# Die Feldgleichung der Gravitation



## Die Einstein-Hilbert-Wirkung für das freie Gravitationsfeld

Das starke ÄP legt die Annahme nahe, daß die Raum-Zeit-Metrik das Gravitationsfeld beschreiben sollte. Um die entsprechenden Gleichungen zu finden, suchen wir eine entsprechende Lagrange-Dichte für das skalare Wirkungsfunktional

$$A[g_{\mu\nu}] = \int dV^{(4)} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{g}\, \mathcal{L}$$

mit einer skalaren Lagrangedichte.

Wir verlangen, daß

(a) Die Feldgleichungen manifest kovariant sind
$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ muß Skalar von $g_{\mu\nu}$ und seinen Ableitungen sein

(b) Die Feldgleichungen sollen von höchstens zweiter Ordnung in den Ableitungen sein und durch das Hamiltonsche Prinzip

$$\delta A = 0 \quad \text{mit } \delta x^\mu = 0 \,;\ \delta g^{\mu\nu} = 0 \text{ im Unendlichen}$$

gegeben sein

Aufgrund des Gaußschen Satzes sind wie in der SRT-Feld-Theorie Lagrange-Dichten, welche sich nur um kovariante (!) Divergenzen unterscheiden

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + D_\mu W^\mu = \mathcal{L} + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)$$

da sich $\delta A$ damit nicht ändert, weil

$$\int dV^{(4)} D_\mu V^\mu = \int dF_\mu^{(3)} V^\mu$$

Es darf $\mathcal{L}$ also auch zweite Ableitungen der Metrik enthalten, solange diese nur linear auftreten. Das ist für den Krümmungsskalar der Fall. Es gilt nämlich (S. 20):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\beta\partial_\gamma g_{\alpha\delta} + \partial_\alpha\partial_\delta g_{\beta\gamma} - \partial_\beta\partial_\delta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha\partial_\gamma g_{\beta\delta}\right)$$
$$+ g_{\mu\nu}\left(\Gamma^\mu_{\alpha\delta}\Gamma^\nu_{\beta\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\Gamma^\nu_{\beta\delta}\right),$$

und die Christoffelsymbole enthalten nur 1. Ableitungen.

Nun ist:

$$R = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

d.h. $R$ enthält die zweiten Ableitungen nur linear mit Koeffizienten, die selbst keine Ableitungen enthalten. D.h. wir können als Ansatz für die Wirkung

$$A[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g}\left[-\frac{c^3}{16\pi\gamma} R\right]$$

Das Vorzeichen ist hier willkürlich. Wir werden aber sehen, daß es korrekt gewählt ist, wenn wir die Materie in der Wirkung berücksichtigen.

Um die Feldgleichungen zu gewinnen, müssen wir die Variation nach den $g_{\mu\nu}$ bilden. Dazu schreiben wir den Krümmungstensor zunächst wieder mit Hilfe der Christoffelsymbole (S. 19)

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}$$

$$\Rightarrow R = g^{\beta\delta}\left[\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right]$$

Für die Terme mit den Ableitungen schreiben wir

$$\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\delta} = \partial_\alpha \left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\right) - \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\, \partial_\alpha \left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right)$$

und

$$\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \partial_\delta \left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\right) - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\, \partial_\delta \left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right)$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\, R = {} & \partial_\alpha \left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\right) - \partial_\delta \left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\right) \\ & + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\, \partial_\delta \left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right) - \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\, \partial_\alpha \left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right) \\ & + \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta} \left[\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right]\end{aligned}$$

Wir können also in der Wirkung statt $\sqrt{-g}\, R$ auch*

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\, G = {} & \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\, \partial_\delta \left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right) - \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\, \partial_\alpha \left(\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\right) \\ & + \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta} \left(\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right)\end{aligned}$$

Dies wollen wir noch etwas vereinfachen. Dazu benötigen wir einige Beziehungen der Christoffel-Symbole:

---

* $G$ ist kein Skalar, aber die Variation von $\int d^4x \sqrt{-g}\, G$ schon, weil $\delta \int d^4x \sqrt{-g}\, G = \delta \int d^4x \sqrt{-g}\, R$ ist, und $R$ ist ein Skalar!

