Die Beziehung zwischen Luminositätsabstand und Rotverschiebung

Hendrik van Hees

6. Juni 2012

1 Die Friedmann-Gleichungen

Wir beginnen mit der Herleitung der **Friedmann-Gleichungen** für die Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker-Metrik (FLRW-Metrik). Wir gehen dabei von der Form

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right] \tag{1}$$

in Standardkoordinaten aus, wobei wir die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt haben. Dabei ist der Krümmungsparameter $K \in \{-1, 0, 1\}$ (entsprechend offenen, flachen bzw. geschlossenen Raumschnitten $t = \text{const}$). Die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \tag{2}$$

für diese Metrik führen auf die Form des Energie-Impulstensors

$$T^{\mu\nu} = [\epsilon(t) + P(t)] u^\mu u^\nu - P(t) g^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad (u^\mu) = (1, 0, 0, 0), \tag{3}$$

der zu jedem Zeitpunkt t der relativistischen Beschreibung eines idealen im Sinne des durch die Standardkoordinaten festgelegten Bezugssystems ruhenden Fluids entspricht. Die Energiedichte ϵ und der Druck P sind unabhängig von den räumlichen Koordinaten, so daß in Übereinstimmung mit dem kosmologischen Prinzip die (großräumig gemittelte) Materieverteilung in jedem Raumschnitt homogen und isotrop ist. Wie wir unten sehen werden, können wir auch eine möglicherweise von 0 verschiedene kosmologische Konstante als Beitrag zum Energie-Impuls-Tensor berücksichtigen, wobei hierbei allerdings die Interpretation als ideales Fluid nicht mehr anwendbar ist.

Einsetzen von (1) und (3) in die Einstein-Gleichungen (2) liefert (s. das Mathematica-Notebook im Anhang) zwei Bestimmungsgleichungen für die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors a, der Energiedichte ϵ und des Drucks P, die **Friedmann-Gleichungen**

$$\frac{3(K + \dot{a}^2)}{a^2} = 8\pi G\epsilon, \tag{4}$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} = -8\pi G P. \tag{5}$$

Diese Gleichungen stellen die Beziehung zwischen der zeitlichen Entwicklung des Skalenfaktors und dem Energie-Impulsgehalt des das Universum homogen und isotrop erfüllenden „kosmischen Substrats“ her. Damit das System aus Gleichungen für die drei unbekannten Funktionen geschlossen wird, benötigen wir noch eine **Zustandsgleichung** $P = P(\epsilon)$.

Im **Standardmodell der Kosmologie** postuliert man, daß sich das kosmische Substrat aus drei unterschiedlichen Bestandteilen zusammensetzt:

- **Nichtrelativistische („kalte“) Materie.** Hierunter fällt alle aus massiven Objekten bestehende Materie wie gewöhnliche Sterne, Galaxien, interstellares Gas usw. (gemeinhin **„baryonische Materie“** genannt) aber auch die sog. **dunkle Materie**, über deren Natur wir so gut wie nichts wissen. Hier ist die fluiddynamische Interpretation des Energie-Impulstensors gerechtfertigt. Die Geschwindigkeit der Bewegung dieser Art der Materie relativ zum kosmischen Ruhsystem kann als zufällig im Sinne der kinetischen Gastheorie betrachtet werden, und die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist sehr klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit. Dabei darf man vom Modell eines idealen Gases im thermodynamischen Gleichgewicht ausgehen, und für den Druck gilt nach der nichtrelativistischen statistischen Mechanik $P_{\text{M}} = \mu \left\langle v^2 \right\rangle /3 \ll \mu$, wobei μ die Massendichte der kalten Materie ist. In der Energiedichte kann diese Bewegung also vernachlässigt werden, und es ist $\epsilon_{\text{M}} \simeq \mu$. Wir können also für diesen Anteil des Substrats die Zustandsgleichung
$$P_{\text{M}} = 0 \tag{6}$$
ansetzen.

