

Elementare Theorie entarteter Sterne (Sexl/Urbanke, Kap. 8)

Wir hatten bereits gesehen, daß "nur" die Neutronensterne so kompakt sind, daß sie aufgrund der starken Gravitationskraft allgemein relativistisch beschrieben werden müssen. Alle anderen Sterne können Newtonisch (unter evtl. Berücksichtigung der spez. Relativitätstheorie im Falle der Zustandsgleichung) beschrieben werden. Die Klassifizierung gewöhnlicher Sterne wollen wir uns nun zunächst vorbehalten. Das Leben eines Sterns beginnt mit seiner Entstehung aus einer Gaswolke, die sich unter der Wirkung der eigenen Schwerkraft allmählich kontrahiert und dabei aufheizt, bis das entstehende Druck der Schwerkraft das Gleichgewicht hält. Die Gleichgewichtsbedingung ergibt sich dabei aus einer einfachen Betrachtung der Druckzunahme im Inneren einer kugelförmig und nichtrotierend angenommenen Sternes. Es ist

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{G M(r)}{r^2} \rho(r) \quad \text{-- veralg. "Barometrische" Höhenformel} \quad (1)$$

mit

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

da die Masse des Sterns bis zum Radius r bezieht. Unter der vereinfachenden Annahme einer Gas-Kugel konstanter Dichte ($\rho = \text{const}$) wird

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{4}{3} \pi G \rho^2 r \Rightarrow p = p_0 - \frac{2}{3} \pi G \rho^2 r^2$$

Dabei ist p_0 der Druck im Zentrum des Sterns. Aus $p(r=R_{\text{Stem}}) \stackrel{!}{=} 0$ folgt sofort

$$p_0 = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 R^2$$

oder

$$\boxed{\frac{p_0}{\rho c^2} = \frac{2}{3} \pi \frac{G R^3}{R c^2} = \frac{1}{2} \frac{m}{R}} \quad , \quad 2m = \frac{8\pi}{3} G \rho R^3 = M \quad \leftarrow \text{Schwerkraftkonstante} \quad (2)$$

Ersetzen wir den Druck p_0 im Sterninnern durch einen mittleren Druck \bar{p} , so erhält wir größere Ordnungsmäßig (d.h. bis auf numerische Faktoren ~ 1)

$$\boxed{\frac{m}{R} \approx \frac{\rho}{gc^2}}$$

(3)

Das für die $\frac{m}{R}$ entscheidende Verhältnis von Schwarzschild-Radius zu Radius eines Körpers (\approx Stern) ist daher durch das Verhältnis Druck zu Energiedichte (gc^2) bestimmt.

a) Die Zustandsgleichung normale Sterne

Um (3) weiter auszuwerten, müssen wir Annahmen über die Zustandsgleichung des Sterninneren machen. Allgemein ist die Zustandsgleichung mittels eines dimensionslosen Funktionschreibes als

$$\frac{\rho}{gc^2} =: f(\rho, T) \quad (4)$$

\swarrow Dichte \nwarrow Temperatur

Für ein ideales Gas (Sterne, deren Materie dadurch gecharakterisiert werden kann) findet man leicht

$$f = \frac{\rho}{gc^2} = \frac{kT}{m_0 c^2} = \frac{v^2}{3c^2} \quad \text{im nichtrelativistischen Limes} \quad (5)$$

\uparrow Masse des Teilchens des id. Gases

Für normale Sterne ist f und damit das Verhältnis von Schwarzschild-Radius zu Radius in unserem einfachen Modell eindeutig durch die Temperatur und das Molekulargewicht m_0 im Sterninneren bestimmt. Mit m_0^2 von Wasserstoff ($\approx 16eV$) und Temperatur ein 10^7 keV (dadurch Kernreaktionen festgelegt ist) ist

$$\frac{m}{R} \approx \frac{kT}{m_0 c^2} \approx 10^{-6}$$

Da relativistische Effekte (Lichtablenkung, Rotverschiebung und das noch zu besprechende Massedefizit eines Sterns) von der Größenordnung $\frac{m}{R}$ sind, erhalten wir die bemerkenswerte Gleichung

$$\delta \approx \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{m}{R} \approx f(\rho, T) \approx \frac{kT}{m_0 c^2} \approx 10^{-6} \quad \leftarrow \text{z.B. unsere Sonne} \quad (6)$$

Die Kleinheit relativistischer Effekte ist daher bei Normalsternen von der Komplexität her bedingt. Es ist bemerkenswert, daß die relativistischen Effekte somit unabhängig von der Größe des Gravitationspotentials sind, wie (6) zeigt.

