Krümmung im Riemannschen Raum (fünfter Teil)

Der Krümmungstensor

- Woran erkennen wir, daß der Raum, der durch eine Metrik definiert ist, „gekrümmt" ist oder „flach" ist?? Was ist Krümmung, wie steht sie im Zusammenhang zur Metrik? (Es wird sich um 2-te part. Ableitungen nach der Metrik handeln ...?)

- Einen Riemannschen Raum, in dem man durch Wahl geeigneter Koordinaten den metrischen Tensor überall, d.h. global, auf die Minkowski-Form $\eta_{\mu\nu}$ bringen kann, bezeichnen wir als ungekrümmt oder flach, da wir dem Minkowski-Raum keine Krümmung zuschreiben. (Ein euklidischer Raum ist flach, obwohl er in komplizierten Koordinaten, z.B. Kugelkoordinaten ausgedrückt werden kann. Aber die Welt auf einer Kugeloberfläche ist gekrümmt. Es kann aber also lokal im Tangentialraum ein euklid. Koordinatensystem gewählt werden) Lokal $\rightarrow$ Global ξ_I^μ mit $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \;\forall P \in R$

- Da im mitfallenden Bezugssystem $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^\lambda_{I\mu\nu} = 0$, der Raum aber derselbe ist, sollte es sich um part. Ableitung von $\Gamma^\lambda_{I\mu\nu}$ handeln, i.e. es ist nicht notwendigerweise $\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(P) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(P) = 0$. Der „Krümmungstensor" muß diesen Sachverhalt in einer kovarianten Darstellung zum Ausdruck bringen.

- Wenn der Raum flach, i.e. es existiert ein Bezugssystem in dem global $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$, so gilt in diesem Bezugssyst. zunächst

$$V^\alpha_{\;||\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial \xi^\beta} \quad \text{überall}$$

Dies gilt weiter für alle kov. Ableitungen höherer Ordnung, weil die Christoffel-Symbole überall Null sind. Insbesondere

$$V^\alpha_{\;||\beta||\rho} - V^\alpha_{\;||\rho||\beta} \overset{\xi = \text{Bezugssyst.}}{=} \frac{\partial^2 V^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 V^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\beta} = 0 \quad \text{überall}$$

Da dies eine Tensorgleichung, gilt dies aber in jedem beliebigen Koordinatensystem, nicht nur in dem speziellen, wo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\Gamma = 0$ überall. Die Vertauschbarkeit der kov. Ableitung ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß ein Riemannscher Raum ungekrümmt ist!

Untersuchen wir daher den Kommutator der kov. Ableitung in einem allgemeinen Riemannschen Raum:

$$V^{\alpha}_{\ \|\beta\|\gamma} = \left(\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} V^{\mu}\right)_{\|\gamma}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} V^{\mu}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu}\left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\nu}_{\beta\mu} V^{\mu}\right) - \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} V^{\mu}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}} V^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu}\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\gamma}}$$

$$+ \left(\Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} - \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\right) V^{\mu}$$

heben sich auf

$\beta \Leftrightarrow \gamma$:

$$V^{\alpha}_{\ \|\gamma\|\beta} = \frac{\partial^2 V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu}}{\partial x^{\beta}} V^{\mu} + \left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma^{\nu}_{\gamma\beta}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu}\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

$$+ \left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu} - \Gamma^{\nu}_{\gamma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\right) V^{\mu}$$

Beachte, daß Γ sym. in den unteren Indizes, und die Symmetrie der part. Ableitungen

$$V^{\alpha}_{\ \|\beta\|\gamma} - V^{\alpha}_{\ \|\gamma\|\beta} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu}\right) V^{\mu}$$

Tensor

$$\hat{=}\ R^{\alpha}_{\ \mu\beta\gamma} V^{\mu}$$

V beliebig

– (Riemannscher) <u>Krümmungstensor</u>

muß Tensor sein!

- Für einen flachen Raum muß gelten

$$R^{\alpha}_{\ \mu\beta\gamma} = 0$$

Es ist klar, daß dies eine <u>notwendige</u> Bedingung ist (Aus $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ für alle Punkte folgt ja $R^{\alpha}_{\ \mu\beta\gamma}$ ...). Ferner gilt, es ist auch eine <u>hinreichende</u> Bedingung hierfür, i.e. es läßt sich ausgehend $R^{\alpha}_{\ \mu\beta\gamma}$ für ein globales Inertialsystem definieren. Wir verzichten auf den Beweis und verweisen auf Adler, Kap. 5.6!

- Wir können diesen Sachverhalt auch so formulieren, daß $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma} = 0$ die Feldgleichung für den <u>gravitationsfreien</u> Raum darstellt (genauer gesagt: für einen Raum, in dem sich Schein- und Gravitationskräfte global wegtransformieren lassen).
- Wenn nun eine Metrik vorliegt, von der man vermutet, daß sie "nur" in eine komplizierte Form die Metrik des ebenen Raumes ist (wie etwa bei Verwendung parabolischer Koordinaten), so braucht man nur den Riemann-Tensor für diese Metrik zu berechnen. Falls er verschwindet, folgt daraus, daß der Raum flach ist und daß es ein Koordinatensystem geben muß, in dem der metrische Tensor die Elementarform annimmt. Oftmals ist es aber eine schwierige Aufgabe, eine Koordinatentransformation explizit anzugeben, die diesen Übergang auch tatsächlich bewerkstelligt (vgl. Adler Kap. 5.6.).