- **Relativistische Materie und Strahlung.** Darunter fällt alle aus (nahezu) masselosen Teilchen bestehende Materie, insbesondere auch die Strahlung des **kosmischen Mikrowellenstrahlungshintergrunds**. Gewöhnlich spricht man in der Kosmologie allgemein einfach von **Strahlung**. Auch hier ist eine unmittelbare Interpretation des Energie-Impulstensors als Beschreibung eines relativistischen Fluids angebracht, und die Zustandsgleichung lautet
$$P_{\text{R}} = \frac{1}{3}\epsilon_{\text{R}}. \tag{7}$$

- **Dunkle Energie.** Hierunter fällt die Berücksichtigung der kosmologischen Konstante Λ in den Einsteingleichungen. Sie entspricht dem Term $\Lambda g^{\mu\nu}$ auf der rechten Seite der Einstein-Gleichungen (2), d.h. der Energie-Impulstensor ist durch
$$\epsilon_{\Lambda} = -P_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{8}$$
gegeben (Λ: kosmologische Konstante). Die Interpretation als Energieform rührt daher, daß eine kosmologische Konstante einem Renormierungsterm der Energie-Impulsdichte in der relativistischen Quantenfeldtheorie entspricht. Man kann ohne Übertreibung sagen, daß aus dieser Sicht die kosmologische Konstante das größte Rätsel der modernen Physik darstellt[Wei89, Wei00].

Wir gehen im folgenden davon aus, daß die drei Arten des kosmischen Substrats voneinander entkoppelt sind. Das ist für die dunkle Energie automatisch und zu allen Zeiten des Universums der Fall. Für die kosmische Hintergrundstrahlung gilt dies nur nach der Epoche der **Rekombination**, wo sich die geladenen Teilchen der Materie zu ungeladenen Atomen verbunden haben und sich die Strahlung daher ab diesem Zeitpunkt (im inflationären Standardmodell des Universums ca. 380000 Jahre nach dem Urknall) nahezu ungehindert durch das kosmische Substrat ausbreitet.

Alle drei Zustandsgleichungen (6-8) können wir in der Form

$$P_j = w_j \epsilon_j \quad \text{mit} \quad w_{\mathrm{M}} = 0, \quad w_{\mathrm{R}} = \frac{1}{3}, \quad w_\Lambda = -1 \tag{9}$$

schreiben. Die Gesamtenergiedichte des Universums ist aufgrund der Annahme, daß die verschiedenen Formen des Substrats entkoppelt sind, also als wechselwirkungsfrei angesehen werden können einfach durch

$$\epsilon_{\mathrm{tot}} = \epsilon_{\mathrm{M}} + \epsilon_{\mathrm{R}} + \epsilon_\Lambda \tag{10}$$

gegeben.

Eine erste wichtige Folgerung aus den Friedmann-Gleichungen (4) und (5) ergibt sich, wenn wir die mit 3 multiplizierte erste Gleichung von der zweiten abziehen. Es folgt

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\epsilon_{\mathrm{tot}} + 3P_{\mathrm{tot}}). \tag{11}$$

Da wegen der Signatur der Metrik stets $a > 0$ gelten muß, bedeutet dies, daß die Zeitentwicklung des Skalenfaktors für den Fall ohne kosmologische Konstante stets „abgebremst“ erfolgt. Dies ist anschaulich erklärlich, daß für gewöhnliche Materie und Strahlung die Gravitationswechselwirkung stets anziehend ist, wirkt für diese Komponenten des Substrats also der Expansion, durch die die physikalischen mittleren Abstände der Fluidelemente größer wird, entgegen. Für ein durch dunkle Energie dominiertes Universum mit $\Lambda > 0$ kann wegen (8) die rechte Seite von (11) hingegen positiv werden, und also die Expansion des Skalenfaktors beschleunigt erfolgen.