Es gilt

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\cancel{\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\mu}}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}} - \cancel{\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}} \overset{S.26}{=} \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = \partial_{\beta}\left[\ln\sqrt{-g}\right]} \quad (1)$$

und

$$g^{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\gamma}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\gamma}\left(2\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

Nun ist (S. 26)

$$\partial_{\mu} g = \frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = g\, g^{\beta\gamma}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}} = -g\, g_{\beta\gamma}\frac{\partial g^{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}}$$

$$\Rightarrow g^{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\gamma}\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{1}{2g} g^{\alpha\mu}\frac{\partial g}{\partial x^{\mu}}$$

Weiter gilt

$$\partial_{\gamma}(\underbrace{g_{\beta\mu} g^{\alpha\mu}}_{\delta_{\beta}^{\alpha}}) = 0 \Rightarrow (\partial_{\gamma} g_{\beta\mu})\, g^{\alpha\mu} = -g_{\beta\mu}\partial_{\gamma} g^{\alpha\mu}$$

$$\Rightarrow g^{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = -\partial_\gamma g^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2g} g^{\alpha\gamma}\partial_\gamma g$$

$$= -\partial_\gamma g^{\alpha\gamma} - \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\alpha\gamma}\partial_\gamma(\sqrt{-g})$$

$$\boxed{g^{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\gamma\left[\sqrt{-g}\, g^{\alpha\gamma}\right]} \quad (2)$$

Von S. 26 notieren wir noch

$$\partial_\alpha\sqrt{-g} = -\frac{\partial_\alpha g}{2\sqrt{-g}} \overset{S.26}{=} -2g\,\Gamma^\mu_{\mu\alpha}\frac{1}{2\sqrt{-g}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\alpha\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\,\Gamma^\mu_{\mu\alpha}} \quad (3)$$

$\Rightarrow$ (S. 30)

$$\sqrt{-g}\, G = -\sqrt{-g}\,\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} g^{\beta\delta}\Gamma^\mu_{\beta\delta}$$

$$-\Gamma^\alpha_{\beta\delta}\left[\sqrt{-g}\,\Gamma^\mu_{\mu\alpha} g^{\beta\delta} + \sqrt{-g}\,\partial_\alpha g^{\beta\delta}\right]$$

$$+\sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\left[\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right]$$

$$= \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\left\{\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right\}$$

$$-\sqrt{-g}\,\partial_\alpha g^{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\delta}$$

$$\overset{(5.30)}{\Longrightarrow} \sqrt{-g}\, G = \underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}} \cdot \left[ -\sqrt{-g}\, \cancel{g^{\beta\delta}}\, \Gamma^{\mu}_{\beta\delta} \right]$$

$$- \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} \left[ \underset{\substack{\uparrow \\ (3)}}{\sqrt{-g}}\, \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}\, g^{\beta\delta} + \partial_\alpha g^{\beta\delta} \sqrt{-g} \right]$$

$$+ \sqrt{-g} \cdot g^{\beta\delta} \left( \cancel{\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\delta}} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \right)$$

$$= -\sqrt{-g}\, \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\, g^{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} \left( \partial_\alpha g^{\beta\delta} \right) \sqrt{-g}$$

$$- \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$$

---

$$\partial_\alpha g^{\beta\delta} \overset{(5.30)}{=} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\, g^{\mu\delta} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\mu}\, g^{\mu\beta}$$

---

$$\Longrightarrow \sqrt{-g}\, G = -\sqrt{-g}\, \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\, g^{\beta\delta} + 2\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, g^{\beta\delta} \sqrt{-g}$$

$$- \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta}\, \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{\sqrt{-g}\, G = \sqrt{-g}\, g^{\beta\delta} \left[ \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} \right]}$$

Um die Feldgleichungen zu gewinnen, müssen wir die Variation von $\sqrt{-g}\,G$ bzw. $\sqrt{-g}\,R$