- Desweiteren folgt für Tensoren höherer Stufe

$$
\begin{aligned}
(V^{\alpha}W^{\delta})_{\|\beta\|\gamma} - (V^{\alpha}W^{\delta})_{\|\gamma\|\beta} &= V^{\alpha}{}_{\|\beta\|\gamma}W^{\delta} + V^{\alpha}W^{\delta}{}_{\|\beta\|\gamma} + V^{\alpha}{}_{\|\beta}W^{\delta}{}_{\|\gamma} + V^{\alpha}{}_{\|\gamma}W^{\delta}{}_{\|\beta} \\
&\quad - V^{\alpha}{}_{\|\gamma\|\beta}W^{\delta} - V^{\alpha}W^{\delta}{}_{\|\gamma\|\beta} - V^{\alpha}{}_{\|\gamma}W^{\delta}{}_{\|\beta} - V^{\alpha}{}_{\|\beta}W^{\delta}{}_{\|\gamma} \\
&= R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma}V^{\mu}W^{\delta} + V^{\alpha}R^{\delta}{}_{\mu\beta\gamma}W^{\mu}
\end{aligned}
$$

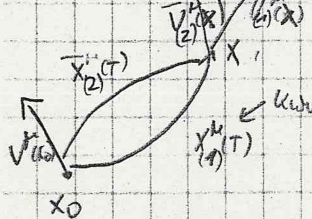
$\Rightarrow$ $(T^{\alpha\delta})_{\|\beta\|\gamma} - (T^{\alpha\delta})_{\|\gamma\|\beta} = R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma}T^{\mu\delta} + R^{\delta}{}_{\mu\beta\gamma}T^{\alpha\mu}$ usw. für Tensoren höherer Stufe.

- $\underline{(g_{\alpha\nu})_{\|\gamma} = 0}$, $V_{\alpha} = g_{\alpha\nu}V^{\nu}$, $V^{\nu}{}_{\|\beta\|\gamma} - V^{\nu}{}_{\|\gamma\|\beta} = R^{\nu}{}_{\mu\beta\gamma}V^{\mu}$

$\Rightarrow$ $V_{\alpha\|\beta\|\gamma} - V_{\alpha\|\gamma\|\beta} = g_{\alpha\nu}R^{\nu}{}_{\mu\beta\gamma}V^{\mu} \hat{=} \underline{R_{\alpha\mu\beta\gamma}V^{\mu}}$ – Index α heruntergezogen.

Parallelverschiebung und Krümmung

Wir beschäftigen uns jetzt mit einer scheinbar völlig anderen Frage, nämlich, ob es möglich ist, ein im gesamten Raum existierendes Vektorfeld $V^\mu(x)$ durch Parallelverschiebung des Vektors $V^\mu(x_0)$ vom Punkt x_0 zu irgendeinem anderen Punkt x zu definieren.



$$\frac{dV^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\frac{dx^\nu}{d\tau}\,V^\lambda$$ – Paralleltransport entlang Kurve $x^\mu(\tau)$

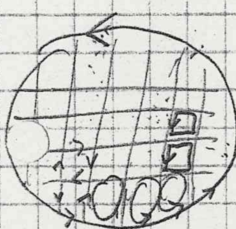
$$\Rightarrow \quad V^\mu_{(1)}(x) = V^\mu(x_0) - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau\, \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_{(1)}(\tau))\,\frac{dx^\nu_{(1)}}{d\tau}\,V^\lambda(x_{(1)}(\tau))$$

$$\Big\| \, ?$$

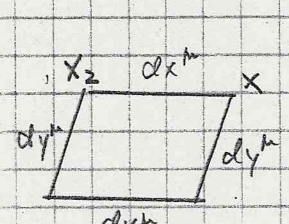
$$V^\mu_{(2)}(x) = V^\mu(x_0) - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau\, \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_{(2)}(\tau))\,\frac{dx^\nu_{(2)}}{d\tau}\,V^\lambda(x_{(2)}(\tau))$$

Der Vektor $V^\mu(x)$ ist also nur dann durch Parallelverschiebung eindeutig zu definieren, wenn das Integral wegunabhängig ist für alle Wege $x_{(i)}(\tau)$, i.e.

$$\oint_{\tau_0} d\tau\, \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\frac{dx^\nu}{d\tau}\,V^\lambda(x(\tau)) = 0$$



Ähnlich wie beim graphischen Begriff der Rotation können wir den „großen" geschlossenen Weg als Summe vieler kleiner infinitesimaler geschlossener Wege auffassen, deren benachbarte Wege sich gerade aufheben, so daß nur der „große" Weg übrigbleibt. Daher genügt obige Forderung der Wegunabhängigkeit für infinitesimal kleine, geschlossene Wege zu verifizieren.



