Tensoren in der Physik

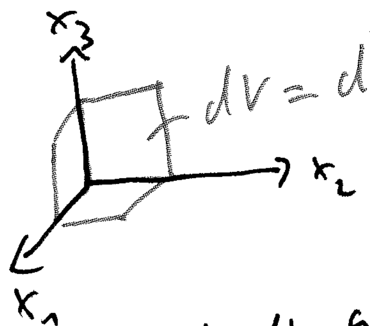
(1) Kartesische Tensoren im Euklidischen $\mathbb{R}^3$

Der Einfachheit halber hier alle Indizes unten, denn in kartesischer Basis

$$g_{ab} = g^{ab} = \delta_{ab}$$

Kontinuumsmechanik (nichtrelativistisch)

Betrachte kontinuierliches Medium. abgegrenztes Volumenelement mit



$dV = d^3\vec{x} = dx_1\, dx_2\, dx_3$

Kraft setzt sich zusammen aus

(a) Volumenkraft

$$d\vec{F}_{vol} = \vec{f}\, d^3\vec{x}$$

$\vec{f}$: Kraftdichte

(b) Spannungen, die an Oberfläche des Volumenelements angreifen

$$d\vec{F}_{spann} = \hat{\tau}\, d^2\vec{F}$$

$d^2\vec{F}$: Flächennormalenvektor

$\hat{\tau}$: Spannungstensor

oder in Komponenten

$$dF_{spann,i} = \tau_{ik}\, dF_k$$

Mit dem Gaußschen Satz kann man dies als Volumenkraft schreiben:

$$dF_{spann,i} = \underset{\uparrow}{\tau_{ik|k}}\, d^3\vec{x}$$

partielle Ableitung

Newtonsche Bewegungsgleichung für Volumenelement

$\rho : \frac{dm}{d^3\vec{x}}$ Massendichte

$$\cancel{d^3\vec{x}\ \rho\ \frac{dv_i}{dt} =}$$

$$d^3\vec{x}\ \rho\ D_t v_i = (f_i + \tau_{ik|k})\, d^3\vec{x}$$

$D_t v_i$: Geschwindigkeitsänderung pro Zeit eines materiellen Volumenelements, d.h. Beschleunigung eines Teils der Materie bestehend aus denselben Teilchen!

$$D_t v_i = \partial_t v_i + v_k v_{i|k}$$

$$\equiv \partial_t v_i + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\, v_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho\,(\partial_t v_i + v_k v_{i|k}) = f_i + \tau_{ik|k}}$$

Euler-Gleichungen der Fluidmechanik (ideale Fluide)

Fluid: Gas oder Flüssigkeit

Pascalsches Gesetz: Spannungen isotrop, d.h.

$$\tau_{jk} = -p\,\delta_{jk}$$

p: Druck (Vz. Konvention)

$\Rightarrow$ Bewegungsgl.

$$\rho D_t v_j = \rho\left[\partial_t v_j + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,v_j\right]$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_j} + f_j$$

$$= -p_{,j} + f_j$$ (Euler-Gleichung für ideales Fluid)

Ideales Fluid: keine Reibung oder Wärmeleitung (keine Dissipation!)

„Trockenes Wasser"

Eulergleichung: 3 partielle DGLs (für $j \in \{1,2,3\}$)
aber 5 Unbekannte: $\rho(t,\vec{x})$, $v_j(t,\vec{x})$; $p(t,\vec{x})$

Brauche noch 2 weitere Gln.
Eine folgt aus Erhaltung der Masse: Im Zeitintervall dt strömt $dm = dt\, d^3\vec{x}\, \partial_t \rho$ Masse aus ($\partial_t\rho < 0$) oder ein ($\partial_t \rho > 0$). Diese Masse muß durch Oberfläche strömen, d.h. sie kann nicht erzeugt oder vernichtet werden, d.h.

$$dm = -\rho\,\vec{v}\,dt\cdot d^2\vec{F}$$

oder mit Gaußschem Satz

$$dm = -(\rho v_j)_{|j}\, dt\, d^3\vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t \rho + (\rho v_j)_{|j} = 0 \quad \text{(Kontinuitätsgleichung)}$$

5. Gleichung: Zustandsgleichung der Materie

$$P = P(\rho, T)$$

T: Temperatur

ideales Gas (Bsp.)

$$p = n k_B T$$

k_B: Boltzmannkonstante

$n = \frac{\rho}{m_{mol}}$: Teilchenzahldichte

m_{mol}: Masse eines Moleküls/Atoms

Ideales Fluid: u.a. kein Wärmetransport
$\Rightarrow$ Zustandsänderung adiabatisch

s: Entropie-Dichte pro Masse

$$\partial_t(\rho s) + \partial_j(\rho s v_j) = 0$$

bzw. mit Kontinuitätsgl.

$$\cancel{\partial_t \rho\, s} + \rho\, \partial_t s + \partial_j s\, \rho v_j + \cancel{s\, \partial_j(\rho v_j)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t s + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} s = 0$$