Dazu benötigen wir

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\,\delta g_{\mu\nu}$$

$$\boxed{\delta\sqrt{-g} \overset{(5.26)}{=} \frac{\sqrt{-g}}{2}\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}}$$

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta} = \frac{1}{2}\,\delta\left[g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^{\beta}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta g^{\alpha\beta}\left(\partial_\delta g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\delta} - \partial_\beta g_{\mu\delta}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\left(\partial_\delta\,\delta g_{\beta\mu} + \partial_\mu\delta g_{\beta\delta} - \partial_\beta\delta g_{\mu\delta}\right)$$

Es gilt

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma} \Rightarrow \delta g^{\alpha\beta}\,g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\delta}\,\delta g_{\delta\gamma} = 0$$

$$\Rightarrow \delta g^{\alpha\beta} = -\delta g_{\delta\gamma}\,g^{\alpha\delta}\,g^{\beta\gamma}$$

$$= -\delta g_{\gamma\delta}\,g^{\alpha\gamma}\,g^{\beta\delta}$$

$$\Rightarrow \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta} = -\delta g_{\gamma\rho}\,g^{\alpha\gamma}\,\Gamma^{\rho}_{\mu\delta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\delta\delta g_{\beta\mu} + \partial_\mu\delta g_{\beta\delta} - \partial_\beta\delta g_{\mu\delta}\right)$$

Weiter gilt

$$\partial_\delta \delta g_{\beta\mu} = D_\delta \delta g_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\delta\mu} \delta g_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\delta\beta} \delta g_{\alpha\mu} \quad ①$$

$$\partial_\mu \delta g_{\beta\delta} = D_\mu \delta g_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \delta g_{\alpha\delta} \; ② + \Gamma^\alpha_{\mu\delta} \delta g_{\alpha\beta}$$

$$\partial_\beta \delta g_{\mu\delta} = D_\beta \delta g_{\mu\delta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \delta g_{\alpha\delta} \; ② + \Gamma^\alpha_{\beta\delta} \delta g_{\alpha\mu} \quad ①$$

$$\Rightarrow \partial_\delta \delta g_{\beta\mu} + \partial_\mu \delta g_{\beta\delta} - \partial_\beta \delta g_{\mu\delta} = D_\delta \delta g_{\beta\mu} + D_\mu \delta g_{\beta\delta} - D_\beta \delta g_{\mu\delta} + \underbrace{2\Gamma^\nu_{\delta\mu} \delta g_{\nu\beta}}$$

$$\Rightarrow \delta\Gamma^\alpha_{\mu\delta} = \cancel{- \delta g_{\gamma\varsigma}\, g^{\alpha\gamma}}\; \Gamma^\varsigma_{\mu\delta} \quad ①$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( D_\delta g_{\beta\mu} + D_\mu \delta g_{\beta\delta} - D_\beta \delta g_{\mu\delta} \right)$$

$$+ \underbrace{\Gamma^\nu_{\delta\mu} \delta g_{\nu\beta}\, g^{\alpha\beta}}_{\cancel{\Gamma^\varsigma_{\mu\delta} \delta g_{\varsigma\gamma}\, g^{\alpha\gamma}}} \quad ①$$

$$\Rightarrow \delta\Gamma^\alpha_{\mu\delta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( D_\delta \delta g_{\beta\mu} + D_\mu \delta g_{\beta\delta} - D_\beta \delta g_{\mu\delta} \right)$$

Tensor!

$$\delta R_{\beta\delta} = \delta\left[\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\mu_{\beta\alpha}\right] \quad (36)$$

Da $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta}$ Tensor ist, gilt

$$\partial_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} = D_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\delta} + \cancel{\Gamma^\mu_{\alpha\delta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\beta}}$$

$$- \left(D_\delta \delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} + \Gamma^\mu_{\delta\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \cancel{\Gamma^\mu_{\delta\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\beta}}\right)$$

$$- \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\delta\Gamma^\mu_{\beta\delta} + \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\delta\Gamma^\mu_{\beta\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta R_{\beta\delta} = D_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - D_\delta \delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \quad \text{(Palatini-Identität)}}$$