Abgesehen von dieser wichtigen Folgerung aus der zweiten Friedmann-Gleichung (5) ist diese im folgenden weniger nützlich als die aus der **Bianchi-Identität** $\mathrm{D}_\mu G^{\mu\nu} = 0$ und den Einstein-Gleichungen (2) folgende lokale Erhaltungsgleichung für Energie und Impuls $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Nach einiger Rechnung (s. Anhang A) ergibt sich mit dem Ansatz (3)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^3 \epsilon) + P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^3) = 0. \tag{12}$$

Es ist im folgenden bequemer, diese Gleichung zusammen mit der ersten Friedmann-Gleichung (4) und die Zustandsgleichungen (6-8) zu verwenden. Wegen der postulierten Entkopplung der drei Formen des Substrats, gilt (12) getrennt für jede dieser Formen. Für die allgemeine Zustandsgleichung (9) folgt also aus (12)

$$a^3 \dot{\epsilon}_j + 3(1 + w_j)a^2 \dot{a} \epsilon_j = 0. \tag{13}$$

Im folgenden bezeichnen wir Größen für einen Beobachter zur gegenwärtigen Epoche t_0 des Universums mit einem Index 0. Die Gleichungen (4) und (13) gestatten dann bei gegebener (und wenigstens prinzipiell beobachtbaren!) Zusammensetzung des Substrats zur Zeit t_0 Schlußfolgerungen über die frühere Entwicklung des Universums zu ziehen. Dazu integrieren wir zunächst (13) durch „Trennung der Variablen“:

$$\epsilon_j(t) = \epsilon_{j0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_j)}. \tag{14}$$

Damit und (9) sowie (10) folgt also durch Einsetzen in die erste Friedmann-Gleichung (2)

$$\frac{K + \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G\epsilon_{\mathrm{tot}} = \frac{8\pi G}{3} \sum_j \epsilon_{0j} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_j)}. \tag{15}$$

Im Prinzip können wir also aus dem prinzipiell beobachtbaren Krümmungsparameter $K \in \{-1, 0, 1\}$ und den Energiedichteanteilen ϵ_{0j} die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors aus (15) bestimmen. Praktisch ist die direkte Messung dieser Parameter schwierig, da wir auf irdischen Skalen weder den Krümmungsparameter messen können noch das großräumige Mittel der dunklen Materie oder die kosmologische Konstante.

Die wesentlichen Beobachtungen in der Kosmologie betreffen die Mikrowellenhintergrundstrahlung und deren **Temperaturschwankungen sowie ihrer Polarisation** (in jüngster Zeit u.a. durch Hochpräzisionsmessungen durch die Satelliten COBE, WMAP und PLANCK) und die möglichst genaue Bestimmung der Rotverschiebungs-Abstandsbeziehung (**Hubble-Gesetz**) für **Standard-Kerzen**, insbesondere von Typ Ia-Supernovae (u.a. durch das Weltraumteleskop HUBBLE). Wir beschäftigen uns im folgenden mit dem theoretisch einfacheren Fall des Hubble-Gesetzes.

2 Herleitung des Hubble-Gesetzes

Im diesem Abschnitt ist es daher das Ziel, aus (15) die direkt beobachtbare Hubble-Beziehung zwischen Rotverschiebung und Luminositätsabstand weit entfernter Objekte herzuleiten. Durch Vergleich mit den entsprechenden Meßdaten lassen sich so Rückschlüsse über die Zusammensetzung des kosmischen Substrats und die zeitliche Entwicklung des Universums ziehen.

Der Luminositätsabstand d_L ist über die Intensitäts-Entfernungsbeziehung

$$L = \frac{P_{\text{em}}}{4\pi a_0^2 r_0^2 (1+z)^2} := \frac{P_{\text{em}}}{4\pi d_L^2} \Rightarrow d_L = (1+z) r_0 a_0. \tag{16}$$

definiert. Dabei ist P_{em} die totale Strahlungsleistung des homogen und isotrop strahlenden Objekts. Die **Rotverschiebung** durch

