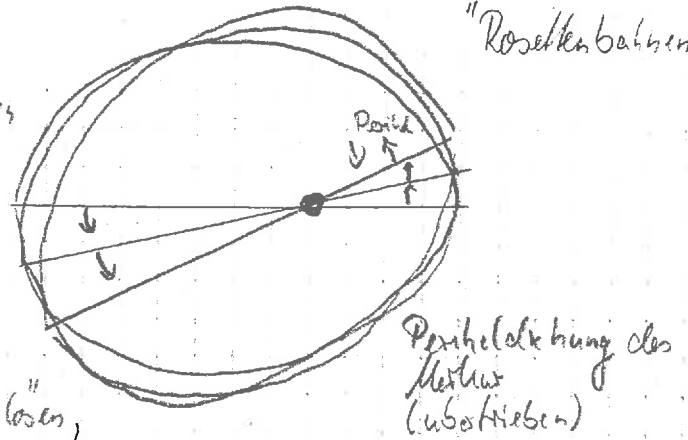


Periheliondriftung der Merkurbahn

"Rosettenbahnen"

Wir wenden uns nun der Kepler-Bewegung im Rahmen der Allg. Rel.-theorie zu. Beweis explizit die Bewegung eines massiven Körpers (idealisiert: Punktteilchen mit fast verschwindender Masse, das nicht die Metrik verändern soll) im Schwarzschildfeld lösen,



Punktteilchen mit fast verschwindender Masse, das nicht die Metrik verändern soll) im Schwarzschildfeld lösen,

rekapitulieren wir zunächst einige bekannte Resultate der klassischen Newtonschen Mechanik:

1.) 1.tes Keplersches Gesetz: Planeten bewegen sich auf geschlossenen elliptischen Bahnen in denen einem Brennpunkt die Sonne sitzt.

Aufgrund der Störungen, die die Planeten aufeinander ausüben, ist dieses Gesetz nicht exakt erfüllt, d.h. die Planetenbahnen sind nicht genau elliptisch.

Mittels der himmlischen Störungstheorie lässt sich aber die Bahn grosso modo präzisieren. Man findet, daß die (ungefähr) Bewegung der Planeten tatsächlich selbigen dem Keplerschen Gesetz folgt, mit Ausnahme der Bewegung des innersten Planeten Merkur,

bei dem eine unerklärte Drehung der Bahnachse um ca. 43 Bogensekunden je Jahr (bzw. 5600,73''/100 Jahre) übrig bleibt. Dieses Resultat wurde von Leverrier 1859 gefunden.

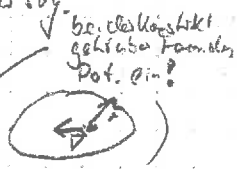
→ man spricht von der sog. Periheliondriftung!

2.) Bereits Newton wusste, daß eine kleine Abweichung vom $\frac{1}{r^2}$ -Gesetz der Gravitationskraft (vgl. Dicke: Applikation der Sonne liefert Quadrupolterm $V(r) = -\frac{GM}{r} [1 + D \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^2}] + \alpha \frac{1}{r^4}$)
 $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{GM}{r} - \frac{B}{r^3} \rightarrow$ mögl. alternative Erklärung (siehe Kap 6.6), die sich aber abnimmt abtrapebel erweitert)

daraus führt man ab, daß alle Planetenbahnen nicht geschlossen wären, sondern rosettenförmige Gestalt haben (Aufg. 28.4, Mechanik 1, W. Greiner, S. 359)

Die Ursache für die Geschlossenheit liegt am spez. $\frac{1}{r^2}$ -Gesetz (!), oder anders ausgedrückt, es existiert dann neben dem Drehimpulsvektor noch ein weiterer erhaltene Vektor, der sog.

Laplace-Runge-Vektor (Aufg. 26.11, Mechanik 1, W. Greiner, S. 301): $\vec{V} = \frac{1}{kMm} [\vec{L} \times \vec{p}] + \frac{\vec{r}}{r}$
 (erweist vom Brennpunkt zum Mittelpunkt und sein Betrag ist gleich der Exzentrizität der Bahn)



Wenden wir uns nun dem AR Kepler-Dreien zu. Als erstes nehmen wir an, daß die Sonne kugelförmig ist, so daß die Geometrie des Raumes, in dem sich die Planeten bewegen, durch die SSM beschrieben werden:

$$c^2 dt^2 = (1 - \frac{2m}{r}) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad m = \frac{GM_\odot}{c^2}$$

Für die Bewegung des Planeten idealisieren wir sie als Punktteilchen, die dann entsprechend der Geodätengleichung folgt. Man kann nun explizit (wie bereits getan) die Christoffel-Symbole $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ berechnen, man muß nur das Ergebnis für r, θ einsetzen. Wir können aber wesentlich eleganter die Dgl der geodätischen Linie aus einer Extremalbedingung (die (4-dim) Kurvenlänge) gewinnen

$$\delta \int dt = 0, \quad dt = \frac{1}{c} (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}}$$

Dieses werde einen kleinen Trick, indem wir in den Integral eine 1 einschreiben, die wir mittels obiger Gleichung durch Division mit dt erhalten, i.e.

$$c^2 = (1 - \frac{2m}{r}) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{(1 - \frac{2m}{r})} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad \leftarrow \text{Punkt bedeutet Ableitung nach der Eigenzeit.} \quad (1)$$

Damit wird

$$\delta \left(\int dt \left[(1 - \frac{2m}{r}) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{(1 - \frac{2m}{r})} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right] \right) = 0 \quad \leftarrow \text{Maximierung der Eigenzeit}$$

(man überzeugt sich, daß diese "Trick" nichts anderes liefert als die Variation nach $\frac{1}{c} (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}}$, wie wir es früher abgeleitet haben). Als Kurvenparameter verwenden wir die Eigenzeit selbst.

Die Variation nach $t(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau)$ ergibt die folgenden drei Euler-Gleichungen:

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1 - \frac{2m}{r}) \dot{t} \right] = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (2b)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad (2c)$$

Beachte, daß wir nicht auch die vierte Euler-Gleichung für $r(\tau)$ aufgestellt haben. Dies können wir. Diese liefert sich aus den 3 sofort integrieren und gebe genau die obige Beziehung (1): $c^2 = () \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{()} - \dots$ Unsere 4 Gleichungen sind also (1) und (2).