Solange Kernreaktionen die Temperatur T aufrecht erhalten können, bleibt das Sterninnere auf der Hauptreihe des sog. Hertzsprung-Russell-Diagramms (Sterne von etwa Sonnenmasse etwa 10 Milliarden Jahre

5.) Die Zustandsgleichung entarteter Materie

Wenn die Vorräte an Kernenergie erschöpft sind, kann die hohe Temperatur und damit der Druck im Sterninneren nicht mehr aufrechterhalten werden, der Stern bricht zusammen. Erwird dabei solch große mittlere Dichte erreicht, bis es zeigt sich, daß dann wieder besonders einfache Verhältnisse vorliegen. Die Materie wird entartet (die Elektronen oder gasche Moleküle ξ etc. ein entartetes Fermi-Gas):

$$\frac{p}{\rho c^2} = f(\rho) \quad - \text{für entartete Materie} \quad (17)$$

Bei entarteter Materie ist die kinetische Energie der Teilchen (d.h. Elektronen oder Moleküle) und damit der Druck nicht durch die Temperatur bedingt wie beim idealen Gas, sondern aufgrund der Unschärferelation und des Pauli-Verbotes durch den sog. Fermi-Druck charakterisiert.

Bei Dichte von etwa 10^4 g/cm^3 nimmt das Material metallische Eigenschaften an, die Elektronen verhalten sich dann wie ein freies, entartetes Elektronengas. Für den Druck gilt dann

$$f = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{E_F}{m_0 c^2} \approx \begin{cases} \frac{1}{m_0 c^2} \frac{p_F^2}{m_{el}} & \text{Elektronenmasse (NR)} \\ \frac{1}{m_0 c^2} p_F \cdot c & \text{Fermi-Impuls } p_F \cdot d \approx \hbar \end{cases} \quad (18)$$

Annotations: \leftarrow kin. Druck = $2 p_F \cdot V$ \leftarrow Geschwindigkeit, \leftarrow Komprimieren

Der Übergang von (NR) zu (R) geschieht etwa bei $p_F \approx m_{el} \cdot c$, i.e. bei einem mittleren Elektronenabstand $d \approx \frac{\hbar}{m_{el} c} = \lambda_{cl} = 4 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$, das Comptonwellenlänge des Elektrons. Die entsprechende Dichte ρ_0 (an Kernteilchen) ist dann etwa ($m_0 \approx$ Masse des Wasserstoffatoms)

$$\rho_0 \approx \frac{m_0}{\lambda_{cl}^3} = m_0 \frac{m_{el}^3 c^3}{\hbar^3} \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3 \quad (19a)$$

Setzt man in (18) $\rho = \frac{m_0}{d^3}$, so erhält man als Zustandsgleichung, da $d \approx \frac{\hbar}{p_F}$

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{m_{el}}{m_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n/3} \quad \begin{cases} n=2 & \rho \lesssim \rho_0 & \text{(NR)} \\ n=1 & \rho \gtrsim \rho_0 & \text{(R)} \end{cases} \quad \rho \sim \frac{p_F^3}{d^3} \quad (19)$$

Diese Zustandsgleichung gilt für $10^4 \text{ g/cm}^3 < \rho < 10^8 \text{ g/cm}^3$.

c) Weiße Zwerg

Setzen wir nun (9) in die Gleichgewichtsbedingung (3) für eine entartete Stern ein, so folgt in etwa
mittels $\frac{m}{R} = f$, $R \approx \left(\frac{M}{\rho}\right)^{1/3}$

$$\frac{m}{R} \stackrel{(2)}{\approx} \frac{G \rho R^2}{c^2} \approx \frac{G M^{2/3} \rho^{1/3}}{c^2} = f \Rightarrow M \approx \frac{c^3 f^{3/2}}{\rho^{1/2} G^{3/2}}$$

f aus (9)
 $\Rightarrow M(\rho) = \frac{c^3}{\rho^{1/2} G^{3/2}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} \left(\frac{m_{\text{rel}}}{m_0}\right)^{3/2}$