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t_0 - t)} \tag{17}$$

bestimmt. Der Zeitpunkt $t_0 - t$, bei dem der Skalenfaktor in (17) zu bestimmen ist, ist durch die Beziehung zwischen der Koordinatenentfernung r_0 des Beobachters vom Objekt bei $r = 0$ und der Lichtlaufzeit t gegeben. Diese bestimmt sich aus der Nullgeodätengleichung für den beobachteten Lichtstrahl zu

$$\tau = \chi \quad \text{mit} \quad \tau = \int_{t_0 - t}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')}, \quad \chi = \int_0^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - K r^2}} = S_K^{-1}(r_0) := \begin{cases} \operatorname{arsinh} r_0 & \text{für} \quad K = -1, \\ r_0 & \text{für} \quad K = 0, \\ \arcsin r_0 & \text{für} \quad K = +1. \end{cases} \tag{18}$$

Umgekehrt gilt also

$$r_0 = S_K(\chi) = S_K(\tau) \quad \text{mit} \quad S_K(\chi) = \begin{cases} \sinh \chi & \text{für} \quad K = -1, \\ \chi & \text{für} \quad K = 0, \\ \sin \chi & \text{für} \quad K = +1. \end{cases} \tag{19}$$

Im folgenden wollen wir nun das Integral für τ in (18) über die Rotverschiebung z ausdrücken.

Zunächst definieren wir dazu einige Beobachtungsparameter für die gegenwärtige Epoche t_0 des Universums. Die **Hubble-Konstante** ist durch

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \tag{20}$$

definiert, und mit ihrer Hilfe läßt sich die erste Friedmann-Gleichung (2) in der Form

$$\frac{K}{H_0^2 a_0^2} = \Omega_{\text{tot}} - 1 \quad \text{mit} \quad \Omega_{\text{tot}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\epsilon_{\text{tot}}(t_0) \tag{21}$$

ausdrücken. Entsprechend werden Ω_j für die einzelnen Anteile des Substrats ($j \in \{\mathrm{R}, \mathrm{M}, \Lambda\}$) definiert. Diese dimensionslosen Größen geben die Energiedichten dieser Anteile in Einheiten der **aktuellen kritischen Energiedichte**, die durch $\Omega_{\text{tot}} = 1$ gekennzeichnet ist, d.h.

$$\epsilon_{\text{crit}}(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \tag{22}$$

bei der gemäß (21) gerade $K = 0$ (flaches Universum) wird. Ein geschlossenes Universum ($K = 1$) liegt also bei $\Omega_{\text{tot}} > 1$ und ein offenes ($K = -1$) bei $\Omega_{\text{tot}} = -1$ vor.
Für die Rotverschiebung gilt nun $1 + z = a_0/a$ und damit für den Hubble-Parameter zur Zeit t

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left[\frac{a(t)}{a_0}\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln[1 + z(t)] = -\frac{\dot{z}(t)}{1 + z(t)} \Rightarrow \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}z}{(1+z)H} \tag{23}$$

d.h.

$$\tau = \int_{t_0 - t}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} = \frac{1}{a_0}\int_{t_0 - t}^{t_0} \mathrm{d}t'[1 + z(t')] = \frac{1}{a_0}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{H(z')}. \tag{24}$$

Die Funktion $H(z)$ erhalten wir nun aber sofort aus (15) und (21):

$$\frac{K}{a^2} + H^2 = H_0^2 \sum_j \Omega_j (1+z)^{3(1+w_j)}. \tag{25}$$

Weiter ist mit (17) wegen (21)

$$\frac{K}{a^2} = \frac{K}{a_0^2}(1+z)^2 = H_0^2\,(\Omega_{\text{tot}} - 1)(1+z)^2. \tag{26}$$

Insgesamt ergibt sich also schließlich aus (25)

$$H = H_0\left[\Omega_{\mathrm{R}}(1+z)^4 + \Omega_{\mathrm{M}}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{\text{tot}})(1+z)^2 + \Omega_\Lambda\right]^{1/2}. \tag{27}$$