Von der klassischen Mechanik wissen wir, daß die Bahn eines Körpers in einem Zentralkraftfeld in einer Ebene liegt, i.e. o.B.d.A. $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dies gilt auch hier, wie man leicht sieht, i.e. eine spez. Lsg. von (25) ist gerade $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}$. Aufgrund der Radialsymmetrie des SS ist dann aber sofort klar, daß jede Bahn in einer Ebene liegt, und wir können das Koordinatensystem für θ, ϕ frei wählen. Aus (2a) (2c) wird man

$$(1 - \frac{2m}{r}) \dot{t} = a = \text{const} \tag{3a}$$

und für $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}$:

$$r^2 \dot{\phi} = h = \text{const} \tag{3b}$$

einsetzen in Gg. (1) ergibt die Bestimmungsgleichung für \dot{r} :

$$c^2 = \frac{c^2 a^2 - \dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - \frac{h^2}{r^2} \tag{4}$$

Analog dem klassischen Kepler-Problem vereinfacht sich diese Differentialgleichung, wenn wir von $r(\tau)$ auf die Variable $u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}$ übergehen:

$$r' \equiv \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \frac{r^2 \dot{r}}{h} \xrightarrow{(4)} c^2 = \frac{c^2 a^2 - h^2 r'^2}{1 - \frac{2m}{r}} - \frac{h^2}{r^2}$$

$$u'(\phi) = -\frac{1}{r^2} r'(\phi)$$

$$\Rightarrow c^2 (1 - 2mu) = c^2 a^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu) \tag{5}$$

bzw. $u' = \frac{du}{d\phi} = \left(\frac{c^2 a^2}{h^2} - (c^2 + u^2)(1 - 2mu) \right)^{\frac{1}{2}}$

mit dem Integral

a wird im Text mit der Energie $a = \sqrt{1 + \frac{E}{m^2}}$ (S. 108 unten) identifiziert.

$$\phi = h \int \frac{du}{[c^2 a^2 - (c^2 + u^2)(1 - 2mu)]^{\frac{1}{2}}} + \text{const.}$$

Dieses Integral läßt sich nicht analytisch lösen. Tabachnik läßt es sich aber störungstheoretisch entwickeln und man kann so direkt, wenn leicht nicht so anschaulich, zur Periheliondrift gelangen (vgl. Text (Lobbanke, Kap. 4.3, S. 111-112). Wissenschaftler haben einen anderen Weg ein.

In diesem Block differenzieren wir (5) nach ϕ , mit dem Ergebnis

$$-2mc^2 u' = -2h^2 u' u'' - 2h^2 u u' (1 - 3mu) \tag{6}$$

Wenn wir die mögliche Lösung $u' = 0$, die einen Kreis mit feste Radius r darstellt (man könnte dann die Perihelienbewegung nicht feststellen), außer Acht lassen erhalten wir also eine aus nicht verstrickte DGL 2-ter Ordnung:

$$u'' + u = \frac{mc^2}{h^2} + 3mu^2 = \frac{GM_0}{h^2} + \frac{3GM_0}{c^2} u^2 \tag{7}$$

In der kl. Newtonschen Mechanik lautet die entsprechende Bewegungsgleichung für ein beliebiges Zentralpotential $V(r)$:

$$u'' + u = \frac{1}{h^2 u^2} \frac{dV}{dr} = -\frac{1}{h^2} \frac{dV}{du}$$

wobei $H = r^2 \frac{d\phi}{dt}$ eine Konstante der Bewegung ist (Flächensatz!) Speziell für das Newtonsche Potential $V(r) = -\frac{GM}{r} = -GMu$ ist also

$$u'' + u = \frac{GM}{h^2} \tag{8}$$

Die Konstanten h und H unterscheiden sich geringfügig. Es ist nämlich

$$h = r^2 \frac{d\phi}{dt} = r^2 \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} = H \frac{a}{1-2mu}$$

Wir stellen also fest, daß die nat. Gleichung (7) und die nichtnat. Gleichung (8) sich in zwei Punkten unterscheiden: zum einen ist die Konstante verschieden ($H = \frac{h^2}{a} (1-2mu)$ ist nicht mehr strikt konstant... könnte man das nicht messen???) zum anderen fehlt h in (8) das in (7) quadratische Term.

Formal können wir die Gl. (7) in der allgemeineren Form der nichtnat. Gleichung gewinnen, wenn wir ein vom $\frac{1}{r}$ -Verhalten abweichendes Potential annehmen. Wir setzen einfach fest

$$\frac{1}{h^2} \frac{dV}{du} \rightarrow \frac{1}{h^2} \frac{dV}{du}, \text{ da } H \text{ bzw. } h \text{ jeweils eine Konstante der Bewegung (nat. oder nat.)}$$

$$\frac{1}{h^2} \frac{dV}{du} = -\frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2 \Rightarrow V(u) = -GMu + \frac{3GMh^2}{c^2} u^3$$

$$\Rightarrow \left[V_{eff}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{GM}{c^2} \frac{h^2}{r^3} \right]$$

einem effektiven, drehimpulsabhängigen ($h \approx \frac{L}{m_{planet}}$) Potential.