$$dx^\mu = x_1^\mu - x_0^\mu = x^\mu - x_2^\mu$$

$$dy^\mu = x_2^\mu - x_0^\mu = x^\mu - x_1^\mu$$

Der Weg $x_0 \to x_1 \to x$:

$$V^\mu(x_1) = V^\mu(x_0) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_0)\, dx^\nu\, V^\lambda(x_0)$$

$$\underline{V^\mu(x) = V^\mu(x_1) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_1)\, dy^\nu\, V^\lambda(x_1)}$$

Es ist weiter

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_1) = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_0) + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_0)}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha + \dots ,$$

so erhalten wir bis zu Termen zweiter Ordnung (hier könnte man etwas "Bauchschmerzen" haben, eine genauere Rechnung mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung, $\int_a^b f(x)\,dx = f(\bar{x})(a-b)$, $\bar{x} \in]a,b[$ zeigt, daß unsere Überlegungen richtig bleiben):

$$\begin{aligned} V^\mu(x)\Big|_{x_0 x_1 x} &= V^\mu(x_0) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_0)(dx^\nu + dy^\nu) V^\lambda(x_0) + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_0)\, dy^\nu\, \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(x_0)\, dx^\alpha\, V^\beta(x_0) \\ &\quad - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_0)}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha dy^\nu\, V^\lambda(x_0) \\ &= V^\mu(x_0) - \left[\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_0)(dx^\nu + dy^\nu) + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_0)}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha dy^\nu - \Gamma^\mu_{\nu\beta}(x_0)\Gamma^\beta_{\alpha\lambda}(x_0)\, dx^\alpha dy^\nu \right] V \end{aligned}$$

Analog <u>der Weg $x_0 \to x_2 \to x$</u>: Hier muß gerade dx mit dy vertauscht werden, i.e.

$$V^\mu(x)\Big|_{x_0 x_2 x} = V^\mu(x_0) - \left[\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_0)(dy^\nu + dx^\nu) + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_0)}{\partial x^\alpha}\, dy^\alpha dx^\nu - \Gamma^\mu_{\nu\beta}(x_0)\Gamma^\beta_{\alpha\lambda}(x_0)\, dy^\alpha dx^\nu \right] V$$

Wir subtrahieren beide Gleichungen und erhalten nach Umbenennung der Summationsindices α und ν in den beiden letzten Termen der letzten Gl.:

$$\begin{aligned} V^\mu(x)\Big|_{x_0 x_1 x} - V^\mu(x)\Big|_{x_0 x_2 x} &= \left[\frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\lambda} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\nu\lambda} \right]_{x_0} dx^\alpha dy^\nu\, V^\lambda(x_0) \\ &\triangleq R^\mu{}_{\lambda\alpha\nu}\, dx^\alpha dy^\nu\, V^\lambda(x_0) \end{aligned}$$

- Dieser Ausdruck verschwindet also nur dann, wenn $R^\mu{}_{\lambda\alpha\nu} = 0$, i.e. der Raum <u>flach ist</u>.

$R^\mu{}_{\lambda\alpha\nu} = 0$ ist also die <u>notwendige und hinreichende</u> Integrabilitätsbedingung, daß die Wegunabhängigkeit garantiert (analog: $\oint \vec{A}\, ds = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{A} = 0$).

- Der Begriff eines konstanten Vektorfeldes im gesamten Raum mit beliebiger Metrik, indem der Krümmungstensor nicht verschwindet, macht also <u>keinen Sinn</u>!

Eigenschaften des Krümmungstensors

- Zunächst: $R^{\mu}_{\ \lambda\alpha\nu}$ hat $(4^4)=256$ - Komponenten

ABER: Nicht alle sind unabhängig. Dies liegt an der Existenz von einer Reihe von Symmetrieeigenschaften.

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} R^{\lambda}_{\ \nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda}\left(\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}\right)$$

Weinberg: $\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma}\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right]$; $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = 2\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu}$; $\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \Gamma$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} g_{\sigma\mu}$$

Damit

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right) = \frac{1}{2} g_{\mu\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[g^{\lambda\tau}\underbrace{\left(\frac{\partial g_{\alpha\tau}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\tau}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\tau}}\right)}_{2\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} g_{\sigma\tau}}\right]$$

$$- \frac{1}{2} g_{\mu\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[g^{\lambda\tau}\underbrace{\left(\frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\tau}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\tau}}\right)}_{2\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} g_{\sigma\tau}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} g_{\mu\lambda}\frac{\partial g^{\lambda\tau}}{\partial x^{\beta}}\, 2\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} g_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} g_{\mu\lambda}\frac{\partial g^{\lambda\tau}}{\partial x^{\alpha}}\, 2\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} g_{\sigma\tau}$$

$$+ \frac{1}{2}\delta^{\tau}_{\mu}\left[\frac{\partial^2 g_{\alpha\tau}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\tau}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\tau}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\tau}}\right]$$