Betrachten wir nun zunächst die Fälle $K = \pm 1$. Dann gilt wegen (21)

$$\frac{1}{a_0} = H_0\sqrt{|1 - \Omega_{\text{tot}}|}, \tag{28}$$

und wir erhalten schließlich mit (16), (19), (24) und (27) für den Luminositätsabstand

$$d_L = \frac{1+z}{H_0\sqrt{|1-\Omega_{\text{tot}}|}} S_K\left(\int_0^z \mathrm{d}z' \frac{\sqrt{|1-\Omega_{\text{tot}}|}}{\left[\Omega_{\mathrm{R}}(1+z')^4 + \Omega_{\mathrm{M}}(1+z')^3 + (1-\Omega_{\text{tot}})(1+z)^2 + \Omega_\Lambda\right]^{1/2}}\right). \tag{29}$$

Der Fall des flachen Universums ($K = 0$ bzw. $\Omega_{\text{tot}} = 1$ ergibt sich daraus wegen

$$S_K(\chi) = \chi + \mathcal{O}(\chi^3) \tag{30}$$

zu

$$d_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{\left[\Omega_\mathrm{R}(1+z')^4 + \Omega_\mathrm{M}(1+z')^3 + \Omega_\Lambda\right]^{1/2}}. \tag{31}$$

Aus (23) und (27) folgt noch für die Lichtlaufzeit

$$t(z) = \int_{t_0-t}^{t_0} \mathrm{d}t' = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{(1+z')\left[\Omega_\mathrm{R}(1+z')^4 + \Omega_\mathrm{M}(1+z')^3 + (1-\Omega_\mathrm{tot})(1+z')^2 + \Omega_\Lambda\right]^{1/2}}. \tag{32}$$

Informationen aus Lichtsignalen mit einer Rotverschiebung z stammt also von einer Quelle in einer Epoche des Universums, die um diese Zeitspanne vom Beobachtungszeitpunkt zurückliegt.

Gewöhnlich wird die Hubblekonstante über den Parameter h angegeben, der durch $H_0 = 100h$ km s^{-1} Mpc^{-1}. Der derzeitige Wert, basierend allein auf WMAP-Daten zur zu den Schwankungen der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung beträgt $h = 0{,}704 \pm 0{,}025$. Dabei wird das oben beschriebene Modell für die Zusammensetzung des kosmischen Substrats unter der Annahme, daß ein flaches Universum ($K = 0$, $\Omega_\mathrm{tot} = 1$) vorliegt und daß die Materieenergiedichte durch kalte dunkle Materie dominiert wird. Es ergibt sich $\Omega_\mathrm{M} = \Omega_\mathrm{B} + \Omega_\mathrm{CDM}$, und die Parameter für Baryonische bzw. dunkle kalte Materie wird zu $\Omega_\mathrm{CDM} h^2 = 0{,}112 \pm 0{,}006$ und $\Omega_\mathrm{B} h^2 = 0{,}0225 \pm 0{,}0006$. Über die mit WMAP sehr genau gemessene Temperatur der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung ($T_{CMBR} = 2{,}7255 \pm 0{,}0006$ K ergibt sich die Strahlungsenergiedichte zu $\Omega_\mathrm{R} h^2 = 2{,}47 \cdot 10^{-5}$ und schließlich für die dunkle Energie $\Omega_\Lambda = \Lambda/(3H_0^2) = 0{,}73 \pm 0.03$. Gibt man im Fit die Annahme der Flachheit des Universums auf, sind die WMAP-Daten allein nicht sehr sensitiv auf den Wert von Ω_tot. Zusammen mit anderen Messungen (direkte Messung der Hubble-Konstanten H_0 über die d_L-z-Kurve und die Messung sog. baryonischer akustischer Oszillationen) grenzen sie jedoch unter der Annahme, daß die dunkle Energie wirklich über eine strikte kosmologische Konstante mit $w_\Lambda = -1$ (Meßwert aus WMAP- und Supernova-Daten: $w_\Lambda = -0{,}98 \pm 0{,}05$) korrekt beschrieben wird, auf $\Omega_\mathrm{tot} = 1{,}002 \pm 0{,}011$ ein. Alle soeben zitierten Meßdaten stammen aus [Nak10], wo sich auch sehr gute Überblicksartikel zur Kosmologie finden.