(Dies erklärt warum die Sommerfeld'sche Idee von Dicke nicht idealtypisch dasselbe liefern kann, da dort das Potential)

nicht effektiv vom Drehimpuls abhängt

Führen wir nun fort mit Gl. (12). Aufgrund des zusätzlichen h^2 -Terms lässt sich die Perihelien-Gleichung erweitern, da dieses γ -eff. ein $\frac{1}{h^2}$ -Pot. suggeriert und dies zur Perihelien-Gleichung führt. Wir dürfen stetig theoretisch vorgehen, wenn wir zeigen können, daß dieses sehr viel kleiner als der erste Term auf der rechten Seite ist? :

Wir bezeichnen mit A die Konstante

$$A \equiv \frac{mc^2}{h^2} = \frac{GM}{h^2}$$

und setzen

$$\epsilon = 3m A \quad , \quad \frac{\epsilon}{A} = \frac{3GM}{c^2}$$

$\left. \begin{array}{l} \dim[\epsilon] = \text{Meter}^2, \text{ da } \frac{2m}{r} \text{ dimensionslos} \\ \dim[\frac{\epsilon}{A}] = \text{Meter} \end{array} \right\} \Rightarrow \dim[A] = \frac{1}{\text{Meter}}$
 ϵ ist dimensionslos

Führen wir nun die Variable $v(\phi) \equiv \frac{1}{A} u(\phi)$ ein, so lautet Gl. (17):

$$v'' + v = 1 + \epsilon v^2 \tag{9}$$

Wir überzeugen uns zunächst davon, daß ϵ eine kleine Zahl ist

(Wir wählen als Beispiel die Erde mit $r \approx 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$, Umlaufzeit 1 Jahr)

$$\epsilon_{\text{Erde}} = 3m A = 3 \left(\frac{mc}{h} \right)^2 \approx 3 \cdot \left(\frac{mc}{h^2 \frac{dr}{dt}} \right)^2 \approx 3 \left[\frac{1.5 \text{ km} \cdot 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{(1.5 \cdot 10^8 \text{ km})^2 \cdot \frac{2\pi}{3 \cdot 10^7 \text{ s}}} \right]^2 \approx 3 \cdot 10^{-8} \ll 1$$

Da gemäß (9) für Kreisbahnen ($v''=0$) $v=1$ ohne den Zusatzterm gilt, können wir bedenkenlos annehmen, daß

$$\epsilon \cdot v^2 \approx \epsilon \ll 1$$

und wir den Zusatzterm in (9) als (winzige) Störung behandeln dürfen.

Es empfiehlt sich deshalb, die Lösung der Glg. (9) nach Potenzen von ϵ zu entwickeln:

$$v(\phi) = v_0(\phi) + \epsilon v_1(\phi) + \dots \quad O(\epsilon^2)$$

Es folgt

$$v_0'' + v_0 = 1 \tag{10a}$$

$$v_1'' + v_1 = v_0^2 \tag{10b}$$

Die Lösung der Glg. (10a) ist offenbar

$$v_0(\phi) = 1 + \eta \cos(\phi - \phi_0) \Rightarrow$$

$$r_0(\phi) = \frac{A}{1 + \eta \cos(\phi - \phi_0)} \quad ; \quad \phi_0, \eta \equiv \text{Integrationskonstante} \tag{11}$$

die offensichtlich eine Ellipse mit Exzentrizität η beschreibt mit dem Koordinatenursprung als einem Brennpunkt (o.B.d.A. $\phi_0=0$)

Mit dieser Lösung für v_0 erhalten wir aus (10b) die bestimmende Dgl für v_1

$$v_1'' + v_1 = (1 + \eta \cos \phi)^2 = (1 + 2\eta \cos \phi + \eta^2 \cos^2 \phi)$$

$$= (1 + \frac{1}{2} \eta^2) + (2\eta \cos \phi) + (\frac{1}{2} \eta^2 \cos 2\phi)$$

Aufgrund der Linearität können wir die Lösung in drei Anteile zerlegen

$$v_1 = v_{1a} + v_{1b} + v_{1c}$$

mit den Gleichungen

$$v_{1a}'' + v_{1a} = 1 + \frac{1}{2} \eta^2$$

$$v_{1b}'' + v_{1b} = 2\eta \cos \phi$$

$$v_{1c}'' + v_{1c} = \frac{1}{2} \eta^2 \cos 2\phi$$

(1) benötigen nur spez. Lösungen, da der homogene Anteil (und damit die Wahl des Integrationsbereichs) bereits in der Dgl für v_0 mit derselben homogenen Dgl vom Typ $v'' + v = 0$ verarbeitet sind.

Spez. Lösungen findet man z.B.

$$v_{1a}(\phi) = 1 + \frac{1}{2} \eta^2$$

$$v_{1b}(\phi) = \eta \phi \sin \phi$$

$$v_{1c}(\phi) = -\frac{1}{6} \eta^2 \cos 2\phi, \text{ wie man leicht nachrechnet}$$

Damit lautet die Lösung zu (9) exakt bis zur Ordnung ϵ

$$v(\phi) = 1 + \underline{\epsilon} (1 + \frac{\eta^2}{2}) + \eta \cos \phi - \underline{\epsilon} \frac{\eta^2}{6} \cos 2\phi + \underline{\epsilon} \eta \phi \sin \phi \tag{12}$$

Der letzte Term $\epsilon \eta \phi \sin \phi$ muß für die Periheliebewegung verantwortlich sein, da er der einzige in $2\pi = \Delta\phi$ nicht periodische Term ist. Das Perihel ist definiert als der kürzeste Abstand zur Sonne, also das Minimum von $r(\phi)$ oder Maximum von $v(\phi)$.

Die Lage des Perihels ϕ_n erhalten wir also als Nullstelle der Ableitung $v(\phi)$:

$$v'(\phi_n) = -\eta \sin \phi_n + \epsilon \frac{\eta^2}{3} \sin 2\phi_n + \epsilon \eta \phi_n \cos \phi_n + \epsilon \eta \sin \phi_n \stackrel{!}{=} 0$$

Das erste Perihel liegt offenbar bei

$$\phi_0 = 0$$

Für die Lage des n-ten Perihels setzen wir ein

$$\phi_n = n \cdot (2\pi) + \eta \cdot \delta_n$$

(Es kann sein, daß δ_n von n abhängt. Es stellt sich aber sofort heraus, daß das nicht so ist).