$$\stackrel{(5)}{=} \begin{cases} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} M_c & \rho < \rho_0 & \text{(NR)} \\ M_c & \rho > \rho_0 & \text{(R)} \end{cases} \quad (10)$$

mit

$$M_c \equiv M(\rho_0) = \frac{c^3}{\rho_0^{1/2} G^{3/2}} \left(\frac{m_{\text{rel}}}{m_0}\right)^{3/2} \stackrel{(5a)}{=} 3.7 \cdot 10^{33} \text{ g} \approx \underline{1.8 M_{\odot}}$$

(11)

(M_c ist von m_{rel} abhängig, hängt nur von m_0 ab)

der sog. Chandrasekhar-Grenzmasse M_c . ($M_c = \frac{(4c)^{3/2}}{m_0^2 G^{3/2}}$)

Beziehung (11) zeigt, daß die durch den Elektronendruck aufrecht erhaltene Sterne, die Weißen Zwerg, ein Massenspektrum haben, das - insbesondere der gasfreie einfachen Näherung - für $\rho < \rho_0$ wie $\rho^{1/2}$ ausliegt und für $\rho = \rho_0$ die Chandrasekhar-Masse M_c als Obergrenze hat. (Der korrekte Wert liegt allerdings bei etwa $1.2 M_{\odot}$).

Relativistische Effekte sind für Weiße Zwerg von der Größenordnung (vgl. 16)

$$\delta \approx \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{m}{R} \approx \frac{\rho}{\rho_0} \approx \frac{m_{\text{rel}}}{m_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3} \approx \frac{m_{\text{rel}}}{m_0} \approx \underline{10^{-4}} \quad (12)$$

Die Kleinheit relativistischer Effekte spiegelt demnach das Elektron-Proton-Massenverhältnis wieder.

Für die Radien läßt sich aus $R \approx \left(\frac{M}{\rho}\right)^{1/3}$ und im (NR) $M(\rho) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} M_c$ leicht zeigen, daß

$$\underline{R \approx 5000 \text{ km} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/6}}$$

1) Neutronensterne

Überhalb von $\rho \approx 10^8 \text{ g/cm}^3$ erfolgt ein allmählicher Übergang zu Neutronenmaterie, da wegen der hohen kin. Energie die Elektronen die Neutronen nicht in Protonen und Elektronen (und Neutrinos) zerfallen können, sondern vielmals mittels der Reaktion $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ im Stern Neutronen gebildet werden. In Dichtebereich zwischen 10^8 und 10^{13} g/cm^3 werden zunächst sehr neutronenreiche Isotope wie $^{62}_{28}\text{Ni}$ und $^{132}_{59}\text{Ba}$ aufgebaut. Ab $3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ existieren dann freie Neutronen neben Atomkernen und bei 10^{13} g/cm^3 ist schließlich der Übergang zum Neutronengas beendet. Ab dieser Dichte läßt sich die Zustandsgleichung wieder einfach berechnen, da dann nur die Verhältnisse wie bei weißen Zwergen vorliegen, nur daß hier Neutronen (abdominante Komponente von Fermionen) die Rolle der Elektronen ($m_e \rightarrow m_n$) übernimmt:

$$f(\rho) = \frac{P}{\rho c^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \begin{array}{l} \rho \leq \rho_1 \quad n=2 \quad (NR) \\ \rho \geq \rho_1 \quad n=1 \quad (R) \end{array}$$

mit $\rho_1 = \frac{m_n}{h^3} \approx 10^{16} \text{ g/cm}^3$ (ca. als Limes dominierte Neutronen) (13)

und $M(\rho) = \begin{cases} (\rho/\rho_1)^{\frac{1}{3}} M_c & \rho \leq \rho_1 \quad (NR) \\ M_c & \rho \geq \rho_1 \quad (R) \end{cases}$

wobei hier die Chandrasekhar-Masse denselben Zahlenwert (1.44) besitzt, da bei der Substitution $m_e \rightarrow m_n$ sich ja auch ρ_0 in ρ_1 verwandelt und mittels (9c) sich die Abhängigkeit von der Elektronen- bzw. Neutronenmasse exakt wegkürzt.