Betrachten wir nun die Variation.

$$\delta(\sqrt{g}\,R) = \delta\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\right)$$

$$= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\,\delta(\sqrt{g}) + \sqrt{g}\, R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$$

$$+ \sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}$$

Den letzten Term können wir mit der Palatini-Identität umformen

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} D_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} D_\nu \delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}$$

$$\underset{(D_\delta g^{\mu\nu} \equiv 0)}{=} D_\alpha\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - D_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\right)$$

$$= D_\alpha\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\alpha\mu}\Gamma^\beta_{\mu\beta}\right)$$

Damit ist

$$\int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\, \delta R_{\mu\nu} = \int dV^{(4)}\, g^{\mu\nu}\, \delta R_{\mu\nu}$$

nach dem Gaußschen Satz ein reines Hyperflächenintegral, dessen Variation verschwindet. Für den zweiten Term in der Variation brauchen wir noch folgendes

$$g_{\mu\nu}\, g^{\nu\rho} = \delta_\mu{}^\rho \Rightarrow \delta g_{\mu\nu}\, g^{\nu\rho} + g_{\mu\nu}\, \delta g^{\nu\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta g^{\mu\nu} = -\delta g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\mu}\, g^{\beta\nu}}$$

$$\Rightarrow \delta(\sqrt{-g}\, R) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\, \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu}$$

$$\overset{(S.34)}{=} \frac{\sqrt{-g}}{2} R\, g^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} - \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\, g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}\, \delta g_{\alpha\beta}$$

$$= -\delta g_{\mu\nu} \left[ R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g}$$

Aus dem Hamiltonschen Prinzip ergeben sich also die Feldgleichungen für das Gravitationsfeld im materiefreien Raum:

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{(Einstein-Gleichung für das freie Gravitationsfeld)}}$$

„Ankopplung" von „Materie"

Um auch die Erzeugung des Gravitationsfeldes aus Materieverteilungen beschreiben zu können, benötigen wir einen entsprechenden Lagrangian für die „Materie".

Als Beispiel betrachten wir das elektromagnetische Feld.*

In der SRT ist die Wirkung für das freie em. Feld (in Heaviside-Lorentz-Einheiten)

$$S_{em}[A] = -\frac{1}{4c}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{SRT!})$$

mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Das übersetzen wir in die ART, in dem wir das kovariant schreiben:

$$S_{em}[A] = -\frac{1}{4c}\int dV^{(4)}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

mit $F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu \overset{(5.23)}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\Rightarrow S_{em}[A] = -\frac{1}{4c}\int d^4x\sqrt{-g}\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unabh. von}}}{F_{\mu\nu}} F_{\rho\sigma}\, g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}$$

Variation nach $g_{\alpha\beta}$:

$$\Rightarrow \delta\left[\sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\, g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}\right]$$

$$= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\left(g^{\mu\rho}\delta g^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma}\delta g^{\mu\rho}\right)$$

$$= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} - \sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$$

$$\cdot\left(g^{\mu\rho} g^{\alpha\nu} g^{\beta\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\rho}\right)\delta g_{\alpha\beta}$$

---

*Im Zsh. mit der SRT ist alles, was nicht mit dem Gravitationsfeld zu tun hat, „Materie", also auch em. Strahlung!

$$\Rightarrow$$

$$\delta\left[\sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] = \frac{\sqrt{-g}}{2}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}$$

$$-\sqrt{-g}\left(F_{\mu}{}^{\alpha}F^{\mu\beta} + F^{\alpha\sigma}F^{\beta}{}_{\sigma}\right)\delta g_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{-g}}{2}\left[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - 4 F^{\alpha}{}_{\mu}F^{\beta\mu}\right]\delta g_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \delta S_{em} = \int dV^{(4)}\, \frac{1}{2c}\underbrace{\left[F^{\alpha}{}_{\mu}F^{\beta\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\right]}_{-T^{\alpha\beta}}\delta g_{\alpha\beta}$$

$\uparrow$ Energie-Impulstensor

Für das Gravitationsfeld gilt

$$\delta S_{grav} = -\frac{c^3}{16\pi G}\,\delta\int dV^{(4)}\, R$$

$$= +\frac{c^3}{16\pi G}\int dV^{(4)}\left[R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R g^{\alpha\beta}\right]$$

$$\Rightarrow \delta S_{tot} = \delta S_{em} + \delta S_{grav} = \int dV^{(4)}\left[\frac{c^3}{16\pi G}\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R g^{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2c}T^{\alpha\beta}\right]\delta g_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{R^{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}}$$

Dies sind die Einsteinschen Feldgleichungen in ihrer Form ohne kosmologische Konstante.

