3) Tensoren, Tensoranalysis (dritter Teil)

• vier-dimensionaler Riemann-Raum mit Metrik

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i dx^k \quad , \quad g_{ik} = g_{ki} = g_{ik}(x^l)$$

• pseudo-euklidisch, d.h. falls Raum flach existiert Koordinaten sodaß

$$g_{ik} \to g_{\mu\nu} \hat{=} \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

allgemeine Kovarianz

Im letzten Kapitel haben wir die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt im Gravitationsfeld abgeleitet. Dabei sind wir von dem Äquivalenzprinzip ausgegangen, das besagt, daß in einem geeigneten 'mitfallenden' Koordinatensystem ≙ Bezugssystem, die Bewegungsgleichung die einfache Form $\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$, wie in einem Inertialsystem, hat. In anderen Bezugsystemen haben wir dann die Bewegungsgleich. durch explizite Koordinatentransform. erhalten. Im Prinzip ließe sich dieses Verfahren auf alle gewünschten Gleichungen der Physik anwenden, wäre aber recht umständlich und etwas zu kompliziert.

⇒ Prinzip der allg. Kovarianz

Eine physikalische Gleichung in einem beliebigen Gravitationsfeld besitzt Gültigkeit, wenn

1.) die Gleichung in Abwesenheit eines Gravitationsfeldes in einem Inertialsystem (Lorentz gilt, i.e. wenn $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ und $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$;

2.) die Gleichung allgemein kovariant ist, d.h. ihre Form unter allg. Koordinatentrafo behält.

(Gemäß dem Äquivalenzprinzips gibt es immer ein lokales Bezugssystem wo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ und damit $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ für kleine Umgebung)

↳ auch die 1-ten Ableitungen verschwinden an dem Punkt!

Diese allg. Kovarianz besitzt eine andere Bedeutung als z.B. das Prinzip der Lorentzinvarianz?

<u>Lorentzinvarianz</u>: Gleichg. in einem Bezugssyst. → Lorentz-Trafo und ggf. ändere das allgemeingültige Gesetz so ab, daß auch in den neuen Koordinaten <u>exakt</u> dieselbe Form hat und <u>nicht</u> von der Koordinatentrafo abhängt. Insbesondere fallen die Geschwindigkeiten der Lorentztrafo heraus.

⇒ starke Einschränkung der zulässigen Gleichungen.

allg. <u>Kovarianz</u>: (dynamisches Symmetrieprinzip wie z.B. auch lok. Eichinvarianz in Eichfeldtheorien)!

Hier nun fordern wir, daß die Gleichg. zwar dieselbe Gestalt hat, aber ihre <u>einzelne Bestandteile</u> ("Größe") wie z.B. $g_{\mu\nu}(x)$, $\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}(x)$ etc. sehr wohl von den Koordinatentrafos abhängen können (oder gar sollen), da sie ja die Gravitation (und Scheinkräfte), also mit anderen die Koordinatenabhängigkeit explizit berücksichtigen.

(soll vor allem für infinitesimale Größe gelten, deren Änderung übergehen die Änderung des Gravitationsfeldes sind).

⇒ eine mögliche Darstellung – <u>Tensorgleichungen</u>

<u>Beispiele</u>: Trägheitstensor, Energie-Impuls-Tensor, Stress-Tensor ...

(obwohl hier erst eingeschränkte Koordinatentransformationen)

Am einfachsten ist es sicherzustellen, daß sich die räumliche Größe unmittelbar mit den Raum-Zeit-Koordinaten zusammenhängen und sich daher ähnlich wie die Koordinaten transformieren.

<u>Aber</u>: Starke Einschränkung an mögliche "Objekte"

Tensoren

$$\bar{x}^j = f^j(x^i,\ i=1,\dots,n) \longleftrightarrow x^k = h^k(\bar{x}^i,\ i=1,\dots,n)$$

(später $j \to \mu$ von $\mu = 0,\dots,3$)

Größen, die unter Koordinatentrafos invariant bleiben heißen Skalare.

z.B. 1) Konstanten wie $\alpha = 1/137$, $G = \dots$ etc

2.) skalare Felder $\phi(x^i)$, z.B. Temperatur

3.) infin. Abstandsquadrat $ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$

$\Rightarrow$ g_{ik}, dx^i, dx^k müssen sich so transformieren, daß ds^2 invariant bleibt.