Schreiben wir weiter

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\delta^{\tau}_{\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(g_{\mu\lambda} g^{\lambda\tau}\right) = g_{\mu\lambda}\frac{\partial g^{\lambda\tau}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\beta}} g^{\lambda\tau}$$

$$\Rightarrow \quad g_{\mu\lambda}\frac{\partial g^{\lambda\tau}}{\partial x^{\beta}} = -g^{\lambda\tau}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\beta}} = -g^{\lambda\tau}\left(\Gamma^{\rho}_{\beta\mu} g_{\rho\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\beta\lambda} g_{\rho\mu}\right),$$

so erhalten wir

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\mu}}\right)$$

mit $g^{\lambda\tau} g_{\sigma\tau} = \delta^{\lambda}_{\sigma}$

$$- \left(\Gamma^{\rho}_{\beta\mu} g_{\rho\lambda} + \cancel{\Gamma^{\rho}_{\beta\lambda} g_{\rho\mu}}\right)\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}$$

$$+ \left(\Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} g_{\rho\lambda} + \cancel{\Gamma^{\rho}_{\alpha\lambda} g_{\rho\mu}}\right)\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}$$

$$+ \cancel{g_{\mu\lambda}\left(\Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}\right)}$$

und letztlich

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} \right)$$

$$+ \; g_{\rho\lambda}\left(\Gamma^\rho_{\alpha\mu}\Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\rho_{\beta\mu}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \right)$$

In dieser Form sind die Symmetrierelationen bezüglich der Vertauschung von Indizes offensichtlich:

(1) $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}$, (Antisymmetrie) bzgl. vorderen/hinteren Indexpaar

(2) $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$, (Symmetrie) bzgl. vorderen und hinteren Indexdublett

(3) $R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0$; (Zyklizität) (z.B.) in den letzten drei Indizes

• <u>Wieviel</u> unabhängige Komponenten bleiben (für beliebige n-Dimensionen)?

(1) $n^4 \xrightarrow{\text{Antisymmetrie}} \left[\frac{n}{2}(n-1)\right]\cdot\left[\frac{n}{2}(n-1)\right] \hat{=} N^2 = \left(\frac{n}{2}(n-1)\right)^2$ – unabhängige Komponenten

↑ ein antisym.-Tensor 2-ter Stufe hat $\frac{n}{2}(n-1)$ unabhängige Komponenten

(2) $N^2 \xrightarrow{\text{Symmetrie}} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)\left(\frac{n}{2}(n-1)+1\right) = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2)$

ein symmetrischer Tensor 2-ter Stufe hat $\frac{N\cdot(N+1)}{2}$ unabhängige Komponenten

(3) Man macht sich klar, daß aufgrund der Antisymmetrieeigenschaft alle Indizes in (3) unterschiedlich sein müssen, damit Beziehung (3) nicht auf (2) oder (1) führen und etwas Neues ausdrücken (sei z.B. $\mu=\nu \Rightarrow \underbrace{R_{\mu\mu\alpha\beta}}_{(1)\,=0} + R_{\mu\beta\mu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\mu} = R_{\mu\beta\mu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\mu} \overset{(1)}{=} R_{\mu\beta\mu\alpha} - R_{\mu\alpha\mu\beta} = 0$

$\alpha=\beta \Rightarrow R_{\mu\nu\alpha\alpha} + R_{\mu\alpha\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\alpha\nu} = R_{\mu\alpha\nu\alpha} - R_{\mu\alpha\nu\alpha} = 0$.)

Auch spielt die Reihenfolge keine Rolle, i.e. μ kann an jedem festen Platz mittels (1) oder (2) stehen.

Man hat also $\frac{1}{4!}\, n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)$ neue, wesentlich verschiedene Möglichkeiten, die Indizes zu wählen. Dies sind neue Bedingungen der Komponenten untereinander.

Man hat also insgesamt

$$C_n = \frac{1}{8} n(n-1)(n^2-n+2) - \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) = \underline{\frac{1}{12} n^2(n^2-1)} \qquad \text{für } n \geq 3$$

voneinander unabhängige Komponenten;

$$C_n = \frac{1}{8} n(n-1)(n^2-n+2) \qquad \text{für } n \leq 3 ,$$

da das letzte Kriterium, i.e. die Zyklizität nichts trägt und der Ausdruck $\frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3)$ sonst negativ wäre. Speziell: $\underline{C_4 = 20}$; $\underline{C_2 = 1}$.

(Man macht sich für $n=2$ klar, daß die Antisymmetrisierung schon alles erschlägt, i.e. von $36 \Rightarrow 1$ unabhängige Komponente ist hier z.B. $R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$).

Schließlich fragen wir, welche Tensoren niederer Stufe, insbesondere Skalare wir aus dem Krümmungstensor durch Kontraktion der Indizes bilden können. Aufgrund der Antisymmetrie ist $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$, aber

$$R_{\nu\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} = -g^{\mu\alpha} R_{\nu\mu\alpha\beta} \neq 0 , \qquad \text{— \underline{Ricci-Tensor}}$$

sodaß wir nur einen, eben diesen Tensor 2-ter Stufe durch Kontraktion erzeugen können, den sog. <u>Ricci-Tensor</u> $R_{\nu\beta}$. $R_{\nu\beta}$ ist <u>symmetrisch</u> (i.e. hat 10 unabhängige Komponenten):

$$R_{\beta\nu} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\beta\alpha\nu} = g^{\alpha\mu} R_{\mu\beta\alpha\nu} \overset{\mu\leftrightarrow\alpha}{=} g^{\mu\alpha} R_{\underbrace{\alpha\beta\mu\nu}} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\nu\beta}$$

(<u>Bemerkung</u>: Anhand der expliziten Form von $R^{\alpha}_{\ \mu\beta\gamma}$ oder $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ erkennt man, daß $R_{\beta\nu}$ (quasi-) linear in der 2-ten Ableitung $\frac{\partial^2 g_{..}}{\partial x^2}$ ist, ~~quasi~~, da $\sim g^{..} \cdot \frac{\partial^2 g_{..}}{\partial x^2}$. Lineare Ableitungsterme erscheinen aber quadratisch.)