Wir dürfen annehmen, daß $\delta_n \in \mathbb{R}$, also sehr klein ist. Daher entwickeln wir $\cos(\delta_n)$ in δ_n :

$$-\eta n \delta_n + \frac{O(\epsilon \cdot \delta_n)}{=0} + \frac{O(\epsilon \cdot \delta_n)}{=0} + \epsilon \eta (2n\pi) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_n \equiv \delta = 2\pi \epsilon}$$

(Man hätte dieses Ergebnis auch unmittelbar erhalten können, indem wir den nicht-period. Term in dem Term $\eta \cos \phi$ absolut - in k der Annahme, daß $|\epsilon - \phi| \ll 1$, was durch Reihenentwicklung von $\phi_0 \mapsto \phi - \phi_0$, möglich ist: $\eta \cos \phi + \epsilon \eta \sin \phi \approx \eta \cos \phi \cos \epsilon \phi + \eta \sin \phi \sin \epsilon \phi \approx \eta \cos(\phi - \epsilon \phi) = \eta \cos((1-\epsilon)\phi)$)

Damit finden wir für die Drehung der Lage des Perihels pro Bahnlauf das kompakte Ergebnis:

$$\delta = 2\pi \epsilon = 6\pi m A = 6\pi \left(\frac{mc}{h}\right)^2 \quad (13)$$

$\approx 6\pi \frac{G \cdot M_\odot}{c^2} \cdot \frac{1}{R_{\text{Sonnen-Planet}}}$ } gemäß (11) ist ja A Funktion gerade des Inverse Bahnradius
 $\approx \frac{1}{R_{\text{Sonnen-Planet}}}$

Damit ist klar, daß der Effekt am dominantesten beim der Sonne nächsten Planeten, dem Merkur ist.

astrophysisch gibt man meist nicht die Periheldrehung je Bahnlauf, sondern je Jahrhundert an.

Dabei mißt man die Drehung in Bogensekunden, i.e. $1^\circ \cong 3600''$ (Bogenminuten).

Für die Merkurbahn ergibt sich $43''$ je Jahrhundert, für die Erde gerade einmal $4''$.

Trotz der gesamten Perihelverschiebung des Merkurs ($5600,73''$) hat sich diese fehlerhafte Wert von $43''$ schon seit fast hundert Jahren etabliert und die Genauigkeiten haben sich je nach bis heute etabliert.

Planet	R ₀ -Planet (10 ⁶ km)	η	Umlauf/Jahrhundert	AR-Vorhersage	Beobachtung $\Delta\phi$ in 100 Jahren
Merkur	57.91	0.2056	415	43.03''	43.11 ± 0.45
Venus	108.21	0.0068	149	8.6''	8.4 ± 0.8
Erde	149.6	0.0167	100	3.8''	5.0 ± 1.2
Jovius	161.0	0.877 ?	85	10.3''	9.8 ± 0.8

\uparrow starke Unsicherheit
 \uparrow Perihel-Vorhersage
 \uparrow Beobachtung
 \uparrow durch die
 \uparrow Erdbild
 \uparrow Schwere
 \uparrow Pen
 \uparrow ermittelt.

Radiale Bewegung ("Fallen") zum Schwarzschildradius

(7a)

(3c) $(1 - \frac{2m}{r}) \frac{dt}{d\tau} = a \leftarrow$ Konstante der Bewegung aus Anfangsbedingung

(4) $c^2 \stackrel{h=0}{=} \frac{c^2 \dot{r}^2 - \dot{t}^2}{1 - \frac{2m}{r}} = c^2 \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \left[c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \right] \left(\frac{a^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2}\right)^2$

Anfangsbedingung: Zu Zeit $t=0$ sei Testteilchen bei $r=r_0$ und es sei $\dot{r}(t=0) = 0$

(1) $\Rightarrow c^2 = \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) c^2 \dot{t}^2 \Rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) = 1 \Rightarrow$ Vergleich mit (3c)

$\sqrt{1 - \frac{2m}{r_0}} \triangleq a = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_0}}$

Damit wird

$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^3 \frac{1}{a^2} c^2 = c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{1 - \frac{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}{\left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)}} c \cdot \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$

$\Rightarrow \left|\frac{dr}{d\tau}\right| \leq c \cdot \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$

(Für Licht gilt ja $d\tau^2 = 0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dr^2$
 $\Rightarrow \frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$)

Damit ist durch Integration

$c(t-t_0) \geq - \int_{r_0}^r \frac{dr}{1 - \frac{r_s}{r}} = + \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2(1-x)}$

divergiert für $x \rightarrow x_s = 1$ logarithmisch, i.e. $-\ln(1-x)$

\Rightarrow Licht braucht in Koordinatenzeit unendlich lang zum an den Schwarzschildradius zu kommen, äußere Beobachter (mit $r_B \gg r_s$) sehen dies aber nicht.

Die ~~restliche~~ Eigenzeit des fallenden Objekts lautet hingegen

$$(4) \Rightarrow c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 a^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{c^2 a^2 - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}$$
$$= \pm c \sqrt{\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_0}} = \pm c \sqrt{r_s} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}$$

$$\Rightarrow c dt = \pm \frac{1}{\sqrt{r_s}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} dr$$

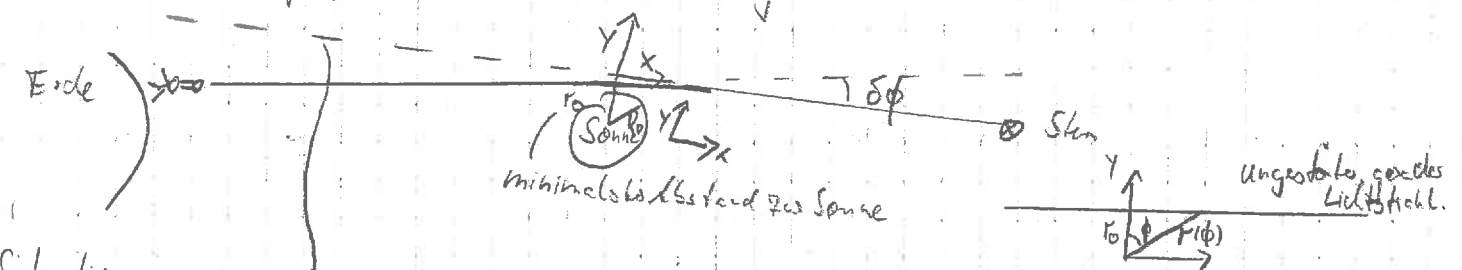
$$\Rightarrow \underline{c(t - t_0)} = - \frac{1}{\sqrt{r_s}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = + \frac{1}{\sqrt{r_s}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 \sqrt{x - x_0}}$$

←
da x nicht $\rightarrow x_s$,
Sachen bleibt endlich

Der mitfallende Beobachter erlebt demnach dieses furchtliche Ereignis

Lichtablenkung am Sonnenrand

Das zweite wichtige, klassische Test der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Ablenkung eines Lichtstrahls, der nahe am Rand der Sonne vorbeigeht. Dies folgt aus einem anderen Äquivalenzprinzip ("Fahnenstangeexperiment" Äquivalenz von beschleunigtem Bezugssystem und Gravitation), wenn man annimmt, dass Gravitationskräfte nicht mit den Ruhemassen des Körpers, sondern mit ihrer Energie und ihrem Impuls verknüpft sind. Da elm. Wellen Energie transportieren, müsse sie also dem Einfluß der Gravitation unterliegen.