Die Größe mit dem nächsteinfachen Transformationsverhalten sind die Vektoren.

Kontravariante Vektoren: Betrachte infinit. Verrückung zwischen Punkt A $\{x^i\}$ und Punkt B $\{x^i + dx^i\}$:

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}dx^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}dx^j \qquad \left(\text{bzw. } dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}d\bar{x}^i\right)$$

oben

$$\boxed{\bar{u}^i(\bar{x}^k) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\,u^j(x^k)}$$

Definition zum Transformationsverhalten eines kontravarianten Vektors, i.e. jede physik. Größe die sich so unter Koordinatentrafo transformiert heißt kontravarianter Vektor.

($a u^i + b v^i$ ≙ kontravar. Vektor, falls $a(x^i)$ und $b(x^i)$ skalare Größen sind.)

Kovariante Vektoren: Betrachte Gradient einer skalaren Größe, i.e. $w_i \equiv \frac{\partial \phi(x^i)}{\partial x^i}$

$$\Rightarrow \bar{w}_i(\bar{x}^j) = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \phi(\bar{x}^i)}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \phi}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\,w_j$$

$$\boxed{\bar{w}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\,w_j}$$

unten

— Trafo-verhalten eines kovarianten Vektors

bzw. $w_i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\,\bar{w}_j$

Verjüngung oder Kontraktion von Indizes

④

<u>Theorem:</u> $\left(\sum_i\right) w_i u^i$ verhält sich wie wie ein Skalar

$$P = w_i u^i \Rightarrow \bar{P} = \bar{w}_i \bar{u}^i = \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}}_{\hat{=}\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_{kj} \hat{=} \delta^k_j} w_k u^j = \delta^k_j w_k u^j = w_k u^k = P$$

• Wir gehen jetzt von einem Satz kovarianter und kontravarianter Vektoren in einem n-dim Raum aus.
Wir bilden die multilineare Form

$$P = \left(T^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b}\right)\left(u^{j_1}_{(1)} \dots u^{j_b}_{(b)}\right)\left(w^{(1)}_{i_1} \dots w^{(a)}_{i_a}\right),$$

wobei z.B. $u^{j_c}_{(c)}$ die j_c-Komponente des beliebigen Vektors $u_{(c)}$ bedeutet.
$T^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b}$ ist ein Satz von n^{a+b}-Elementen mit a oberen und b unteren Indizes, die kontravariant und kovariant genannt werden.
Durch Definition legen wir fest, daß die Größe $T^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b} \hat{=} T$ die Komponenten eines Tensors bilden, wenn sie sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems so transformieren, daß P invariant bleibt und dies für beliebige u's und w's gilt. axiomatische Definition
T habe den Rang $(a+b)$ mit a kontravarianten und b kov. Indizes

<u>Bemerkungen</u>

1.) Tensor vom Rang 0 ist ein Skalar.

2.) " " " 1 ist entweder kontravariant oder kovariant.

$P = T^i w_i$ ist ja dann auch ein Skalar.

3.) g_{ik}, $ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k$, g_{ik} also kovarianter Tensor vom Rang 2, <u>aber</u> dies ist so noch nicht vollständig, da dies für beliebige $u^i_{(1)}$, $u^k_{(2)}$, $u_{(1)} \neq u_{(2)}$ gelten muß

Betrachte $dx = dx_{(1)} + dx_{(2)}$

$$\Rightarrow \underset{\text{Skalar}}{ds^2} = \underset{\text{Skalar}}{ds^2_{(1)}} + \underset{\text{Skalar}}{ds^2_{(2)}} + \underline{2 g_{ik}\, dx^i_{(1)} dx^k_{(2)}}$$

muß also auch Skalar sein $\Rightarrow g_{ik}$ <u>ist</u> Tensor, da $dx^i_{(1)}$ und $dx^k_{(2)}$ beliebig!