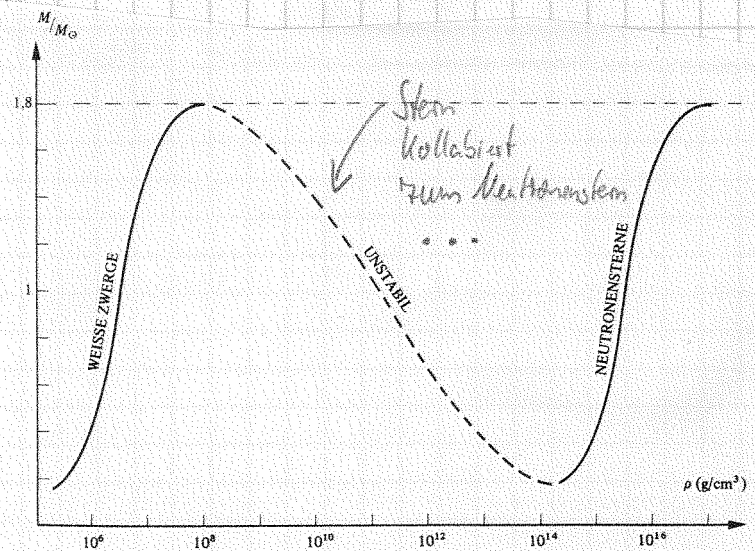


Fig. 42: Massenspektrum entarteter Sterne (elementare Rechnung).

• rel. Effekte:

$\delta \approx \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{\Delta R}{R} \approx \frac{\Delta P}{\rho c^2} \approx \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1$
 Bei Neutronensternen liefert die AR daher wesentliche Korrekturen zur Newtonschen Theorie und unsere Betrachtung genügt keineswegs (1) müsse entsprechend abgeändert werden \rightarrow Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung

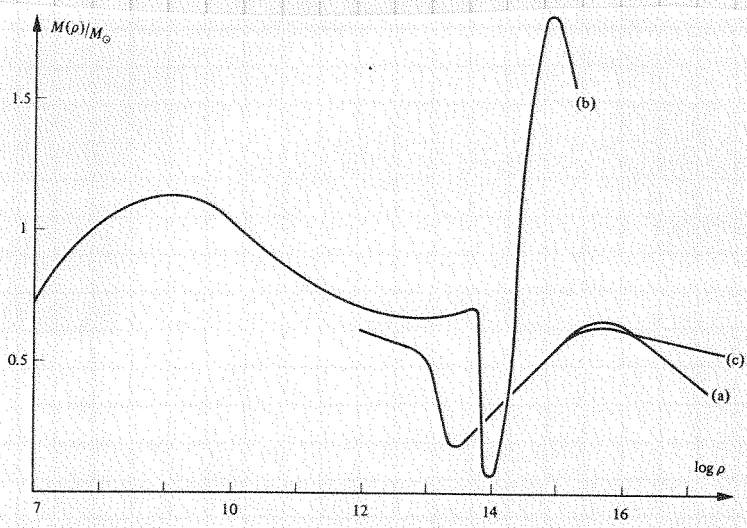


Fig. 43: Das Massenspektrum entarteter Sterne (numerische Rechnungen: a) Harrison-Wheeler, b) Cameron, c) Hagedorn).

alle
 Modellrechnungen
 von Neutronensternen
 und weißen Zwergen
 ...
 können auch
 Quasisternne
 sein ... → Klaus

• Radius des Neutronensterns: $R \approx 5 \text{ km} \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{1/6}$ (NR-Fall)

Dabei Korrekturen da R doch beträchtlichen sind, ist diese Abschätzung recht schlecht und die tatsächlichen Radien von Neutronensternen sind etwa eine Faktor 2-3 größer, da dem Masse defizit eine größere Bedeutung zukommt.

• Die Entdeckung des Pulsars im Jahre 1967 und ihre darauf folgende Identifizierung mit Neutronensternen ist in der neueren astronomischen Literatur ausführlich erläutert.

Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung

Wir wollen hier die Annahme machen, daß sich der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ durch die hydrodynamische Form (vgl. Abschnitt in 'Tensoren in der Physik', Kap. 4) beschreiben lässt. Dies bedeutet, daß z.B. elektrische oder magnetische Felder keine beeinflussende Rolle spielen. Außerdem nehmen wir an, daß die Sternmaterie im hydrostat. Gleichgewicht ist, d.h. $u^\mu = (u^0, \vec{0})$ mit $g_{00}(u^0)^2 = c^2 \Rightarrow u^0 = c \cdot (g_{00})^{-\frac{1}{2}}, u_0 = c (g_{00})^{\frac{1}{2}}$. Für eine radialsym. Metrik hat dann der Energie-Impuls-Tensor die folgende Form

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho_0 + \frac{P}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} = \left(\rho_0 + \frac{P}{c^2}\right) c^2 g_{00} dr_0 dr_0 - P g_{\mu\nu}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 e^{2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ferner gilt für das auszunehmende hydrostat. Gleichgewicht mit der obigen Form (1)

$$T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 \xrightarrow{\text{vgl. Kap. 44 Hydrodynamik}} \dots \left(\rho_0 c^2 + P\right) \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\ln g_{00}) + \vec{\nabla} P = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \nu'(r) (\rho_0 c^2 + P) + P'(r) = 0} \quad (2)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2} \nu'(r) (\rho_0 c^2 + P(r)) \quad (2)$$

Dies ist bereits die Vorstufe der sog. Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung; es muß noch $\nu'(r)$ bestimmt werden. Es ist zu erwarten, daß eine (1) auf sich selbst analoge, gekoppelte Gleichung zu finden ist. Diese muß aus den EB folgen:

Die Einsteingleichungen lauten

$$G_{00} = e^{2-\lambda} \left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{e^\nu}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho_0(r) e^\nu \quad (3a)$$

$$G_{11} = -\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^\lambda}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} P(r) e^\lambda \quad (3b)$$

$$G_{22} = -\frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right) = -\frac{8\pi G}{c^4} P(r) r^2 \quad (3c)$$

Die (3,3) Komponente liefert dieselbe Gleichung (3c) und wird daher nicht notiert.

Man kann nun zeigen, daß aus (3a), (3b) mit einigen Umformungen und Einsetzen in (3c) sich genau die Gleichung (2) für das hydrostat. Gleichgewicht ergibt. Dies ist nicht verwunderlich, da ja Gleichung (3a,b,c) ja auch die Divergenzfreiheit $G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} =$ widerspiegeln. ^{und die Stationarität anschieben} Nachher ausgeführt, wir können also hier lösliche Gleichung (1) und (3a) und (3b) verwenden, die sich ja (3c) aus diesen drei Gleichungen ergibt.

(Anmerkung: Die Ableitung (1) aus (3a,b,c) findet man z.B. im Hells, Kap. 9.6, S. 295 oder im Miller-Skript S. 148)

(3a) und (3b) laute etwas umgeschrieben

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = - \frac{8\pi G}{c^4} (\rho_0 c^2) \tag{4a}$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} P \tag{4b}$$

Setzen wir $e^{-\lambda} = \frac{u}{r}$, so folgt aus (4a)

$$u' = - \frac{8\pi G}{c^4} (\rho_0 c^2) r^2 + 1$$

Integration von $r=0$

$$\Rightarrow u = r - 2m(r) = r \cdot e^{-\lambda(r)} \rightarrow e^{-\lambda(r)} = \frac{1}{r - 2m(r)} \tag{5}$$

(2c), aber konstante $\equiv 0$, die sagt wie Punktmasse wirkt: $e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2Gm(r)}{r}}$
 $\Rightarrow 2c \triangleq m_{\text{Punkt}} \Rightarrow$ Singularität (sollte nicht da sein)

$$2m(r) := \frac{8\pi G}{c^4} \int_0^r (\rho_0(r') c^2) r'^2 dr' \leftarrow \text{"Masse" bis Radius } r \text{ des Sterns}$$

$$\triangleq \frac{2G}{c^2} \left(\int_0^r \rho_0(r') r'^2 dr' \right) \triangleq \frac{2G}{c^2} M(r)$$

Man sieht schon die Analogie zur Schwarzschild Lösung $e^{-\lambda(r)} = \frac{1}{r - 2m} = \frac{1}{r - \frac{2GM_0}{c^2}}$. (5) ist dem vollkommen analog.