Situation

$$r_{\text{ungerichtet}}(\phi) = \frac{r_0}{\cos \phi}, \quad \phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = r \sin \phi, \quad y = r_0 = \text{const} = \frac{r}{\cos \phi}, \quad r = \frac{r_0}{\cos \phi}$$

Im Prinzip müßte man im Hintergrundfeld der Schwarzschild-Metrik "nur" die Ausbreitung von elm. Wellen in diese Strahlrichtung (also Energiefluß) untersuchen, i.e. $\overline{T_{em}^{\mu\nu}} = 0$ genau stellen.

Da wir aber $T_{em}^{\mu\nu}$ nicht genauer spezifiziert haben, wollen wir einen anderen Weg einschlagen.

Man kann nun zeigen, daß für den Fall kleiner Wellenlängen beim Übergang von der Wellen- zur Strahlenoptik der Lichtweg durch geodätische Linien beschrieben wird, auf denen sich die τ gegenwärtig nicht ändert (sog. "Nullgeodäten"):

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \tag{1}$$

Für solche Kurven ist aber natürlich die Eigenzeit τ nicht als Kurvenparameter verwendbar.

Die Geodätengleichung ändert sich aber nicht, wenn wir den Parameter τ durch einen linear verwandelten Parameter

$$q = \alpha \cdot \tau + \beta; \quad \alpha, \beta = \text{const}$$

ersetzen:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{dq^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^\nu}{dq} = 0 \tag{2}$$

und aus (1)

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^\nu}{dq} = c^2 \left(\frac{d\tau}{dq} \right)^2 = c^2 / \alpha^2 \tag{3a}$$

Wir argumentieren nun wie folgt:

Der Übergang zur Nullgeodäten mit $dr \rightarrow 0$ vollzieht sich dann mühelos, wenn wir für endliche Parameter q gleichzeitig die Konstante $\alpha \rightarrow \infty$ machen, da dann $dr = \frac{dq}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \text{ endlich}} 0$ geht.

Wir können also an der veränderte Geodätengleichung (2)

$$\frac{d^2 x^\mu}{dq^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{dq} \frac{dx^\sigma}{dq} = 0 \tag{2}$$

festhalten mit der aus (1) und (3) folgende Randbedingung

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^\nu}{dq} = 0 \tag{3}$$

für einen unbestimmten, aber endlichen Kurvenparameter q .

Die Bewegungsgleichungen für einen Lichtstrahl sind demnach vollkommen äquivalent zu (1) und (2a-2c) auf Seite 2 derjenigen von Planetenbahnen, nur daß nun überall der Kurvenparameter q (der wieder bei einer Parameterisierung $r(\phi)$ herausfallen würde) stattdessen Eigenzeit τ auftritt und die linke Seite von Glg. (1) nun verschwindet (vgl. (3)):

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{dq}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \left(\frac{dr}{dq}\right)^2 - r^2 \left(\left(\frac{d\theta}{dq}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dq}\right)^2 \right) = 0 \tag{4}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{dq} \right] = 0 \tag{5a}$$

$$\frac{d}{dq} \left(r^2 \frac{d\theta}{dq} \right) = r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dq}\right)^2 \tag{5b}$$

$$\frac{d}{dq} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{dq} \right) = 0 \tag{5c}$$

Wählen wir wieder $\theta(q) = \frac{\pi}{2}$ (auch der Lichtstrahl bleibt in einer Ebene) erhalten wir wie früher

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{dq} = \tilde{a} = \text{const} \tag{5a'}$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{d\phi}{dq} = \tilde{h} = \text{const} \tag{5b'}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{c^2 \tilde{a}^2 - \left(\frac{dr}{dq}\right)^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - \frac{\tilde{h}^2}{r^2} \quad \text{--- DGL für } r(q) \tag{4'}$$

Erneute, analoge Substitution $r(q) \rightarrow r(\phi)$, $r \rightarrow u = \frac{1}{r}$ ergibt dann (5) Seite 2 analoge Beziehung

$$0 = c^2 \tilde{a}^2 - \tilde{h}^2 u'^2 - \tilde{h}^2 u^2 (1 - 2mu) \tag{6}$$

Differentiation von ϕ liefert dann analog

$$u'' + u = 3mu^2 \tag{17}$$

Wir können sofort (17) als Grenzfall von (17) auf Seite 9 für Planetenbahnen erwarten, denn der dominante Term, i.e. $\frac{mc^2}{h^2}$ (beachte Kundlich \tilde{h}), lautet explizit

$$\frac{mc^2}{h^2} = \frac{mc^2}{h^4} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{mc^2}{h^4} \cdot \left(\frac{d\tau}{d\phi}\right)^2 \rightarrow 0 \text{ für } d\tau \equiv 0$$

Beweis (17) nun gemäß unserer schematischen Skizze analysieren sei folgende Annahme gegeben: Gleichung (6) läßt zunächst beliebige Lösungen $u = \text{const}$ durch geeignete Wahl von \tilde{h} und \tilde{a} zu (aus (6) und der Def. von \tilde{h}, \tilde{a} folgt sofort $c^2 = \frac{1}{(1-2mu)} (r\dot{\phi})^2, u = \frac{1}{r} = \text{const}$)

Sind also beliebige Kreisbahnen zu jedem Radius möglich? $\frac{d}{dt}$

Sicherlich nicht. Der Grund ist, diese sind in der Regel alle nicht stabil und damit unphysikalisch. Für kleine Oszillationen ($u' \neq 0$) folgt dem neutralen auch die Gültigkeit von (17), die dann für $u'' = u' = 0$ auf $u = 3m$ bzw. $r = 3m = \frac{3}{2} r_s$ führt. Schwarzschildradius

Dies ist die einzig mögliche stabile Kreisbahn. Diese ist aber aus relevanten schwarzen Löchern, da je der Schwarzschild Radius bei der Sonne etc. ja physikalisch nicht angenommen wird.