Aus der Invarianzforderung der Größe P bei Koordinatentransformation folgt nun

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b} (\bar{u}^{j_1}_{(1)} \dots \bar{u}^{j_b}_{(b)}) (\bar{w}^{(1)}_{i_1} \dots \bar{w}^{(a)}_{i_a}) \overset{!}{=} T^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b} (u^{j_1}_{(1)} \dots u^{j_b}_{(b)}) (w^{(1)}_{i_1} \dots w^{(a)}_{i_a})$$

mit $\bar{u}^{j} = \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{\beta}} u^{\beta}$, $\bar{w}_i = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{i}} w_{\beta}$ und Umbenennung von $i \to \beta$, $j \to \beta$ auf der linken Seite

ergibt

$$\left[\left(\bar{T}^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b} \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{j_b}}{\partial x^{\beta_b}} \right) \left(\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_a}}{\partial \bar{x}^{i_a}} \right) - T^{\alpha_1 \dots \alpha_a}_{\beta_1 \dots \beta_b} \right] \cdot (u^{\beta_1}_{(1)} \dots u^{\beta_b}_{(b)}) (w^{(1)}_{\alpha_1} \dots w^{(a)}_{\alpha_a})$$

Da $u_{(i)}$, $w^{(i)}$ beliebig wählbar, folgt daß die Klammer verschwinden muß.

Unter Beachtung von

$$\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} = \delta^{j_1}_{l_1}$$

findet man schließlich das Transformationsverhalten in expliziter Form

$$\boxed{\bar{T}^{k_1 \dots k_a}_{l_1 \dots l_b} = \left(\frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k_a}}{\partial x^{\alpha_a}} \right) \left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar{x}^{l_b}} \right) T^{\alpha_1 \dots \alpha_a}_{\beta_1 \dots \beta_b}}$$

- jede einzelne Komponente transformiert sich wie ein ko- oder kontravarianter Vektor
- $\bar{T}^{\alpha\beta}_{\gamma} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}} \frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{\gamma}} T^{ij}_{k}$ <u>Tensoralgebra</u>
- $T^{\alpha\beta}_{\gamma} = u^{\alpha} v^{\beta} w_{\gamma}$ ist ein Tensor vom Rang 3 mit 2 kontra- und einem kovarianten Index
- $A^{\alpha\beta}_{\gamma} + B^{\alpha\beta}_{\gamma} = C^{\alpha\beta}_{\gamma}$ wieder Tensor
- $G^{\alpha\beta\mu\nu}_{\gamma} = T^{\alpha\beta}_{\gamma} S^{\mu\nu}$ — direktes Produkt oder auch äußeres Produkt ist ebenfalls Tensor (Rang 5, vier kontra, ein kov. Index)
- $A^{\alpha\beta}_{\gamma} = B^{\alpha\beta}_{\gamma}$ zwei Tensoren sind gleich, wenn sie in <u>einem</u> Bezugssystem einander gleich sind (notwendig und hinreichend)!

Dies stellt mit die größte Bedeutung für das Kovarianzpostulat allgemeingültiger Gleichungen dar! (Man mache sich das klar).

„Gesetze" wie $T_{\mu\nu}=2$, $V^\mu = u_\mu$ machen daher von vornherein keinen Sinn.

(Ausnahme: $T_{\mu\nu}=0$ gilt in allen Koordinatensystemen).

Die weitreichenden Konsequenzen des tensoriellen Verhaltens einer Größe machen es erforderlich, sorgfältig zu prüfen, ob ein gegebener Ausdruck sich wirklich wie ein Tensor transformiert.

Dabei kann man Überraschungen erleben, denn nicht jede Größe mit Indizes ist wirklich ein Tensor.

z.B. die affinen Übertragungen $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ sind keine Tensoren

Dies ist sofort einsichtig, da die $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ ja im geodätischen System gerade alle 0 sind, nicht aber in anderen Bezugssystemen. Wäre es ein Tensor, so wäre es in jedem Bezugssystem 0:

$$\bar\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \bar x^\mu \partial \bar x^\nu} = \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial x^\rho}\right)\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau}\right)$$ ← zu Vertiefen

$$= \frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\left(\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x^\sigma \partial \bar x^\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} + \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\nu}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}\right)$$

$$= \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\nu}\right)\frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} + \frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\nu}\Gamma_{\sigma\tau}^{\rho}$$

$$= \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar x^\mu \partial \bar x^\nu}\frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial x^\tau} + \qquad ''$$