Aus (4b) können wir nun nach v' auflösen und $e^{-\lambda(r)}$ mittels (5) einsetzen.

$$v' e^{-\lambda} = \left(\frac{8\pi G}{c^4} P + \frac{1}{r^2} \right) e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2} \cdot r \tag{6}$$

$$\stackrel{(5)}{=} \left(\frac{8\pi G}{c^4} P + \frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \cdot r = \frac{2 \left(m(r) + \frac{4\pi G}{c^4} P r^3 \right)}{r(r - 2m(r))}$$

Das Ergebnis für ρ können wir sofort in (2) einsetzen und erhalten

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{(\rho_0 c^2 + P) \left[m(r) + \frac{4\pi G}{c^4} P(r) \cdot r^3 \right]}{r(r - 2m(r))} \quad (7a)$$

wobei gemäss (5)

$$m(r) = \frac{G}{c^2} \left(4\pi \int_0^r \rho_0(r') r'^2 dr' \right) \hat{=} \frac{G}{c^2} M(r) \quad (7b)$$

(7a) und (7b) stellen die sog. TOV-Gleichung dar. Es ist sofort ersichtlich, daß sich (7) im Newtonschen Limes ($m(r) \ll r$, $P \ll \rho_0 c^2$) auf Gleichung (1), Seite 2, reduziert.

Stelle damit die korrekte, allgemein relativistische Verallgemeinerung von (1) dar.

Man beachte, dass hundertmal Druck P zweimal auf der rechten Seite von (7a) auftritt.

Dies hat zur Folge, dass der Druck bei starker Anwesenheit wird, Druck erzeugt demnach

höheren Druck. Zusammen mit der Erhaltungsgleichung $P(r)$ lässt sich (7) dann lösen.

Auch kann wir vermittle (6) und (5) analoge Lösungen von (1) zu (7).

→ Diskussion von kleinen aber Lösungen zu (7)

und zu Quarksterne...

Innenraumlösung und Massendefekt

Aus (4a) und (4b) auf Seite (8) folgt durch Substitution sofort

$$e^{-\lambda(r)} (v' + \lambda') = \frac{8\pi G}{c^4} (\rho_0 c^2 + P) \cdot r$$

und damit mittels Integration aus dem Unendlichen

$$v(r) = -\lambda(r) + \frac{8\pi G}{c^4} \int_{\infty}^r dr' e^{\lambda(r')} r' (\rho_0(r') c^2 + P(r'))$$

$v(r) = -\lambda(r) + \text{const}$
 aber
 $e^{v(r)} = e^{-\lambda(r)} \cdot e^{\text{const}}$
 Faktor e^{const} kann in
 Vertiefungs- bzw. Abstand
 Wende $t \rightarrow \bar{t}$

(8)

(9)

Diese Lösung erfüllt offensichtlich $\lambda = -v$ für $r > R_{\text{Stern}}$, da im Aussenraum ja $\rho_0 c^2 = P = 0$, und geht daher dort in die Schwarzschild-Metrik über. Gemäss (5) ist dann im Aussenraum

$$m_{\text{Stern}} \stackrel{!}{=} m(r=R) = \frac{2G}{c^2} \left(4\pi \int_0^R \rho_0(r') r'^2 dr' \right) = \frac{2G}{c^2} M_{\text{Stern}}, \text{ i.e.}$$

$$M_{\text{Stern}} = M = 4\pi \int_0^R \rho_0(r') r'^2 dr' \tag{10}$$

berechnet die Mass des Sterns, die in der Schwarzschild-Metrik im Aussenraum empfangen ist?

Betrachten wir im Folgenden einen Stern konstanter Dichte, i.e. der Fall inkompressibler Materie $\rho_0 = \text{const.}$ (Dies ist ein Spezialfall, da diese Aussage ja nicht allgemein koordinateninvariant sein kann. Sie sei gültig in der Koordinatensystem, welches in die Eqn (3) eingeht)

Dann ist gemäss (5)

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \frac{G}{c^2} \rho_0 r^3 \quad (r \leq R); \tag{11}$$

$$e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \tag{12}$$

Die TOV-Gleichung (7a) lautet dann

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{4\pi \frac{G}{c^4} (\rho_0 c^2 + P) \left(\frac{\rho_0 c^2}{3} + P \right) r^3}{r \left(r - \frac{2\pi}{3} \frac{G}{c^4} \rho_0 r^3 \right)} \tag{13}$$