→ qualitative Term in Glg (17) stellt wieder eine kleine Störung dar, denn es ist für $r > R_0$, der Sonnenradius,

$$\frac{3mu^2}{u} = \frac{3m}{r} = \frac{3}{2} \frac{r_s}{r} < \frac{3}{2} \frac{r_s}{R_0} \sim 2 \cdot 10^{-5}$$

Schreiben wir daher

$$v(\phi) = r_0 u(\phi),$$

wobei r_0 der unveränderliche Abstand gegeben soll (vgl. Skizze auf Seite 9), so ist aus (17)

$$v'' + v = \frac{3m}{r_0} v^2 \equiv \epsilon \cdot v^2 \tag{18}$$

Mit $v(\phi) = v_0(\phi) + \epsilon \cdot v_1(\phi) + O(\epsilon^2)$ folgt

$$v_0'' + v_0 = 0 \tag{19a}$$

$$v_1'' + v_1 = \epsilon v_0^2 \tag{19b}$$

Die Lösung zu (9a) liefert (unter geeigneter Wahl von $\phi_0 = 0$)

$$r(\phi) = \frac{1}{u_0(\phi)} = \frac{r_0}{\omega(\phi - \phi_0)} \xrightarrow{\phi_0=0} \frac{r_0}{\omega \phi}, \quad \text{i.e. } V_0(\phi) = \omega \phi$$

also genau die Beschreibung einer Geraden ($x = r \cos \phi, y = r_0 = \omega r \phi \rightarrow r = \frac{r_0}{\omega \phi}$).

Damit folgt aus (9b)

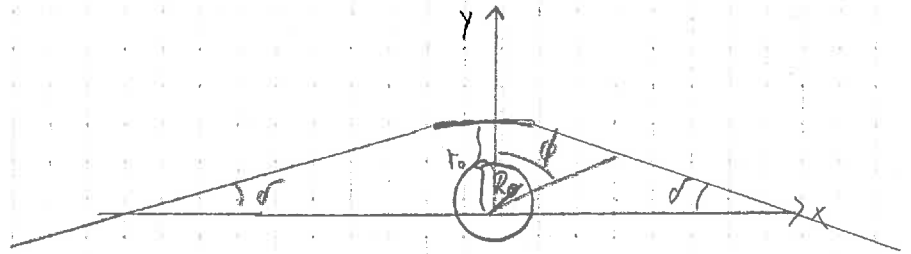
$$v_1'' + v_1 = \omega^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi$$

mit der spez. Lösung (vgl. Seite 6)

$$v_1(\phi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cos^2 \phi$$

und somit

$$V(\phi) = \omega \phi + \frac{\epsilon}{3} (2 - \cos^2 \phi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (10)$$



Um die Ablenkung des Lichtstrahls zu finden, müssen wir den Linsen großer Entfernungen betrachten, d.h. $r \rightarrow \infty$, bzw. $u, v \rightarrow 0$:

$$v(\phi_\infty) = 0 : \quad \omega \phi_\infty + \frac{m}{r_0} (2 - \cos^2 \phi_\infty) = 0 ; \quad \frac{m}{r_0} \ll 1$$

$$\rightarrow 1) \quad \frac{m}{r_0} = 0, \quad \omega \phi_\infty = 0 \rightarrow \phi_\infty = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2) \quad \frac{m}{r_0} \ll 1, \quad \phi_\infty \equiv \pm \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) \xrightarrow{\delta \ll 1} \omega \phi_\infty = \omega \left(\pm \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) \right) = \omega \left(\pm \frac{\pi}{2} \pm \delta \right) = \omega \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) \cos(\pm \delta) - \sin \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) \sin(\pm \delta) \\ = - (\pm 1) \left(\sin(\pm \delta) \right) \xrightarrow{\delta \ll 1} \approx -\delta$$

$$\stackrel{(10)}{\Rightarrow} -\delta + \frac{m}{r_0} (2 - \delta^2) \approx -\delta + 2 \frac{m}{r_0} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{2m}{r_0}} = \frac{2GM}{c^2 r_0} = \frac{r_s}{r_0} \quad \leftarrow \text{SS Radius}$$

Die gesamte Ablenkung beträgt 2δ , was uns sich für einen scharfen Sonnenrand ($r_0 \approx R_0$) vorbeigehenden Lichtstrahl (die Abweichung vom

$$\Delta_0 = 2\delta(r_0 \approx R_0) = 1.75'' \quad \leftarrow \text{Bogensekunden}$$

ergibt: ($R_0 = 695.000 \text{ km}, r_s = 2.95 \text{ km}$).

Für Sternenlicht kann die experimentelle Bestimmung des Ablenkwinkels Δ nur bei einem totalen Sonnenfinsternis erfolgen, da sonst das Streulicht der Sonne in der Atmosphäre jeden Stern in Sonnennähe (am Horizont) bei weitem überflutet. Mangelte es aber, daß man die Scheitellinie Himmelsbogen einmal vor dem Sonnenfinsternis und einmal während des Sonnenfinsternis fotografirt und dann nach Ausrichtung in dem scheinbaren Abstand des Sterne untereinander sieht.