Aufgrund der Symmetrie von $R_{\beta\nu}$ läßt sich dieses weiter zu einem Skalar, dem sog. <u>Krümmungsskalar</u>

$$R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} \qquad \text{— \underline{Krümmungsskalar}}$$

kontrahieren.

<u>Beispiel</u>: <u>$n=2$</u> ; <u>Kugeloberfläche</u>

Es ist: $R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$ = ist die einzige unabhängige Komponente.

Diese 4 sind die einzig nicht verschwindende.

Damit

$$R_{\nu\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} \Rightarrow \quad R_{11} = g^{22} R_{1212}$$

$$R_{12} = -g^{12} R_{1212} = R_{21}$$

$$R_{22} = g^{11} R_{1212}$$

$$\Rightarrow \quad R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} = 2\left(g^{11}g^{22} - (g^{12})^2\right) R_{1212}$$

Speziell für die Kugeloberfläche ist ($x^1 = \vartheta$, $x^2 = \varphi$):

$$g_{11} = R^2, \; g_{12} = 0, \; g_{22} = R^2\sin^2\vartheta \; ; \quad g^{11} = \frac{1}{R^2}, \; g^{22} = \frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}, \; g^{12} = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \; ; \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\vartheta \quad \text{– alle anderen verschwinden}$$

Formel auf (6) oben

$$\Rightarrow R_{1212} = \frac{1}{2}\left(0 - 0 - 0 + \frac{\partial^2 R^2\sin^2\vartheta}{\partial\vartheta^2}\right) + g_{\rho\lambda}\left(\underbrace{\Gamma^\rho_{11}}_{=0}\Gamma^\lambda_{22} - \Gamma^\rho_{12}\Gamma^\lambda_{12}\right) \quad \Rightarrow \rho = \lambda = 2$$

$$= R^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - g_{22}(\cot\vartheta)^2 = R^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - R^2\sin^2\vartheta\,\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} = \underline{-R^2\sin^2\vartheta}$$

$$\Rightarrow \quad R = 2\left(\frac{1}{R^4\sin^2\vartheta}\right)\cdot\left(-R^2\sin^2\vartheta\right) = \underline{\underline{-\frac{2}{R^2}}}$$

- Das oben definierte <u>Krümmungsskalar</u> (i.e. Invariante unter Koordinatentrafos) entspricht gerade der <u>Gaußschen Krümmung</u>:

$$K_{\text{Gauß}} \equiv -\frac{R}{2} \quad \left(\overset{\text{speziell}}{=} \frac{1}{R^2} \text{ für Kugeloberfläche}\right)$$

der Faktor $(-\frac{1}{2})$ ist rein historische Notation.

Die Bianchi-Identitäten

Eine weitere Reihe von wichtigen, später im Zusammenhang mit der Divergenzfreiheit benötigten Beziehungen der Komponenten des Krümmungstensors sind die sog. Bianchi-Identitäten.

Sie lauten

$$\underbrace{R_{\alpha\mu\beta\gamma\|\delta} + R_{\alpha\mu\delta\beta\|\gamma} + R_{\alpha\mu\gamma\delta\|\beta}}_{\text{zykl. Vertauschen in } \beta\gamma\delta} = 0 \qquad - \quad \underline{\text{Bianchi-Identitäten}}$$

Recht einfach sieht man diese Beziehung ein, wenn man die explizite Darstellung von $R_{\alpha\mu\beta\gamma}$ vom letzten Abschnitt sich vergegenwärtigt:

$$R_{\alpha\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\right) + \Gamma \otimes \Gamma$$

Wählt man speziell wieder das <u>geodätische</u> System, so ist lokal am Punkt P $g_{\beta\alpha} = \eta_{\beta\alpha}$, aber auch $\Gamma_{(P)} = 0$, d.h.

$$R^{(I)}_{\alpha\mu\beta\gamma\|\delta} \overset{L.I.S.}{=} R^{(I)}_{\alpha\mu\beta\gamma|\delta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\delta}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\right) + \underbrace{\frac{\partial(\Gamma)}{\partial x^\delta} \cdot \underbrace{\Gamma}_{=0}}_{=0 \; P}$$

Der Γ-Term verschwindet also auch hier beim Ableiten, da quadratisch.

Zyklisches Vertauschen in $\beta\gamma\delta$ und Addition der drei Ausdrücke liefert dann im lok. Inertialsystem

$$R^{(I)}_{\alpha\mu\beta\gamma\|\delta} + R^{(I)}_{\alpha\mu\delta\beta\|\gamma} + R^{(I)}_{\alpha\mu\gamma\delta\|\beta} = 0,$$

was aber dann aufgrund des Tensorcharakters des Ausdrucks auch in jedem Bezugssystem gilt!