Mit Hilfe der dimensionslosen Radialkoordinate

$$x = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0} \cdot r$$

$$\text{Wird aus (13): } \frac{4 \rho_0 c^2 dp}{(\rho_0 c^2 + P)(\rho_0 c^2 + 3P)} = - \frac{dx^2}{1-x^2} \tag{14}$$

oder ... schließlich

$$\frac{\rho(x)}{\rho_0 c^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}}{3\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}} \quad (15)$$

wobei $X \stackrel{\text{!}}{=} X(R)$, i.e.

$$X^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} R^2 \stackrel{(10)}{=} \frac{2m_{\text{Stem}}}{R} \quad (16)$$

Der Druck p_0 im Sternmittelpunkt wird dann

$$\frac{p_0}{\rho_0 c^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2m_{\text{Stem}}}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{2m_{\text{Stem}}}{R}} - 1} \quad (17)$$

Für $m_{\text{Stem}} \ll R$ geht (14) in die Newtonsche Gleichung (2) auf Seite 4 über. Für $2m_{\text{Stem}} \approx R$ ergeben sich dagegen starke Abweichungen, für $R = \frac{g}{\rho} (2m_{\text{Stem}})$ wird $p_0 = \infty$ und der Stern bricht zusammen. Ein Stern, der aus inkompressiblen Materie besteht, muß daher größer als $\frac{g}{\rho}$ seines Schwarz-Schild-Radius sein. Dies ist auch gleichzeitig eine Bedingung an die Masse M_{Stem} (vgl. (10)) des Sterns zu gegebenem Dichte, denn

$$\frac{r_s}{R_{\text{Stem}}} = \frac{r_s}{R} = \frac{2m_{\text{Stem}}}{R} \stackrel{(10)}{=} \frac{2G M_{\text{Stem}}}{c^2} \left(\frac{4\pi \rho_0}{3 M_{\text{Stem}}} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2G}{c^2} \left(\frac{4\pi}{3} \rho_0 M_{\text{Stem}} \right)^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow M_{\text{Stem}}^2 < \frac{16c^6}{243\pi G^3 \rho_0} \quad (17)$$

Man kann nun auch mittels (9) und (15) die Größe $e^{2\nu(r)}$ bestimmen (vgl. Aufgabe in Serl/Utterlke, S. 243). Ohne Beweis notizen wir das Ergebnis

$$e^{2\nu(r)} = \frac{1}{4} \left[3\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} \right]^2 \quad \leftarrow \text{dies wird verschwinden, wenn in (15) der Druck divergiert. Das Nichtverschwinden ist durch (16) sichergestellt.} \quad (18)$$

Mit (12) und (18) lautet das Linienelement im Innern des Sterns

$$ds^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1-x^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (19)$$

$\boxed{r \leq R_{\text{Stem}}}$

Für $r = R_{\text{Stem}}$ geht (19) dann stetig in die SSa mit der Masse (10) über.

Eine letzte Überlegung betrifft die Bedeutung des Massenparameters M (10)

$$M = \frac{4}{3} \pi R_{\text{Schm}}^3 \rho_0 = \rho_0 \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi, \quad (20)$$

Wiederholungskonstante angenommen $\frac{2\pi}{1}$

das ja das asymptotische Verhalten der Schwarzschild-Metrik im Außenraum bestimmt. M gibt demnach die gravitative Gesamtmasse des Sterns an. Das Koordinatenvolumen, welches wir in (20) noch einmal explizit aufgeführt haben, also $\frac{4}{3} \pi R^3$, entspricht aber nicht dem physikalischen Volumen des Sterns, da die physikalische Länge in radialer Richtung den Einfluß der Metrik aufweist. Der physikalische, infinitesimale Radialabstand ist vielmehr

$$ds_r = \sqrt{|g_{rr}|} dr = e^{\frac{\lambda}{2}} dr \stackrel{(12)}{=} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}} \quad \text{mit } r_0 = \left(\frac{3c^2}{8\pi G} \rho_0\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die Winkelrichtungen sind von Polarkoordinaten wohl bekannt:

$$ds_\theta = \sqrt{|g_{\theta\theta}|} d\theta = r d\theta$$

$$ds_\phi = \sqrt{|g_{\phi\phi}|} d\phi = r \sin\theta d\phi$$

Das echte physikalische Volumen des Sterns ist deshalb

$$V = \int \sqrt{|g_{rr}| |g_{\theta\theta}| |g_{\phi\phi}|} dr d\theta d\phi = 4\pi \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}}$$

$$= 2\pi r_0^3 \left[\arcsin \frac{R}{r_0} - \frac{R}{r_0} \left(1 - \frac{R^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (22)$$

