verwenden und in den Impulsraum übergehen. Wir führen den 4-dimensionalen Impulsoperator mit:

$$\hat{p}_\mu = -i\hbar \partial_\mu \quad \text{ein.}$$

Statt dieses Operators setzen wir den Impuls p_μ in (8.33) ein, wobei $p_0 = \frac{E}{c}$ ist:

Man erhält damit aus (8.33) die **Dirac-Gleichung für \mathbf{U} im Impulsraum**:

$$\left(\gamma^\mu p_\mu + m_0 c \right) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (8.34)$$

Wir erhalten hieraus **4 Lösungen**. Man erhält für die positive und die negative Energie jeweils 2 Lösungen, eine für den Spin $+\frac{1}{2}$ und eine für den Spin $-\frac{1}{2}$. Wir wollen diese Lösungen wie folgt bezeichnen:

$$\mathbf{U} = \left(U_+^\uparrow, U_+^\downarrow, U_-^\uparrow, U_-^\downarrow \right)^T \quad (8.35)$$

(+ pos. Energie –neg. Energie \uparrow pos. Spin \downarrow neg. Spin).

Wir setzen: $k_0 = \frac{|E|}{\hbar}$. Weiterhin bezeichnen wir 2 Komponenten der Lösungen mit

$$e_+ = \kappa_0 c + k_0 \quad e_- = \kappa_0 c - k_0 \quad (\text{für pos. bzw. für neg. Energie})$$

und 2 weitere Lösungskomponenten mit

$$s_+ = k_1 + ik_2 \quad s_- = k_1 - ik_2 \quad (\text{für pos. oder neg. Spin})$$

Dann lassen sich die Lösungen von (8.34) in der Form:

$$\begin{aligned} U_+^\uparrow &= N(e_+, 0, k_3, s_+)^T & U_+^\downarrow &= N(0, e_+, s_-, -k_3)^T \\ U_-^\uparrow &= N(k_3, s_+, e_-, 0)^T & U_-^\downarrow &= N(s_-, -k_3, 0, e_-)^T \end{aligned} \quad (8.36)$$

aufschreiben, wobei N ein Normierungsfaktor mit $N = \frac{1}{\sqrt{2k_0(k_0 + \kappa_0 c)}}$ ist.

Die **4 Lösungen** von (8.33) erhält man nach (8.28) zu

$$\left(\Psi_+^\uparrow, \Psi_+^\downarrow, \Psi_-^\uparrow, \Psi_-^\downarrow \right)^T = \left(U_+^\uparrow, U_+^\downarrow, U_-^\uparrow, U_-^\downarrow \right)^T e^{i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \frac{E}{\hbar}t\right)} \quad (8.37)$$

wobei für die ersten beiden Lösungen $E > 0$ und für die letzten beiden Lösungen $E < 0$ ist.

9 Weiterführende Betrachtungen

Wir haben nur einige grundlegende Aspekte der Verbindung zwischen der Quantenmechanik und der speziellen Relativitätstheorie (SRT) betrachtet. Man hat aber auch Zusammenhänge mit der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) hergestellt, die bekanntlich das Gravitationsfeld berücksichtigt. Wenn man versucht eine Verbindung der Quantenfeldtheorie mit der ART herzustellen, so geht dies u.a. über eine Quantisierung der Metrik. Dies führt auf die Gravitonen, den Quanten des Gravitationsfeldes mit dem Spin $2\hbar$. In einer allgemeinen Feldtheorie müssen auch die Symmetriegruppen (es gibt Raum-Zeit Symmetrien und „innere“ Symmetrien, die kontinuierlich oder diskontinuierlich sein können) vereinheitlicht werden. Dies führt (im diskontinuierlichen Fall) zur einheitlichen Quantisierung aller Felder. Danach würde das Gravitonenfeld von einem Fermionenfeld, dass aus Gravitinos mit dem Spin $\frac{3}{2}\hbar$ besteht begleitet. Nach dieser Theorie ist das Einsteinsche Gravitationsfeld nach wie vor für die makrophysikalische Situation gültig. Bei Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen würde aber zusätzlich das Gravitinofeld in Erscheinung treten (Theorie der Supergravitation).

Sollten sich die Effekte der Relativitätstheorie durch Teilchenwechselwirkungen (mit Gravitonen bzw. Gravitinos; durch Wechselwirkungen, die von der Geschwindigkeit und der Masse des Objektes abhängig sind) erklären lassen?

Kann man überhaupt alles Existierende auf einige Felder, einige Teilchen, eine Theorie, einen Urknall, eine Formel usw. zurückführen ?

Sind nicht alle Grenzen auch relativ und von Bedingungen abhängig ?

Ist die Materie nicht unendlich und unerschöpflich und besteht diese Unendlichkeit nicht aus unendlich vielen Endlichkeiten, die wir schrittweise erforschen ?

Literatur:

Raschewski, P.K. : Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis

Joos, G. : Lehrbuch der theoretischen Physik

Schmutzer, E. : Relativitätstheorie-aktuell