Aufgrund von

$$\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\alpha}\frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\sigma} = \delta^\tau_\sigma \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar x^\mu}\left(\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\alpha}\frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\sigma}\right) = \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar x^\mu \partial \bar x^\alpha}\frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar x^\mu}\left(\frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\sigma}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar x^\mu \partial \bar x^\alpha}\frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\sigma} = -\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial^2 \bar x^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \xRightarrow{\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\nu}\frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial x^\tau}} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar x^\mu \partial \bar x^\nu}\frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial x^\tau} = -\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial^2 \bar x^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$$

und somit

$$\bar\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \underbrace{\frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\nu}\Gamma_{\sigma\tau}^{\rho}}_{\text{wie ein Tensor}} - \underbrace{\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial^2 \bar x^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}}_{\text{nicht tensoriell!}}$$

Beispiel zur Vertiefung:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \qquad \text{ist allgemein kovariant}$$

1.) Im Minkowski-Raum ist $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}=\text{const} \Rightarrow \Gamma^\lambda_{\mu\nu}=0 \Rightarrow$ kräftefreie gleichförmige Bewegung, i.e. Geodäte.

2.) Koordinatentransformation: $x \to \bar{x}$

$$\frac{d\bar{x}^\lambda}{d\tau} = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}$$ — 1-te Ableitung verhält sich wie ein Tensor

$$\frac{d^2\bar{x}^\lambda}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}$$ — 2-te Ableitung verhält sich nicht mehr wie ein Tensor.

Damit

$$\ddot{\bar{x}}^\lambda + \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}\dot{\bar{x}}^\mu\dot{\bar{x}}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\ddot{x}^\alpha + \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$$

$$+ \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\nu}\left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\tau} - \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha\right)\left(\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta\right)$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\ddot{x}^\alpha + \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + \left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\left(\ddot{x}^\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\right) = 0$$

Die linke Seite transformiert sich also wie ein kontravarianter Vektor!
Das nichttensorielle Verhalten von $\ddot{x}^\lambda$ wird gerade durch das nicht-tensorielle von $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ kompensiert!

• δ_l^k ist Tensor vom Rang 2

Beweis: $\bar{\delta}_j^k = \frac{d\bar{x}^i}{d\bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \delta_k^l$

• 1) Für einen sym. Tensor vom Rang 2 (beide Komp. entweder ko- oder kontravariant) gilt:

$$A^{mn} = A^{nm}$$

2) antisym.: $A^{mn} = -A^{nm}$

3.) jeder beliebige Tensor vom Rang 2 kann in einen sym. und antisym. Anteil zerlegt werden $A^{mn} = \frac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) - \frac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm})$

• Satz (ohne Beweis → siehe Adler):
Jeder Tensor mit Rang $q > 1$ läßt sich als Summe von höchstens $\rightarrow n^{q-1}$ Tensor-Produkte von jeweils q-Vektoren schreiben!

Kontraktion von Tensoren und das Quotiententheorem

Betrachte Tensor $T^{i_1\dots i_a}_{j_1\dots j_b}$ vom Rang $a+b$.

Konstruiere

$T^{i_1\dots i_{a-1}\sigma}_{j_1\dots j_{b-1}\sigma}$, i.e. kontrahiere zwei Indizes (o.B.d.A die letzten zwei)
"verjünge"

Behauptung: Dies ist ein Tensor vom Rang $a+b-2$ mit $a-1$ kontravarianten und $b-1$ kovarianten Indizes.

$$\bar T^{i_1\dots i_{a-1}\sigma}_{j_1\dots j_{b-1}\sigma} = \left(\frac{\partial \bar x^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial \bar x^{i_{a-1}}}{\partial x^{\alpha_{a-1}}}\frac{\partial \bar x^{\sigma}}{\partial x^{\alpha_a}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_{b-1}}}{\partial \bar x^{j_{b-1}}}\frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar x^{\sigma}}\right) T^{\alpha_1\dots\alpha_a}_{\beta_1\dots\beta_b}$$

$$\delta^{\beta_b}_{\alpha_a}$$

$$= \left(\frac{\partial \bar x^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial \bar x^{i_{a-1}}}{\partial x^{\alpha_{a-1}}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_{b-1}}}{\partial \bar x^{j_{b-1}}}\right) T^{\alpha_1\dots\alpha_{a-1}t}_{\beta_1\dots\beta_{b-1}t} \qquad \text{q.e.d.}$$

Beispiel: 1.) $\bar B^i_i = \frac{\partial \bar x^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i} B^k_l = \frac{\partial x^l}{\partial x^k} B^k_l = \delta^l_k B^k_l = B^k_k$

2.) $c^2 d\tau^2 = \underbrace{g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu}_{\text{verjüngt}}$ ist Tensor 0-ter Stufe

Beachte: Es ist wichtig welcher Index verjüngt wird: $T^{\alpha\beta\gamma}_{\gamma} \neq T^{\alpha\gamma\beta}_{\gamma} \neq T^{\gamma\alpha\beta}_{\gamma}$ (i. allg.)