Weniger elegant soll nun aber auch ein direkter Beweis der Identitäten skizziert werden.

Dazu betrachte man den Ausdruck

$$\left(V_{\alpha\|\beta\|\gamma} - V_{\alpha\|\gamma\|\beta}\right)_{\|\delta} = \left(R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^\mu\right)_{\|\delta}$$

$$= R_{\alpha\mu\beta\gamma\|\delta} V^\mu + R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^\mu_{\|\delta}$$

Diese Gleichung antisymmetrisieren wir jetzt bzgl. der Indizes (β,γ,δ).

Darunter verstehen wir

$$T_{\{\beta\gamma\delta\}} \equiv \left\{T_{\beta\gamma\delta}\right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} = \sum_{P(\beta\gamma\delta)} (-)^P \, T_{P(\beta),P(\gamma),P(\delta)}$$

$$= T_{\beta\gamma\delta} + T_{\gamma\delta\beta} + T_{\delta\beta\gamma} - T_{\delta\gamma\beta} - T_{\gamma\beta\delta} - T_{\beta\delta\gamma}$$

Wir erhalten

$$\left\{ V_{\alpha\|\beta\|\gamma\|\delta} - V_{\alpha\|\gamma\|\beta\|\delta} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} = \left\{ R_{\alpha\mu\beta\gamma\|\delta} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} V^{\mu} + \left\{ R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^{\mu}_{\|\delta} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)}$$

Nun gilt aber auch aufgrund der Permutationseigenschaft

$$\left\{ V_{\alpha\|\beta\|\gamma\|\delta} - V_{\alpha\|\gamma\|\beta\|\delta} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} = \left\{ V_{\alpha\|\delta\|\beta\|\gamma} - \underset{\text{gerade Permut.} \rightarrow}{V_{\alpha\|\delta\|\gamma\|\beta}} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)}$$

Beachten wir, daß wir für einen Tensor 2-ter Stufe habe

$$(T_{\kappa\varrho})_{\|\beta\|\gamma} - (T_{\kappa\varrho})_{\|\gamma\|\beta} = \underset{\swarrow\ \text{vertauscht mit Ableitungen, da } (g_{\kappa\alpha})_{\|\beta}=0}{g_{\kappa\alpha}\, g_{\varrho\delta}} \left[(T^{\alpha\delta})_{\|\beta\|\gamma} - (T^{\alpha\delta})_{\|\gamma\|\beta} \right] \swarrow \text{Formel von S. 3.}$$

$$= g_{\kappa\alpha}\, g_{\varrho\delta} \left[R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma} T^{\mu\delta} + R^{\delta}{}_{\mu\beta\gamma} T^{\alpha\mu} \right] = R_{\kappa\mu\beta\gamma} T^{\mu}{}_{\varrho} + R_{\varrho\mu\beta\gamma} T_{\kappa}{}^{\mu}$$

Schreiben wir $V_{\alpha\|\delta} = T_{\alpha\delta}$, so finden wir für

$$V_{\alpha\|\delta\|\beta\|\gamma} - V_{\alpha\|\delta\|\gamma\|\beta} = R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^{\mu}_{\|\delta} + R_{\delta\mu\beta\gamma} V_{\alpha}{}^{\|\mu},$$

wobei wir unter $V_{\alpha}{}^{\|\mu} = g^{\mu\delta} V_{\alpha\|\delta}$ verstehen.

Damit folgt weiter

$$\left\{ V_{\alpha\|\delta\|\beta\|\gamma} - V_{\alpha\|\delta\|\gamma\|\beta} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} = \left\{ R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^{\mu}_{\|\delta} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} + \left\{ R_{\delta\mu\beta\gamma} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} V_{\alpha}{}^{\|\mu}$$

Ein Vergleich mit den obersten zwei Beziehungen zeigt, daß zwei Klammern gleich sind, sodaß

$$\left\{ R_{\alpha\mu\beta\gamma\|\delta} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} V^{\mu} = \left\{ R_{\delta\mu\beta\gamma} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} V_{\alpha}{}^{\|\mu}$$

Nun ist

$$\left\{ R_{\delta\mu\beta\gamma} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} = -\left\{ R_{\mu\delta\beta\gamma} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} = -(R_{\mu\delta\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\delta} + R_{\mu\gamma\delta\beta}) + (R_{\mu\gamma\beta\delta} + R_{\mu\beta\delta\gamma} + R_{\mu\delta\gamma\beta}$$

$$\overset{\text{Zyklizitätsregeln}}{=} 0,$$

Da V^{μ} beliebiger Vektor, impliziert das

$$\left\{ R_{\delta\mu\beta\gamma\|\delta} \right\}_{(\beta,\gamma,\delta)} \overset{\text{Antisymmetrie in den letzten 2 Indizes}}{=} 2 \left(R_{\alpha\mu\beta\gamma\|\delta} + R_{\alpha\mu\delta\beta\|\gamma} + R_{\alpha\mu\gamma\delta\|\beta} \right) = 0,$$

also die <u>Bianchi-Identitäten</u>.