Wir können uns nun auch allgemeinere „Materie"-Lagrange-Dichten vorstellen. Die Variationsableitung der entsprechenden kovarianten Wirkung definieren wir allgemein als Energie-Impulstensor.

~~Wir kommen darauf weiter unten noch zurück. Zunächst befassen wir uns aber mit einigen allgemeinen Eigenschaften der Einsteingleichungen.~~

## Zur Eindeutigkeit der Einsteingleichungen

Da die Feldgleichungen konstruktionsgemäß invariant unter Koordinatentransformationen sind, können wir zunächst den Krümmungstensor in einem Punkt in einem lokalen Inertialsystem betrachten.

In diesem gilt

$$g^*_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (= \mathrm{diag}(1,-1,-1))$$

$$\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} = 0$$

für den betrachteten Punkt.

Wir setzen weiter voraus, daß für den betrachteten Punkt

$$x^{*\mu} = 0$$

ist.

Wir betrachten nun eine Trafo zu neuen Koordinaten in der Form

$$x^\alpha = x^{*\alpha} + \frac{1}{3!} D^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, x^{*\beta} x^{*\gamma} x^{*\delta}$$

↑ symmetrisch unter Vertauschung dieser 3 Indizes.

Dann ist

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{*\beta}} = \partial^*_\beta x^\alpha = \delta^\alpha{}_\beta + \frac{1}{2!} D^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, x^{*\gamma} x^{*\delta}$$

Im betrachteten Punkt $x^\alpha = 0$ ($\Leftrightarrow x^{*\alpha} = 0$) folgt daraus

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \overset{S.12}{=} \partial^*_{\beta'} x^\beta\, \partial^*_{\gamma'} x^\gamma\, \frac{\partial x^{*\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\, \Gamma^{*\alpha'}_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^{*\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{*\mu}}$$

Es folgt, daß

$$g_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}\,; \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \quad \text{für } x^\mu = 0$$

und

$$\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma} = \partial^*_\delta \Gamma^{*\alpha}_{\ \beta\gamma} - D^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} \qquad (x^\mu = 0)$$

Setzen wir nun

$$D^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} = \frac{1}{3}\left(\partial^*_\beta \Gamma^{*\alpha}_{\ \gamma\delta} + \partial^*_\gamma \Gamma^{*\alpha}_{\ \delta\beta} + \partial^*_\delta \Gamma^{*\alpha}_{\ \beta\gamma}\right)$$

folgt

$$\boxed{\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma} + \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\ \gamma\delta} + \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\ \delta\beta} = 0 \quad (x^\mu = 0)} \qquad (*)$$

Man nennt solche Koordinaten im Punkt $x^\mu = 0$ kanonische Koordinaten.

In einem solchen Koordinatensystem gilt

$$R^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} \underset{\substack{\uparrow \\ (S.18)}}{\overset{\text{kan}}{=}} \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\ \beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma}$$

$$\Rightarrow R^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\ \gamma\beta\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\ \beta\delta} + \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\ \gamma\delta} - 2\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma}$$

$$\overset{(*)}{=} -3\,\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma}$$