In den Fall gewöhnlicher Sterne oder weißer Zwirge ist das Verhältnis $\frac{R}{r_0} \ll 1$, so daß wir den Ausdruck in der Klammer nach Potenzen in $\frac{R}{r_0}$ entwickeln können:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \left[1 + \frac{3}{10} \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + \dots \right]$$

(Für Neutronensterne ist das Verhältnis $\frac{R}{r_0}$ nicht soviel kleiner und man muß dann die volle Ausdruck (22) verwenden - vgl. weiter unten). Normalerweise würde wir erwarten, daß die also das physikalische Volumen V verteilte Masse ρ_0 eine Gesamtmasse M_0

$$M_0 = V \cdot \rho_0 = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3 \left[1 + \frac{3}{10} \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + \dots \right] \stackrel{(20)}{=} M \left[1 + \frac{3}{10} \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + \dots \right] \quad (23)$$

ergibt.

Die Differenz zwischen M_0 und der durch die Schwerkraft in Erscheinung tretende Masse M bezeichnet man als Massendefekt ($M_0 > M$). In kleinster Ordnung ist

$$\Delta M = M - M_0 \approx -M \frac{3}{10} \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \stackrel{\text{Einsetzen von } r_0 \text{ aus (21)}}{=} -\frac{2\pi}{5} \rho_0 \int_0^R \frac{r^5}{r^2} dr = -\frac{16\pi^2 G}{15c^2} \rho_0^2 R^5 = -\frac{3}{5} \frac{G}{c^2} \frac{M^2}{R} \quad (24)$$

Im Rahmen der Newtonschen Näherung können wir diesen Massendefekt als gravitative Bindungsenergie verstehen. Man erinnere sich an die Elektrostatik, wo je die Feldenergie eines homogen geladenen Kugel ja gerade ergibt $E_{\text{el}} = +\frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}$, dies ist hier völlig analog

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{grav}} &\stackrel{\text{Newton-Näherung}}{\approx} \int_0^R d^3r \rho(r) \phi_{\text{grav}}(r) = 4\pi \rho_0 \int_0^R r^2 dr \left(-\frac{GM(r)}{r}\right) \\ &= 4\pi \rho_0 \int_0^R r^2 dr \left(-G \frac{\frac{4}{3}\pi \rho_0 r^3}{r}\right) = -\frac{16\pi^2}{15} G \rho_0^2 R^5 = \Delta M \cdot c^2 \end{aligned}$$

Bindungsenergie und Massendefekt hängen also gerade über Einsteins Masse-Energie-Relation miteinander zusammen.

Für einen Stern mit beliebiger innerer (radialsym.) Massenverteilung $\rho_0(r)$ und im Falle starker Gravitationseffekte (= Bindungen) wie bei Neutronensternen müssen wir den Massendefekt mit Hilfe des allgemeinen Ausdrucks (21) berechnen:

$$\Delta M = -4\pi \int_0^R r^2 dr \left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}} - 1\right) \rho_0(r),$$

← ohne Beweis, aber intuitiv sofort einsichtig.

(25)

↳ ohne Beweis: Das physikalische Utensil und die damit verbundene Masse, die man hier grübeln würde, ist ja gerade $4\pi \int_0^R r^2 \rho_0 dr$; nach (175) auf Seite 3 ist die gravitative Masse ja a. S. gerade $4\pi \int_0^R r^2 \rho_{\text{grav}} dr \Rightarrow$ (25)

wobei $\lambda(r)$ aus der radialen TOV-Gleichung (17a,b) Seite 3 und verwendet von (3) auf Seite 2 zu ermitteln ist.

Bei Neutronensternen ist der Massendefekt typischerweise in der Größenordnung 20-50%.

An der Stabilitätsgrenze (117) (für die hier idealisierte Fall von starrer konstanter Dichte) ist der Massendefekt etwa 64%.