Wiederholung

- $D_\mu V^\nu \equiv V^\nu_{\|\mu} = V^\nu_{|\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$

- $V^\alpha_{\|\beta\|\gamma} - V^\alpha_{\|\gamma\|\beta} \hat{=} (D_\gamma D_\beta - D_\beta D_\gamma) V^\alpha = [D_\gamma, D_\beta] V^\alpha$

$$= R^\alpha{}_{\mu\beta\gamma} V^\mu \quad \text{– Riemannscher Krümmungstensor}$$

mit

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\gamma} = \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\nu} \Gamma^\nu_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\nu_{\gamma\mu} \right)$$

- flacher Raum: $\exists$ GIS mit $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \Gamma \equiv 0$ $\forall$ Raumzeitpunkte $\to R^\alpha{}_{\mu\beta\gamma} \equiv 0$

  $\leftarrow$ Umkehrung gilt auch
  [illegible] Kap. 5.6

- $(g_{\alpha\nu})_{\|\gamma} = 0 \Rightarrow [D_\gamma, D_\beta] V_\alpha = g_{\alpha\nu} R^\nu{}_{\mu\beta\gamma} V^\mu = R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^\mu$

- Paralleltransport entlang (infinitesimal) verschiedener Wege:

$$V^\mu(x)\Big|_{x_0 \overset{1}{\to} x} - V^\mu(x)\Big|_{x_0 \overset{2}{\to} x} \hat{=} \underbrace{R^\mu{}_{\nu\alpha\lambda}\, dx^\alpha dx^\nu V^\lambda(x_0)}_{\text{nur falls } = 0 \text{, garantiert dies die Integrabilität}} \to \text{konstantes Vektor(Tensor)-feld macht keinen Sinn im Großen}$$

linear in 2-ten Ableitung

Weinberg:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} \right)$$
$$+ g_{\rho\lambda} \left(\Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\rho_{\beta\mu} \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \right)$$

(AS) $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}$

(S) $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$

(Z) $R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0$

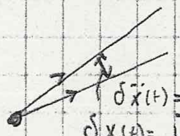
$\Rightarrow$ Anzahl unabhängiger Komponenten: ursprünglich 256 $\to C_4 = 20$ ($n = 4$ Dimensionen)

16 $\to \underline{\underline{C_2 = 1}}$ ($n = 2$ Dimensionen)

Geodätische Abweichung – die Rolle des Krümmungstensors in der Physik

Newtonsche Bewegung $\longleftrightarrow$ **Geodätenbewegung**

kräftefrei $\longleftrightarrow$ nicht kräftefrei



$\delta\dot{x}(t) = 0$

$\delta x(t) = \vec{v}_{rel}\, t$

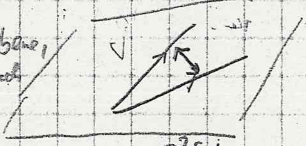
$\delta\ddot{x}(t) = \vec{F}(x_2(t)) - \vec{F}(\vec{x}_1(t))$

$\approx (\vec{\nabla}F_x \cdot \delta\vec{x}, \vec{\nabla}F_y\, \delta\vec{x}, \vec{\nabla}F_z\, \delta\vec{x})$

"Gezeitenkräfte"

flacher Raum $\longleftrightarrow$ gekrümmter Raum

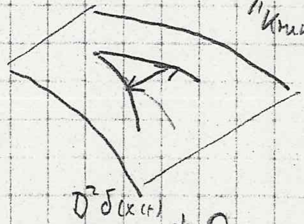
Ebene, flach



$\frac{D^2 \delta x^i(\tau)}{D\tau^2} = 0$

$\delta x^i(\tau) \sim \tau$

"Krümmung"



$\frac{D^2 \delta x(\tau)}{D\tau^2} \neq 0$

relative Bewegung nicht "kräftefrei", da Fläche gekrümmt

- **Idee:** Der Krümmungstensor sollte, physikalisch gesehen, die <u>Abweichung des Gravitationsfeldes</u> von der Homogenität beschreiben?

  (Er ist ja auch proportional der 1-ten Ableitung der Christoffel-Symbole)

  (Dies ist auch einleuchtend, denn wir hatten ja bereits gesehen, daß die Komponenten Γ^i_{00} die scheinbaren Newtonschen Gravitationskräfte beschreiben, und $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ enthält die 1-te Ableitungen der Übertragungssymbole.)

Betrachten wir zwei benachbarte, frei fallende Teilchen. Wenn das Gravitationsfeld <u>inhomogen</u> ist, so erwarten wir, daß ihre Bahnen nicht genau parallel zueinander verlaufen, ihr Abstand also dem Einfluß der <u>Raum-Zeit-Krümmung</u> unterliegt.