May 23, 1919	$\Delta = 1.98 \pm 0.16''$, 1.61 ± 0.9
Sept 21, 1922	$1.77 \pm 0.9''$; $1.42 - 2.16$, 1.72 ± 0.15 , 1.82 ± 0.2
May 9, 1929	$2.24 \pm 0.1''$
Feb. 25, 1952	$1.7 \pm 0.1''$
bestehende Wert:	$1.76 \pm 0.02''$ (P)

• neuere Möglichkeit mittels quasisternen Radiogalaxie (Quasare) (Quasar 3C279 im folgenden Jahr in der von Sonnenwind)

(vgl. Seidl, Habanckel)

Laufzeitverzögerung von Radarstrahlen

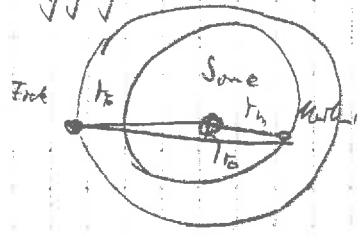
Von I.I. Shapiro wurde angeregt, die Bahnbewegung von Planeten im Sonnensystem durch Radarortung als Funktion des Zeit präzise zu vermessen, und Abweichungen zwischen der ohne Einfluß der Gravitation erwarteten Laufzeit der Radarstrahlen zum Planeten und durch unables tatsächlich gemessenen Laufzeit zum Test der GR zu verwenden.

Wir wollen zunächst sehen, auf welche Weise das Gravitationsfeld die Laufzeit elektromagnetischer Signale beeinflusst. Wir gehen hier von der Gleichung des letzten Kapitels aus, die die Ausbreitung von Lichtwellen ergibt:

$$\frac{dr}{dq} = \frac{dt}{dq} \frac{dr}{dt} = \frac{a}{1-2\frac{m}{r}} \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left(c^2 - \frac{h^2}{a^2 r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right) \tag{1}$$

Nehmen wir an, Erde und Merkur befinden sich annähernd auf entgegengesetzten Seiten der Sonne, so daß das Radarlicht auf dem Weg zum Beobachter zum Merkur in einem nahen Abstand r_0 an der Sonne vorbeigeht.



Bei Abstand r_0 ist ja dass $\frac{dr}{dt} = 0$, so daß

$$h^2 = \frac{c^2 a^2 r_0^2}{1 - \frac{2m}{r_0}} \tag{2}$$

Dann könne wir das Verhältnis $\frac{h}{a}$ aus (1) durch (2) ausdrücken und erhalten so

$$\left| \frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}{\left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)}} \right. \text{Entwicklung in } \frac{m}{r}, \frac{m}{r_0} \ll 1$$

$$\approx \pm c \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \left(1 - \frac{mr_0}{r(r+r_0)} - \frac{2m}{r} + O\left(\frac{m^2}{r^2}\right)\right) \tag{3}$$

Für die Ausbreitung von r_0 nach r (oder umgekehrt) benötigt die Radarstrahl folglich die Koordinatenzeit (P_0) :
 Achtung, Uhr laufe bei konstant r nicht mit der Koordinatenzeit, sondern der Eigenzeit τ , die aber spezifisch konstante r hat. B. a. f. die Erde signalisiert es die kann.

$$c t + (P_0) = \int_{r_0}^r dt \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{m}{r} \frac{(2r+3r_0)}{r(r+r_0)} + \dots\right)$$

$$= \underbrace{\sqrt{r^2 - r_0^2}}_{\substack{\text{Pythagoras} \\ \text{hyp} = \sqrt{r^2 - r_0^2}}} + 2m \ln \left(\frac{r}{r_0} + \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}\right) + m \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}} + \dots \tag{4}$$

Das führende Term beschreibt die ohne den Einfluß des Schwerefeldes erwartete Laufzeit auf der geraden Linie mit Betrag $\frac{2m}{c}$ von r nach r_0 ; die weiteren Terme geben die Verzögerung des Gravitationsfeldes an. Ihr Beitrag ist umso größer je näher der Radionuklid der Sonne kommt; ein Maximum wird bei der oberen Konjunktur des Merkurs erreicht, wenn die Stahl kreuzschiff an der Sonne vorbeifläht vor Bergheim mißt ($r_0 \approx R_0$; was wir nun annehmen wollen). Die gesamte Verzögerung auf der Weg zum Merkur und zurück ist dann

$$\Delta t_{max} = \frac{2}{c} (t(r_E, R_0) + t(r_m, R_0) - \sqrt{r_E^2 - R_0^2} - \sqrt{r_m^2 - R_0^2})$$

$$\approx \frac{2m}{c} \left(\frac{\sqrt{r_E - R_0}}{\sqrt{r_E + R_0}} + \frac{\sqrt{r_m - R_0}}{\sqrt{r_m + R_0}} + 2 \ln \left(\frac{r_E}{R_0} + \sqrt{\frac{r_E^2}{R_0^2} - 1} \right) + 2 \ln \left(\frac{r_m}{R_0} + \sqrt{\frac{r_m^2}{R_0^2} - 1} \right) + \dots \right)$$

Da $r_E, r_m \gg R_0$, können wir Terme der Ordnung $\left(\frac{r_E, r_m}{R_0}\right)^{-1}$ gegenüber $\ln \frac{r_E, r_m}{R_0}$ vernachlässigen und erhalten

$$\Delta t_{max} \approx \frac{4m}{c} \left(1 + \ln \frac{4 r_E r_m}{R_0^2} \right) \approx \frac{73 \mu s}{c} \approx \underline{\underline{293 \mu s}}$$

$r_E = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$, $r_m = 58 \cdot 10^6 \text{ km}$, $R_0 = 0.7 \cdot 10^6 \text{ km}$, $2m = r_s = 3 \text{ km}$

bei einer gesamten Laufzeit von ca. 20 Minuten.

Die zur Auflösung benötigte, extrem genau zu ermittelnde Abstandsänderung ist nur mit Hilfe der Radionuklid wiederhergestellt. Hierzu muß mittels Gdg. (14) die Position von Erdbeobachter Merkur genau an mehrere Positionen vermessen werden. Auf diese Weise hatte die Gruppe um Shapiro die Laufzeit gemessen und mit dem theoretisch vorhergesagte Wert verglichen (I.I. Shapiro et al, PRL 26 (1971) 1132)

$$\frac{\Delta t_{exp}}{\Delta t_{theor.}} = \underline{\underline{1.015 \pm 0.05}}$$

eine glänzende Bestätigung der AR.