Bei der Berechnung der Luminositätsabstand-Rotverschiebungsintegrals in (29) bzw. für das hier angenommene flache Universum (31) sowie des Lichtlaufzeit-Rotverschiebungsintegrals (32) kann also der Beitrag von Ω_R für $z \lesssim 1000$ vernachlässigt werden.

A Mathematica-Notebook zur Herleitung der Friedmann-Gleichungen

Die Friedmann-Gleichungen

FLRW-Metrik

```
In[1]:= q = {t, r, th, ph};

In[2]:= g = a[t]^2 {{1/ a[t]^2, 0, 0, 0},
           {0, -1/ (1 - K r^2), 0, 0}, {0, 0, -r^2 , 0}, {0, 0, 0, -r^2 Sin[th]^2}};

In[3]:= MatrixForm[g]
```

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a[t]^2}{1-K r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 a[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 a[t]^2 \mathrm{Sin}[th]^2 \end{pmatrix}$$

```
In[4]:= dq = {dt, dr, dth, dph};

In[5]:= FullSimplify[dq.g.dq]
```

Out[5]=

$$dt^2 + a[t]^2 \left(-dth^2\, r^2 + \frac{dr^2}{-1 + K r^2} - dph^2\, r^2\, \mathrm{Sin}[th]^2\right)$$

```
In[6]:= gcontra = Inverse[g];
```