Die benachbarten geodätischen Trajektorien bezeichnen wir mit $x^\mu(\tau)$ und $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$:

$$(*) \qquad \ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)\, \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0$$

$$(\ddot{x}^\mu + \delta\ddot{x}^\mu) + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x+\delta x)\, (\dot{x}^\nu + \delta\dot{x}^\nu)(\dot{x}^\lambda + \delta\dot{x}^\lambda) = 0$$

$$\overset{\text{1-te Ordnung}}{\Longrightarrow} \delta\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, \dot{x}^\nu \delta\dot{x}^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, \delta\dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda + \underbrace{\frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha}}_{\text{aha, 1-te Ableitung der Übertragung}} \delta x^\alpha \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda \qquad (**)$$

Um die Gleichung kovariant als Tensorgleichung zu schreiben, schauen wir uns die zweite kovariante Ableitung des Vektors δx^μ entlang der Kurve $x^\mu(\tau)$ an:

$$\frac{D}{D\tau}(\delta x^\mu) = \delta\dot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, \dot{x}^\nu \delta x^\lambda$$

$$\frac{D^2}{D\tau^2}(\delta x^\mu) = \delta\ddot{x}^\mu + \frac{d}{d\tau}\left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\dot{x}^\nu\delta x^\lambda\right) + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\dot{x}^\nu\left(\delta\dot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\delta x^\beta\right)$$

$$= \underline{\delta\ddot{x}^\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\ddot{x}^\nu\delta x^\lambda + \underline{\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\dot{x}^\nu\delta\dot{x}^\lambda} + \underline{\frac{\partial\Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha}}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\nu\delta x^\lambda$$

$$+ \underline{\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\dot{x}^\nu\delta\dot{x}^\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\nu\dot{x}^\alpha\delta x^\beta$$

Vergleichen wir dies mit (**), so stellen wir fest, daß die ersten drei Terme in (**) wir hier wiederfinden (die unterstrichenen), so daß wir nur die drei Terme durch den vierten in (**) in der hiesigen Gleichung ersetzen dürfen:

den neuen Term

$$\frac{D^2}{D\tau^2}(\delta x^\mu) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\ddot{x}^\nu\delta x^\lambda - \frac{\partial\Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\nu\delta x^\lambda - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\nu\dot{x}^\alpha\delta x^\beta + \frac{\partial\Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha\dot{x}^\nu\dot{x}^\lambda = 0$$

α mit λ vertauschen

Nun setzen wir noch (*) für $\ddot{x}^\nu$ ein und sammeln alle Ausdrücke:

$\beta\leftrightarrow\lambda$, $\nu\leftrightarrow\alpha$

$$\frac{D^2}{D\tau^2}(\delta x^\mu) = \left(\frac{\partial\Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\mu_{\nu\alpha}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\Gamma^\beta_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\,\Gamma^\beta_{\nu\alpha}\right)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\nu\delta x^\lambda$$

$$= R^\mu_{\nu\lambda\alpha}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\nu\delta x^\lambda$$

- Ist der Raum also flach, so ist $\frac{D^2}{D\tau^2}(\delta x^\mu) = 0 \Rightarrow \delta x^\mu \sim \tau \mathrel{\hat{=}}$ „kräftefreie Bewegung"

Es wird nun schon klar aus unserer schematischen Überlegung am Anfang, daß $R^\mu_{\nu\lambda\alpha}$ die Abweichung von der Homogenität des Kraftfeldes bedeutet. Um dies genauer zu sehen, betrachten wir wieder den nichtrel. Grenzfall $|\dot{x}^i| \ll c$, [illegible]

$$\frac{D^2}{D\tau^2}(\delta x^i) = c^2\sum_{k=1}^{3} R^i_{0k0}\,\delta x^k$$

Spezielles: Gehen wir in das jeweils lokal mitfallende Bezugssystem eines Beobachters entlang der Trajektorie $x^\mu(\tau)$, so ist dort $\frac{D^2}{D\tau^2} = \frac{d^2}{d\tau^2} \approx \frac{d^2}{dt^2}$ im nichtrel. Grenzfall, so daß

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}(\delta x^i)\right|_{L.I.S} = c^2\sum_{k=1}^{3} R^i_{0k0}\,\delta x^k$$

Wenn nun die beiden Teilchen, statt gleichförmig und unabhängig voneinander frei zu fallen, aneinander gekoppelt sind, so tritt eine scheinbare Kraft zwischen ihnen auf, die von der Inhomogenität des Gravitationsfeldes herrührt (i.e. Gezeitenkraft):

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta x^i) = F^i(x^k + \delta x^k) - F^i(x^k) \approx \frac{\partial F^i}{\partial x^k}\,\delta x^k$$

Ergo liegt die intuitive Schlußnahme, daß

$$\boxed{c^2 R^i_{\;0k0} \;\hat{=}\; \frac{\partial F^i}{\partial x^k}}$$

Falls nun das Newtonsche Kraftfeld (i.e. Gravitation) einem Potential genügt, i.e.

$$F^i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad ,$$

so ist die Verknüpfung

$$c^2 R^i_{\;0k0} \;\hat{=}\; -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k}$$

Im Materie-freien Raum ist der Laplacian $\nabla^2 \varphi = 0$, sodaß dem entspricht

$$c^2 R^i_{\;0i0} \;\hat{=}\; 0 \quad ,$$

so daß wir automatisch zum Ricci-Tensor geführt werden. Die kovariante Form dieser Gleichung würde dann für den materie-freien Raum lauten

$$R^\mu_{\;\alpha\mu\beta} = R_{\alpha\beta} = 0$$

als Verallgemeinerung der Laplace-Gleichung. Diese Überlegung soll die zu erratende Form der Einstein-Gleichungen schon einmal überleitend motivieren.