Mit der einfachsten Messmethode stationäre Orling-Sonde ließ sich eine noch genauere Wert bestimmen (R.D. Roseberg, I.I. Shapiro et al, ApJ. 234 (1975) L215)

$$\frac{\Delta t_{exp}}{\Delta t_{theor.}} = \underline{\underline{1 \pm 10^{-3}}}$$

Gravitative Rotationschreibung

Die drei in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Experimente stellen keine Tests der AR (in erster Ordnung im Gravitationsfeld $\phi(\vec{r})$) dar, denn sie beruhen allesamt auf der Vermutung der geodätischen Bewegung im Schwarzschildfeld $c^2 dt^2 = e^{2\psi} c^2 dt^2 - e^{2\chi} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$.

Im Newtonschen Grenzfall geht es nur um das Gravitationspotential in $g_{00} = e^{2\psi} \approx (1 + \frac{2\phi}{c^2})$ ein.

Es gibt keine ähnliche Bedingung für $g_{\mu\nu} = e^{\chi}$, außer dass $e^{\chi} \rightarrow 1$. Wenn wir in 1.ter Ordnung schreiben

$$e^{2\psi} \approx 1 + 2\phi \frac{m}{r}$$

so ist ϕ im Newtonschen Grenzfall nicht festgelegt. Die AR sagt also im Newtonschen Grenzfall $\beta=1$ was?

Alternative Theorien (z.B. die Skalar-Tensor-Theorie von Brans und Dicke) sagen einen anderen Wert für β vor.

Die Einsteinsche Theorie hat die Vorhersage der Ablenkung von Lichtstrahlen α als Summe von dem Newtonschen Fall mit $\beta=0$ abgeleitet, so dass sein Ergebnis im Vergleich zu der relativistischen AR um eine Faktor $\frac{1}{2}$ zu klein war. Man findet heute $\gamma_{exp} = 1 \pm 10^{-3}$, was auch bei der Radarreflexionstechnik.

Das folgende, wie die Exp. nicht keine Gebrauch von $e^{2\psi}$ und testet "nur" den Wert von g_{00} .

Es kann von da aus nicht als richtige Tests der AR angesehen werden (vgl. auch die extensive Diskussion in Keller).

g_{00} ist ja bereits richtig im Newton-Grenzfall vorhergesagt.

Wir betrachten einen Oszillator der Eigenfrequenz ν_0 , der sich in einem stat. Gravitationsfeld in Ruhe befindet. Die Eigenzeit des Senders hängt dann wie folgt mit der Koordinatenzeit t zusammen:

$$d\tau_0 = \sqrt{g_{00}(\vec{r}_0)} dt \quad (\text{da der Sender ja in Ruhe in den gegebenen Koordinatensystem ist}) \quad (1)$$

Wenn ein entfernter Beobachter am Ort \vec{r}_B die ausgesendete Welle beobachtet, so misst er die empfangene Frequenz in seiner Eigenzeit τ_B :

$$d\tau_B = \sqrt{g_{00}(\vec{r}_B)} dt \quad (2)$$

Eine feste Zahl von Oszillationen, etwa n , wird von Sender in der Zeit

$$\Delta\tau_0 = \frac{n}{\nu_0}$$

ausgesendet, der Beobachter beachtet die (Eigen-)zeitpunkte

$$\Delta\tau_B = \frac{n}{\nu_B}$$

um sie zu empfangen

Die Frequenz der Welle, die der Beobachter misst, ist also

$$v_B = \frac{v}{\Delta \tau_B} = v_0 \frac{\Delta \tau_S \xrightarrow{\Delta \tau_0}}{\Delta \tau_B} \quad (3)$$

Man ist (aufgrund der Kontinuität der Wellen ausstrahlung) die zum Sender und Empfänger benötigte Koordinatenzeit Δt für n -Oszillationen dieselbe (man mache sich das klar!).

Ergo folgt aus (1) und (2) dann für (3)

$$v_B = v_0 \sqrt{\frac{g_{00}(\vec{r}_0)}{g_{00}(\vec{r}_B)}}$$

Dies liess sich auch
leicht aus dem Energiesatz $E = \text{const} = h\nu + \phi(r)$ (4)
ableiten.
(AR ist da konstante h)

in Newtonsche Näherung $\approx v_0 \left(\frac{1 + 2 \frac{\phi(\vec{r}_0)}{c^2}}{1 + 2 \frac{\phi(\vec{r}_B)}{c^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \approx v_0 \left(1 + \frac{\phi(\vec{r}_0) - \phi(\vec{r}_B)}{c^2} \right) \approx v_0 \left(1 - \frac{m}{r_0} + \frac{m}{r_B} \right)$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx - \frac{\Delta \phi}{c^2}$$

Die Erde sieht also die von der Sonne oberflächlich emittierte Spektrallinie rotverschoben.

Die rot-Verschiebung beträgt 2.1×10^{-6} . Wegen anderer Einflüsse auf die Lage der Spektrallinien (die hier je auf der Erde besten kennt) ist die präzise Verschiebung nicht einfach, nach Brill und Dicke stimmt der Wert auf etwa 5% mit der Vorhersage überein.

Auf der Erde liess sich die "Rotverschiebung" mittels des Mößbauer effektes ("nickelstofffreie Kernresonanz") trotz der Schwierigkeit überprüfen:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx - \frac{m}{R_E^2} (r_B - r_0) \approx - \frac{r_B - r_0}{4.5 \cdot 10^{12} \text{ km}} \stackrel{r_B - r_0 = 10 \text{ m}}{\sim} 10^{-15}$$

Pound und Rebke (PRL 3 (1959) 439, PRL 4 (1960) 337) gelang es, die gravitative Rotverschiebung mittels der 14.4 keV Gammastrahlung einer ^{57}Fe -Quelle in einer etwa 22m hohen Turm nachzuweisen. Der Betrag $\frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx 4.92 \cdot 10^{-15}$. Diese kleine Betrag hatte die Frequenz bereits deutlich aus den Absorptionsspektren des Detektors (^{57}Fe -Kristall) herausgeschoben. Mittels der Dopplerverschiebung eines sich bewegenden Detektors konnte die Rotverschiebung wie folgt festgestellt werden und die Verschiebung $\frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx (5.13 \pm 0.51) \cdot 10^{-15}$ angegeben werden!