Quotiententheorem

Spezialfall: $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_r}$ sei ein Objekt der Dimension n^{p+r} mit gewissen Transformationseigenschaften (nicht näher spezifiziert)

Sei u^i ein beliebiger Vektor. Ferner sei S

$S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{r-1}} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_r}\, u^{j_r}$ ein Tensor für beliebige u. Dann ist auch T ein Tensor?

Zum Beweis: Multipliziere die Gleichung mit beliebigen p kontravarianten Vektoren und $r-1$ kovarianten Vektoren und verjünge entsprechend. Da S ein Tensor, ist der gesamte Ausdruck ein Skalar, i.e.

$P = T \otimes u_{(1)} \dots u_{(p)} \otimes w_1 \dots w_{(r)}$

Aus dem Transformationsverhalten der u's und w's folgt dann aus der axiomatischen Definition, daß T ein Tensor sein muß.

Allgemeiner Fall: T wieder ein Objekt mit (nicht näher spezifizierten) Transformationseigenschaften.

A sei ein beliebiger Tensor, und bilde

$$S^{i_1 \dots i_{k-1}}_{j_1 \dots j_{r-1}} = T^{i_1 \dots i_{k-1} i_k \dots i_p}_{j_1 \dots j_{r-1} j_r \dots j_r} A^{j_r \dots j_r}_{i_k \dots i_p}$$

, wobei S für beliebige A sich wie ein Tensor transformiert, dann ist auch T ein Tensor.

Beweis: Schreibe z.B. $A = u^{j_r}_{(i)} \dots u^{j_r}_{(r)} \cdot w^{(1)}_{i_k} \dots w^{(p)}_{i_p}$ ← beliebige Vektoren

⇒ selber Beweis.

Der metrische Tensor (oder Fundamentaltensor)

In diesem Abschnitt wollen wir die fundamentale Bedeutung des metrischen Tensors etwas näher beleuchten.

Zur Erinnerung: Aus unseren physikalischen Überlegungen des letzten Kapitels fanden wir

geodätische Koordinaten, Lorentz-Metrik

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \bar g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \bar x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \bar x^\nu} \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \bar x^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\beta} g_{\gamma\rho} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar x^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar x^\nu} g_{\gamma\rho}$$

inverses

Definiere: $$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} \eta^{\alpha\beta} \Rightarrow \bar g^{\mu\nu} = \frac{\partial \bar x^\mu}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar x^\nu}{\partial x^\rho} g^{\gamma\rho}$$

$$\Rightarrow \bar g^{\mu\lambda} \bar g_{\lambda\nu} = \frac{\partial \bar x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\nu} g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\tau} \stackrel{!}{=} \frac{\partial \bar x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\tau}{\partial \bar x^\nu} \underbrace{\eta^{\alpha\sigma} \eta_{\sigma\tau}}_{\delta^\alpha_\tau} = \frac{\partial \bar x^\mu}{\partial \bar x^\nu} = \delta^\mu_\nu$$

Der so konstruierte bzw. definierte Tensor $g^{\mu\lambda}$ bildet also in der Tat den inversen Tensor zu $g_{\lambda\nu}$ in jedem Bezugssystem.

Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ spielt eine wichtige Rolle in der Tensoranalysis. Er ist direkt mit dem Koordinatensystem verknüpft und spielt daher, neben den beiden "fundamentalen Vektoren" dx^μ und $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, die Rolle eines "Fundamentaltensors". Der Tensor $g_{\mu\nu}$ kann dazu verwendet werden, einen kontravarianten Index eines Tensors in einen kovarianten zu verwandeln, d.h. den Index "herunterzuziehen" oder zu "senken".

z.B.

$$T^{\mu}{}_{\nu} = g_{\nu\lambda} T^{\mu\lambda}$$

$$T_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu}$$

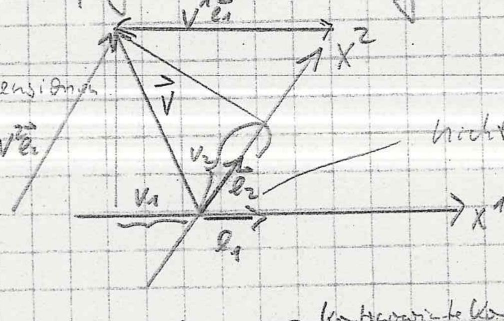
in der Regel unterschiedlich!