Andererseits ist wegen der Definition der Christoffelsymb. bzw. $D_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} \Gamma^\mu_{\ \beta\gamma} + g_{\beta\mu} \Gamma^\mu_{\ \alpha\gamma}$$

$$\Rightarrow \partial_\delta \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \overset{\text{kan}}{=} g_{\alpha\mu}\, \partial_\delta \Gamma^\mu_{\ \beta\gamma} + g_{\beta\mu}\, \partial_\delta \Gamma^\mu_{\ \alpha\gamma}$$

$$= -\frac{1}{3} g_{\alpha\mu} \left(R^\mu_{\ \beta\gamma\delta} + R^\mu_{\ \gamma\beta\delta}\right)$$

$$- \frac{1}{3} g_{\beta\mu} \left(R^\mu_{\ \alpha\gamma\delta} + R^\mu_{\ \gamma\alpha\delta}\right)$$

$$\Rightarrow \partial_\delta \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \overset{\text{kan}}{=} -\frac{1}{3}\left(\cancel{R_{\alpha\beta\gamma\delta}} + R_{\alpha\gamma\beta\delta} + \cancel{R_{\beta\alpha\gamma\delta}} + R_{\beta\gamma\alpha\delta}\right)$$

Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors

$$\overset{\downarrow}{=} -\frac{1}{3}\left(R_{\alpha\gamma\beta\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma}\right)$$

Man kann also in kanonischen Koordinaten die zweiten Ableitungen von $g_{\alpha\beta}$ mit dem Krümmungstensor ausdrücken. Alle aus 1. und 2. Ableitungen gebildeten Tensoren können folglich mit $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ und $g_{\alpha\beta}$ gebildet werden. Das gilt wegen der Transformationseigenschaften von Tensoren offenbar in jedem Koordinatensystem.

Der einzige Skalar, der sich aus dem Metriktensor und den 1. und 2. Ableitungen bilden läßt, wobei die 2. Ableitungen nur linear auftreten, ist also der Ricci-Skalar $R = g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} R_{\alpha\gamma\beta\delta}$.

Damit ist der allgemeinste Lagrangian für das Gravitationsfeld

$$\mathcal{L}_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\left(R + 2\Lambda\right)$$

mit $\Lambda = \text{const.}$ (Kosmologische Konstante)

Da die Wirkung durch das kovariante Integral gegeben ist, d.h.

$$S_g\left[g^{\alpha\beta}\right] = \int dV^{(4)} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_g$$

liefert die kosmologische Konstante bei der Variation nach $g_{\alpha\beta}$ einen nicht verschwindenden Beitrag; denn es gilt ja

$$\delta\sqrt{-g} \overset{5.34}{=} \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

und die Einsteinschen Feldgleichungen verallgemeinern sich zu

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}}$$

Dabei haben wir den „Kosmologischen Term" auf die rechte Seite geschrieben, interpretieren ihn also als Beitrag zum Energie-Impuls-Tensor der Materie („Dunkle Energie").

## Physikalische Eigenschaften der Einsteingleichungen

Wir könnten nun annehmen, daß die Einsteingleichungen die 10 unabhängigen Komponenten von $g_{\mu\nu}$ bei Vorgabe des Energie-Impulstensors vollständig bestimmen würde. Das widerspricht aber der allgemeinen Freiheit, Koordinaten frei zu wählen, so daß wir eigentlich den $g_{\mu\nu}$ noch vier Nebenbedingungen auferlegen können müßten. In Analogie zur E-Dyn nennt man diese Freiheit "Eichinvarianz"). Nun erfüllt nämlich der Einstein-Tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

die Bianchi-Identitäten

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

Beweis:

In einem lokalen Inertialsystem ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$; $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$) gilt

$$D_\mu R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\mu R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\mu(\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta})$$

$$\Rightarrow \quad D_\mu R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + D_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\mu} + D_\delta R^\alpha{}_{\beta\mu\gamma} \stackrel{LI}{=}$$

$$\partial_\mu(\partial_\delta \cancel{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}^{1} - \partial_\gamma \cancel{\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}^{2})$$
$$+ \partial_\gamma(\partial_\mu \cancel{\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}^{2} - \partial_\delta \cancel{\Gamma^\alpha_{\beta\mu}}^{3})$$
$$+ \partial_\delta(\partial_\gamma \cancel{\Gamma^\alpha_{\beta\mu}}^{3} - \partial_\mu \cancel{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}^{1}) = 0$$