Christoffelsymbole:

```
In[7]:= christ = Table[Table[
           Sum[1/ 2 gcontra[[ii]][[mi]] (D[g[[mi]][[ki]], q[[li]]] + D[g[[mi]][[li]], q[[ki]]] -
                D[g[[ki]][[li]], q[[mi]]]), {mi, 1, 4}], {ki, 1, 4}, {li, 1, 4}], {ii, 1, 4}];

In[8]:= Do[Print[MatrixForm[christ[[ii]]]], {ii, 1, 4}]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a[t]\, a'[t]}{1-K r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a[t]\, a'[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 a[t]\, \mathrm{Sin}[th]^2 a'[t] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{a'[t]}{a[t]} & 0 & 0 \\ \frac{a'[t]}{a[t]} & \frac{K r}{1-K r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r\left(1-K r^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\left(1-K r^2\right) \mathrm{Sin}[th]^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a'[t]}{a[t]} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{a'[t]}{a[t]} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Cos}[th]\, \mathrm{Sin}[th] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a'[t]}{a[t]} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cot}[th] \\ \frac{a'[t]}{a[t]} & \frac{1}{r} & \mathrm{Cot}[th] & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich sofort für den Ricci-Tensor (vollständig kovariante Komponenten) und der Ricci-Skalar

In[9]:=
```
RicciTen = FullSimplify[
  Table[Sum[D[christ[[li]][[ii]][[ki]], q[[li]]] - D[christ[[li]][[ii]][[li]], q[[ki]]] +
     Sum[christ[[li]][[ii]][[ki]] christ[[mi]][[li]][[mi]] - christ[[mi]][[ii]][[li]]
       christ[[li]][[ki]][[mi]], {mi, 1, 4}], {li, 1, 4}], {ii, 1, 4}, {ki, 1, 4}]]
```

Out[9]=
$$\left\{\left\{-\frac{3\,a''[t]}{a[t]},0,0,0\right\},\left\{0,\frac{2\left(K+a'[t]^2\right)+a[t]\,a''[t]}{1-K\,r^2},0,0\right\},\left\{0,0,r^2\left(2\left(K+a'[t]^2\right)+a[t]\,a''[t]\right),0\right\},\left\{0,0,0,r^2\,\mathrm{Sin}[th]^2\left(2\left(K+a'[t]^2\right)+a[t]\,a''[t]\right)\right\}\right\}$$

In[10]:=
```
RScal = FullSimplify[Sum[RicciTen[[al]][[be]] gcontra[[al]][[be]], {al, 1, 4}, {be, 1, 4}]]
```

Out[10]=
$$-\frac{6\left(K+a'[t]^2+a[t]\,a''[t]\right)}{a[t]^2}$$

Einsteintensor (vollständig kovariante Komponenten)

In[22]:=
```
GTen =
 FullSimplify[Table[RicciTen[[al]][[be]] - RScal / 2 g[[al]][[be]], {al, 1, 4}, {be, 1, 4}]]
```

Out[22]=
$$\left\{\left\{\frac{3\left(K+a'[t]^2\right)}{a[t]^2},0,0,0\right\},\left\{0,\frac{K+a'[t]^2+2\,a[t]\,a''[t]}{-1+K\,r^2},0,0\right\},\left\{0,0,-r^2\left(K+a'[t]^2+2\,a[t]\,a''[t]\right),0\right\},\left\{0,0,0,-r^2\,\mathrm{Sin}[th]^2\left(K+a'[t]^2+2\,a[t]\,a''[t]\right)\right\}\right\}$$

Form mit einem kontra- und einem kovarianten Index

In[23]:=
```
GTencontracov = FullSimplify[gcontra.GTen]
```

Out[23]=
$$\left\{\left\{\frac{3\left(K+a'[t]^2\right)}{a[t]^2},0,0,0\right\},\left\{0,\frac{K+a'[t]^2+2\,a[t]\,a''[t]}{a[t]^2},0,0\right\},\left\{0,0,\frac{K+a'[t]^2+2\,a[t]\,a''[t]}{a[t]^2},0\right\},\left\{0,0,0,\frac{K+a'[t]^2+2\,a[t]\,a''[t]}{a[t]^2}\right\}\right\}$$

Energie-Impuls-Tensor (vollständig kontravariante Komponenten)

In[24]:=
```
u = {1, 0, 0, 0};
```

In[26]:=
```
Tcontra = FullSimplify[Table[
   -P[x0] gcontra[[al]][[be]] + (rho[x0] + P[x0]) u[[al]] u[[be]], {al, 1, 4}, {be, 1, 4}]]
```

Out[26]=
$$\left\{\{\mathrm{rho}[x0],0,0,0\},\left\{0,\frac{\left(1-K\,r^2\right)P[x0]}{a[t]^2},0,0\right\},\left\{0,0,\frac{P[x0]}{r^2\,a[t]^2},0\right\},\left\{0,0,0,\frac{\mathrm{Csc}[th]^2\,P[x0]}{r^2\,a[t]^2}\right\}\right\}$$

Gemischte Komponenten

In[27]:=
```
Tcontracov = FullSimplify[Tcontra.g]
```

Out[27]=
$$\{\{\mathrm{rho}[x0],0,0,0\},\{0,-P[x0],0,0\},\{0,0,-P[x0],0\},\{0,0,0,-P[x0]\}\}$$

Lokale Erhaltungsgleichung (aus Bianchi-Identität des Einstein-Tensors): kovariante Divergenz über ersten Index

In[17]:=
```
Table[Sum[D[Tcontra[[al]][[ga]], q[[al]]], {al, 1, 4}] +
  Sum[christ[[al]][[al]][[mu]] Tcontra[[mu]][[ga]] +
    christ[[ga]][[al]][[mu]] Tcontra[[al]][[mu]], {al, 1, 4}, {mu, 1, 4}], {ga, 1, 4}]
```

Out[17]=
$$\left\{\frac{3\,P[x0]\,a'[t]}{a[t]}+\frac{3\,\mathrm{rho}[x0]\,a'[t]}{a[t]},0,0,0\right\}$$

Literatur

[Nak10] K. Nakamura, Review of particle physics, J. Phys. G **37**, 075021 (2010), `http://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/37/7A/075021`.

[Wei89] S. Weinberg, The cosmological constant problem, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989), `http://link.aps.org/abstract/RMP/V61/P1`.

[Wei00] S. Weinberg, The cosmological constant problems (2000), `http://arxiv.org/abs/astro-ph/0005265`.