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} T^{\lambda\sigma}$$

$T^{\mu}{}_{\nu}$, $T_{\mu}{}^{\nu}$ stellen sog. assoziierte Tensoren zu $T^{\mu\lambda}$ dar. Sie enthalten im Prinzip nichts "Neues", da sie ja sofort mittels $g^{\mu\nu}$, dem Indizes, indiziert werden können.

Im Prinzip ist die Wahl des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ beliebig. Ist er jedoch einmal fixiert (im Sinne Riemanns $\underbrace{\text{definiert er ja die}}_{\text{i.e. metrischer Raum}}$ "Fläche"), spielt er eine wesentliche Rolle in der Tensoranalysis. Er etabliert die Beziehung zwischen kontravarianten und kovarianten Formen desselben Tensors (daher auch Fundamentaltensor). Dies liegt an seiner besonderen Bedeutung bei der Beschreibung der Geometrie des Raumes.

Zur Vertiefung: Zusammenhang zur Vektorrechnung in euklid. Geometrie



kontravariante Komponente

1) $\vec v = v^1 \cdot \vec e_1 + v^2 \cdot \vec e_2$ 1-te Darstellung des Vektors

2) $v_1 = \vec v \cdot \vec e_1$, $v_2 = \vec v \cdot \vec e_2$ definiert auch vollständig den Vektor $\vec v$ mittels seiner Lote.

kovariante Komponente

Betrachte das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec u, \vec v$, i.e.

$$\vec u \cdot \vec v = (u^1 \vec e_1 + u^2 \vec e_2)(v^1 \vec e_1 + v^2 \vec e_2) = u^1 v^1 \vec e_1 \cdot \vec e_1 + u^1 v^2 \vec e_1 \cdot \vec e_2 + u^2 v^1 \vec e_2 \cdot \vec e_1 + u^2 v^2 \vec e_2 \cdot \vec e_2$$

Sei $g_{ij} = \vec e_i \cdot \vec e_j$

$$\Rightarrow \vec u \cdot \vec v = g_{ij}\, u^i v^j$$

Es ist tatsächlich

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2) = v^1\,\vec{u}\cdot\vec{e}_1 + v^2\,\vec{u}\cdot\vec{e}_2 = u_1 v^1 + u_2 v^2 = u_i v^i$$

Da $\vec{v}$ beliebig wählbar $\Rightarrow$ $\boxed{u_i = g_{ij}\, u^j}$

, Betrachte wir neue (Einheits)vektoren $\vec{\bar{e}}_1, \vec{\bar{e}}_2$:

$$\vec{\bar{e}}_i = A_{ij}\,\vec{e}_j \qquad , \text{ selbe Relationen gelten } +$$

$\Rightarrow$ 1.) $\vec{v} = \bar{v}^i\,\vec{\bar{e}}_i \overset{!}{=} v^i\vec{e}_i \Rightarrow v^j = A_{ij}\bar{v}^i$ bzw. $\underline{\bar{v}^i = (A^{-1})_{ji}\, v^j}$

2.) $\bar{v}_i = \vec{v}\cdot\vec{\bar{e}}_i = \vec{v}\cdot A_{ij}\,\vec{e}_j = \underline{A_{ij}\; v_j}$

3.) $\bar{g}_{ij} = \vec{\bar{e}}_i\cdot\vec{\bar{e}}_j = A_{ki}A_{lj}\,\vec{e}_k\vec{e}_l = \underline{A_{ki}A_{lj}\,g_{kl}}$

- $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ folgt unmittelbar

nicht notwendigerweise

$\Rightarrow$ g_{ij} definieren lokal das Skalarprodukt an (Einheits)-Tangentialvektoren, welche ein lokales tangentielles Euklidische Raum aufspannen.