Energiebilanz

$$\tilde{\varepsilon} = \underbrace{\frac{\rho}{2}\vec{v}^2}_{\text{kinetische Energie}} + \rho\,\varepsilon$$

$\rho\varepsilon \to$ innere Energie

$\varepsilon \to$ innere Energie pro Masse

$$\partial_t \tilde{\varepsilon} = \frac{\dot{\rho}}{2}\vec{v}^2 + \rho\,\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} + \partial_t(\rho\varepsilon)$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{v}^2\,\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) - \vec{v}\cdot\big(\vec{\nabla}p + \rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\big) + \partial_t(\rho\varepsilon)$$

$(*)$

$$= -\frac{1}{2}\vec{v}^2\,\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}p - \frac{\rho}{2}\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}^2 + \partial_t(\rho\varepsilon)$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{v}^2$$

$$dw = T\,ds + \frac{1}{\rho}dp \Rightarrow \rho\vec{\nabla}w = T\rho\,\vec{\nabla}s + \vec{\nabla}p$$

$$\Rightarrow \partial_t\tilde{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\vec{v}^2\,\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) - \vec{v}\cdot\Big(-T\rho\,\vec{\nabla}s + \rho\vec{\nabla}w + \frac{\rho}{2}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}v^2\Big) + \partial_t(\rho\varepsilon)$$

$$\boxed{\begin{aligned}(*)\;& v_j\, v_k\,\partial_k v_j \\ &= \frac{1}{2}v_k\,\partial_k(v_j v_j)\end{aligned}}$$

$$d(\rho\varepsilon) \overset{*}{=} \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon$$

$$\cancel{= \varepsilon\,d\rho + \rho\Big(T\,ds - \frac{p}{\rho}d\rho\Big)}$$

$$= \varepsilon\,d\rho + \rho\Big(T\,ds + \frac{p}{\rho^2}d\rho\Big)$$

$$p\,dV = p\,d\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho} = -\frac{p}{\rho^2}d\rho$$

$$\Rightarrow d(\rho \varepsilon) = w\, d\rho + \rho\, T\, ds$$

$$\partial_t \rho\varepsilon = w \dot\rho + \rho T \dot s$$

$$= -w\, \vec\nabla\cdot(\rho\vec v) - \rho T \vec v\cdot\vec\nabla s$$

$$\Rightarrow \partial_t \tilde\varepsilon = -\frac{1}{2}\vec v^2\, \vec\nabla\cdot(\rho\vec v) + T\rho\, \cancel{\vec v\cdot\vec\nabla s}$$

$$- \rho\vec v\cdot\vec\nabla w + \frac{\rho}{2}\left[(\vec v\cdot\vec\nabla) v^2\right]$$

$$- w\, \vec\nabla\cdot(\rho\vec v) - \rho T\, \cancel{\vec v\cdot\vec\nabla s}$$

$$\cancel{= -\vec\nabla\cdot\left(\frac{\rho}{2}v^2 -\right.}$$

$$= -\vec\nabla\cdot(\rho\vec v)\left[\frac{1}{2}v^2 + w\right]$$

$$- \rho\vec v\cdot\left(\vec\nabla w + \frac{1}{2}(\vec v\cdot\vec\nabla) v^2\right)$$

$$= -\vec\nabla(\rho\vec v)\left[\frac{1}{2}v^2 + w\right]$$

$$- \rho\vec v\cdot\vec\nabla\left[\frac{1}{2}v^2 + w\right)$$

$$\partial_t \tilde\varepsilon = -\vec\nabla\cdot\Big[\underbrace{\left(\frac{\rho}{2}v^2 + \rho w\right)\vec v}_{\text{Energie-Stromdichte, } \vec S}\Big]$$

Impulsbilanz

Impulsdichte $\rho \vec{v}$

$$\partial_t (\rho v_j) = \dot{\rho} v_j + \rho \dot{v}_j$$

$$= - v_j \partial_k (\rho v_k) + \rho \left(- v_k \partial_k v_j - \frac{p_{,j}}{\rho} \right)$$

$$= - \partial_j p - \partial_k (\rho v_j v_k)$$

$$= - \partial_k (p \delta_{jk} + \rho v_j v_k)$$

$$= - \partial_k \Pi_{jk}$$

$\Rightarrow \Pi_{jk} = \rho v_k v_j + p \delta_{jk}$ ist Impulsstromdichte (j-te Impulskomponente)

offenbar Tensorkomponenten!