Da dies eine Tensoridentität ist, gilt sie in jedem Koordinatensystem: (44)

$$\Rightarrow \boxed{D_\mu R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + D_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\mu} + D_\delta R^\alpha{}_{\beta\mu\gamma} = 0}$$

Bianchi-Identität für den Krümmungstensor

Kontraktion bzgl. $\alpha$ und $\gamma$ liefert

$$D_\mu R_{\beta\delta} + D_\alpha R^\alpha{}_{\beta\delta\mu} - D_\delta R_{\beta\mu} = 0$$

Weitere Kontraktion bzgl. $\beta$ und $\delta$:

$$D_\mu R - 2 D_\alpha R^\alpha{}_\mu = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{D_\alpha R^\alpha{}_\mu = \frac{1}{2} D_\mu R}$$

Bianchi-Identität für Ricci Tensor

In der Tat ist also

$$D_\mu G^{\mu\nu} = D_\mu R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} D_\mu (R g^{\mu\nu})$$

$$= \frac{1}{2} D^\nu R - \frac{1}{2} (D_\mu R) g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \cancel{D_\mu} g^{\mu\nu}$$

$$= 0$$

Das bedeutet, daß von den 10 Einsteingleichungen in der Tat 4 redundant sind. Außerdem muß zwingend

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

gelten, d.h. es muß notwendig ein lokaler Erhaltungssatz für Energie und Impuls gelten.

# Nichtrel. Limes

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)\, u^\mu u^\nu - p\, g^{\mu\nu}$$ (Energie-Impulstensor für ideales Fluid)

$\varepsilon$: Energiedichte im lokalen Ruhsystem der Materie.

$u^\mu$: Vierergeschwindigkeit $\cdot \frac{1}{c} \Rightarrow u_\mu u^\mu = 1$.

$p$: Druck im lokalen Ruhsystem.

Nichtrelativistischer Limes: $(u^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $p \ll \varepsilon$; $\varepsilon = \rho c^2$

$\rho$: Ruhmassendichte. $\Rightarrow T^{00} = \varepsilon = \rho c^2$

Für die Einsteingleichungen gilt

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu},$$

Kontraktion über $\mu\nu$: $(g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\mu = 4)$

$$-R = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad \text{mit } T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right)$$

$$\Rightarrow R_{00} \cong \frac{8\pi G}{c^4}\left(\rho c^2 - \frac{1}{2}\rho c^2\right) = \frac{4\pi G}{c^2}\rho$$

Dabei sind wir davon ausgegangen, daß

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

ist mit $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Von S. 9 wissen wir, daß in der NR Näherung $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$ ist, d.h. wir gehen davon aus, daß $|h_{\mu\nu}| \simeq \mathcal{O}\left(\frac{\varphi}{c^2}\right) \ll 1$ ist. Dies rechtfertigt auch die obige Näherung bei der Berechnung von $T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ und $T g^{\mu\nu} \simeq T \eta^{\mu\nu}$.

(45.2)

Entsprechend dürfen wir bei der Berechnung des Krümmungstensors in der Form auf S. 20. Die in den Christoffelsymbolen quadratischen Terme vernachlässigen. Ebenso bei den Ableitungen von $g_{\alpha\beta}$ die Ableitungen nach $x^0 \equiv ct$ gegen über den räumlichen Ableitungen

Dann ist

$$R_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \cong \eta^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma} \left( \partial_\beta \partial_\gamma g_{\alpha\delta} + \partial_\alpha \partial_\delta g_{\beta\gamma} - \partial_\beta \partial_\delta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\delta} \right)$$

$$\Rightarrow R_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma} \left( \partial_0 \partial_\gamma g_{\alpha 0} + \partial_\alpha \partial_0 g_{0\gamma} - \partial_0 \partial_0 g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{00} \right)$$

$$\simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma} \partial_\alpha \partial_\gamma g_{00} \simeq \frac{1}{2} \Delta g_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \varphi = 4\pi G \rho}$$

Dies ist in der Tat die Newtonsche Gleichung für das Gravitationspotential