NB: Vollständiges System von Gln. auch

Energie-Bilanz:

$$\partial_t \tilde{\mathcal{E}} + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{\rho}{2} \vec{v}^2 + \rho w \right) \vec{v} \right] = 0$$

Impuls-Bilanz:

$$\partial_t (\rho v_j) + \partial_k \Pi_{jk} = 0$$

mit $\Pi_{jk} = \rho v_j v_k + p \delta_{jk}$

Massen-Bilanz

$$\partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j) = 0$$

Relativistische Hydrodynamik

Beginne mit SRT:

- In SRT Energie und Impuls zusammen Vierer-Vektor
- im momentanen Ruhsystem gelten nicht-rel. Gesetze
- formuliere alles mit Vierertensoren

Beginne mit Impulsbilanz und verwende jetzt untere und obere Indizes mit

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu \; ; \; \eta_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$$

Im Ruhsystem haben wir

$$(\overset{*}{T}^{ik}) = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$ als räumliche Untermatrix des Energie-Impulstensors

~~Energiebilanz im momentanen Ruhsystem~~:

$$\cancel{\partial_\mu \overset{*}{T}^{0\mu} = \frac{1}{c}\partial_t \overset{*}{T}^{00}}$$

Ansatz: $\overset{*}{T}^{00} = \varepsilon$ = Ruhenergiedichte (enthält $\frac{\Delta m c^2}{\Delta V}$!)

vgl. Viererimpuls in Punktmechanik: Energie $= c\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^2}$

Impuls!

Damit ist

$$(\overset{*}{T}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Im beliebigen Bezugssystem hat Fluid Vierergeschwindigkeit u^μ mit $u^\mu u_\mu = 1$. Dann hat man nur noch $g^{\mu\nu}$ als invariante (unter Lorentz-Trafos!) Tensorkomponenten

$$\Rightarrow \quad T^{\mu\nu} = A g^{\mu\nu} + B u^\mu u^\nu$$

in lok. Ruhesystem:

$$(\overset{*}{u}^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\overset{*}{T}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} A+B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A + B = \varepsilon$$
$$-A = p \quad \Rightarrow \quad B = \varepsilon + p = w^*$$

$\cancel{T^{00} = \varepsilon}$ ~~(Energiedichte)~~

$\cancel{\Rightarrow T^{0k} =}$

---

* oder Enthalpie pro Volumen! Pro Masse hier nicht bequem

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)\, u^\mu u^\nu - p\, g^{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$ Energiedichte

$$T^{00} = \frac{(\varepsilon + p)}{1-\beta^2} - p = \frac{\varepsilon}{1-\beta^2} + p\left(\frac{1}{1-\beta^2} - 1\right) = \frac{\varepsilon + p\beta^2}{1-\beta^2}$$

$$T^{0\alpha} = \frac{w\, \beta^\alpha}{1 - v^2/c^2}$$

$$T^{\alpha\beta} = \frac{w\, \beta^\alpha \beta^\beta}{1-\beta^2} + p\, \delta^{\alpha\beta}$$

Nicht-Rel. Limes

Es sei ϱ die Ruhedichte (Teilchenzahl pro Volumen im lok. Ruhesystem)

Dann ist $m n = \varrho\sqrt{1-\beta^2} \cong \varrho - \frac{\varrho}{2}\beta^2$

↳ bezieht sich auf Laborsystem (bzw. Massendichte der nrel. Rechnung)

$$T_{00} = \cancel{mnc^2 +}\ \varrho c^2 + \varrho\, \varepsilon_{NR}$$

$$= \frac{m n c^2 + \varrho\, \varepsilon_{NR}}{1-\beta^2} + O(\beta^2)$$

↳ Energiedichte pro Masse aus NR Rechnung

$$= \frac{\varrho c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \varrho\, \varepsilon_{NR} + O(\beta^3) = \varrho c^2 + \frac{\varrho}{2} v^2 + \varrho\, \varepsilon_{NR}$$

Energiebilanz

$$\partial_\mu T^{0\mu} = 0$$

$$\frac{1}{c}\partial_t T^{00} + \partial_i T^{0i} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t T^{00} + \partial_i \left(c T^{0i}\right) = 0 \Rightarrow \text{Energiestrom } c T^{0i}$$

Impulsbilanz

$$\partial_\mu T^{i\mu} = 0$$

$$\frac{1}{c}\partial_t T^{i0} + \partial_k T^{ik} = 0$$

$\frac{T^{i0}}{c}$ ist Impulsdichte $= c^{-2} \cdot$ Energiestromdichte

T^{ik}: Impulsstromdichte

NR Näherung:

$$\frac{1}{c} T^{i0} = \frac{\varepsilon + p}{c(1-\beta^2)}\beta^i$$

$$= \frac{mnc^2 + \rho w_{NR}}{c(1-\beta^2)}\beta^i$$

$$= \frac{\rho c \beta^i}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\rho w_{NR}}{c}\beta^i$$

$$= \rho v^i + \frac{v^i}{c^2}\left(\rho w_{NR} + \frac{\rho v^2}{2}\right) \simeq \rho v^i$$

NR-Energiestromdichte

$$S^i_{NR} = c\,T^{i0} - \rho c^2 v^i$$

$$= v^i \left(\rho w_{NR} + \frac{\rho v^2}{2} \right)$$

Anstelle Massenerhaltung: Teilchenzahlerhaltung

$$\overset{*}{n}{}^{\mu} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow n^{\mu} = n\,u^{\mu}$$