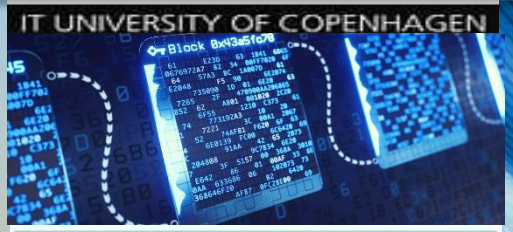


MATTHIAS HANAUSKE  
FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES  
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK  
D-60438 FRANKFURT AM MAIN



# Quantum Game Theory and Social Dilemmas

*Talk at the IT University of Copenhagen  
Organized by the European Blockchain Center  
Copenhagen, Denmark  
28.03.2022*



# Quantum Game Theory and Social Dilemmas

INTRODUCTION

CLASSICAL EVOLUTIONARY GAME THEORY

EVOLUTIONARY GAME THEORY  
ON COMPLEX NETWORKS

QUANTUM GAME THEORY

EVOLUTIONARY QUANTUM GAME THEORY  
ON COMPLEX NETWORKS

SOCIAL DILEMMAS AND QUANTUM GAME THEORY

# Online Lecture: Physics of Socio-Economic Systems

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer (Online) von Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Nächster Zoom Link am 18.02.2022, 15:00-17:00 Uhr:  
ID: 794 847 5614, PWD: 785453

Die Vorlesungen

Teil I

Teil II

Teil III

E-Learning

## Vorwort

Die Vorlesung *Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer* wurde im Wintersemester 2015/16 das erste Mal gehalten und viele der auf dieser Hauptseite erreichbaren Internetseiten basieren grundsätzlich auf dem damals erstellten Kurs. Das nebenstehende Video (ist in Arbeit!) gibt einen kurzen Überblick der Inhalte der Vorlesung. In der ersten Vorlesung (siehe Zoom Link in der rechten oberen Ecke) werden die Voraussetzungen besprochen, die man benötigt um einen benoteten bzw. unbenoteten Schein mit fünf Creditpoints zu erhalten.

### Weiterführende Links



- [Zoom Meeting Software](#)
- [Online-Lernplattform](#)



- [OLAT](#)
- [Online-Lernplattform Lon Capa](#)

- <http://itp.uni-frankfurt.de/~hanauske/VPSOC/VPSOC2021.html>

Anschreiben, Infoabend).

## Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer) Vorlesung WS 2021/22

**Auch in diesem Semester findet die Vorlesung nur Online statt!**

Diese Internetseite fasst die Online-Angebote der Vorlesung *Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer* zusammen. Auf der linken Seite finden Sie die einzelnen Vorlesungspräsentationen (pdf-Dateien), Computerprogramme und weiterführende Links. Die Vorlesungstermine (Zoom Meetings, synchrones Lehrangebot) finden jeweils freitags von 15.00-17.00 Uhr statt. An den Online-Übungen können Sie entweder freitags vor (13.30-15.00 Uhr) oder nach der Vorlesung (17:00-18:30 Uhr) teilnehmen (Beginn der Online-Übungen erst am 29.10.2021). Alle Lehrangebote werden mittel der Zoom Meeting Software gemacht und die jeweiligen Zoom-Links sind in der rechten oberen Ecke dieser Internetseite angegeben. Die Inhalte der Vorlesung gliedern sich in drei Teile ([Teil I](#), [Teil II](#), [Teil III](#)), die Sie in der zweiten oberen Spalte einsehen können. Weiteres Zusatzmaterial und diverse Online-Aufgaben sind über die Online-Lernplattformen [OLAT](#) und [Lon Capa](#) erhältlich (siehe [E-Learning](#)).

### Weiterführende Literatur

- Schlee, Walter, Einführung in die Spieltheorie, Vieweg 2004
- Hofbauer, Josef, and Karl Sigmund. Evolutionary games and population dynamics. Cambridge university press, 1998
- [Martin A. Nowak. Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life, 2006](#)
  - [Albert-Laszlo Barabasi. Network science, Cambridge university press, 2016](#)
- [Matthias Hanauske, Evolutionäre Quanten-Spieltheorie im Kontext sozio-ökonomischer Systeme, 2011](#)

## Key Question of this talk

How can one theoretically describe the time dependent evolution of the strategic behavior of an entire group of decision makers?



## Theoretical Models used to answer the question:

### (Evolutionary) Game Theory

[von Neumann 1928, Nash 1950, Smith 1972, Weibull 1997, Szabó/Fáth 07]

### Quantum Game Theory

[D.A.Meyer 1999, Eisert/Wilkens/Lewenstein 1999]

### Theory of complex networks

[Barabasi/Albert 02, Mendes/Dorogovtsev 02, Jackson 10]

Classical evolutionary game theory, simulations of games on complex networks and evolutionary quantum game theory will be used to understand the behavior of people

# Quantum Game Theory and Social Dilemmas

INTRODUCTION

CLASSICAL EVOLUTIONARY GAME THEORY

EVOLUTIONARY GAME THEORY  
ON COMPLEX NETWORKS

QUANTUM GAME THEORY

EVOLUTIONARY QUANTUM GAME THEORY  
ON COMPLEX NETWORKS

SOCIAL DILEMMAS AND QUANTUM GAME THEORY

# Game Theory

- Game theory deals with decision-making situations in which the success of the individual depends not only on their own actions, but also on the decisions of the other players involved.
- Economic decisions affect not only the individual himself, but also other economic subjects and their decisions
- Many economists consider game theory to be the formal language of economic theory.
- Johann (John) von Neumann published the first work on game theory in 1928 (J. von Neumann: "On the theory of parlor games", *Mathematische Annalen* 100, 295-300 (1928)).
- The first, groundbreaking book on game theory and economic behavior was published in 1944 by v. Neumann and Morgenstern (*Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton (1944))

# Definition of a Game

The formal mathematical definition of a *simultaneous* ( $N$  player) - ( $m$  strategies) game in strategic form with payoff only needs to be specified three things: The amount  $\mathcal{I}$  of players, the amount (the space)  $\mathcal{S}$  of strategies of the players and their payoff function (preference orders)  $\$$ .

A game  $\Gamma := (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \$)$  in strategic form with payoff is sufficiently defined if the following three quantities are known:

- Amount of players:  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$

The set of players  $\mathcal{I}$  can under certain circumstances consist of different subsets, which in turn have different strategy sets  $\mathcal{S}$ . In socio-economic networks, the players represent the respective nodes of the network.

- Set of pure strategies of the players:  $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^2 \times \dots \times \mathcal{S}^N$

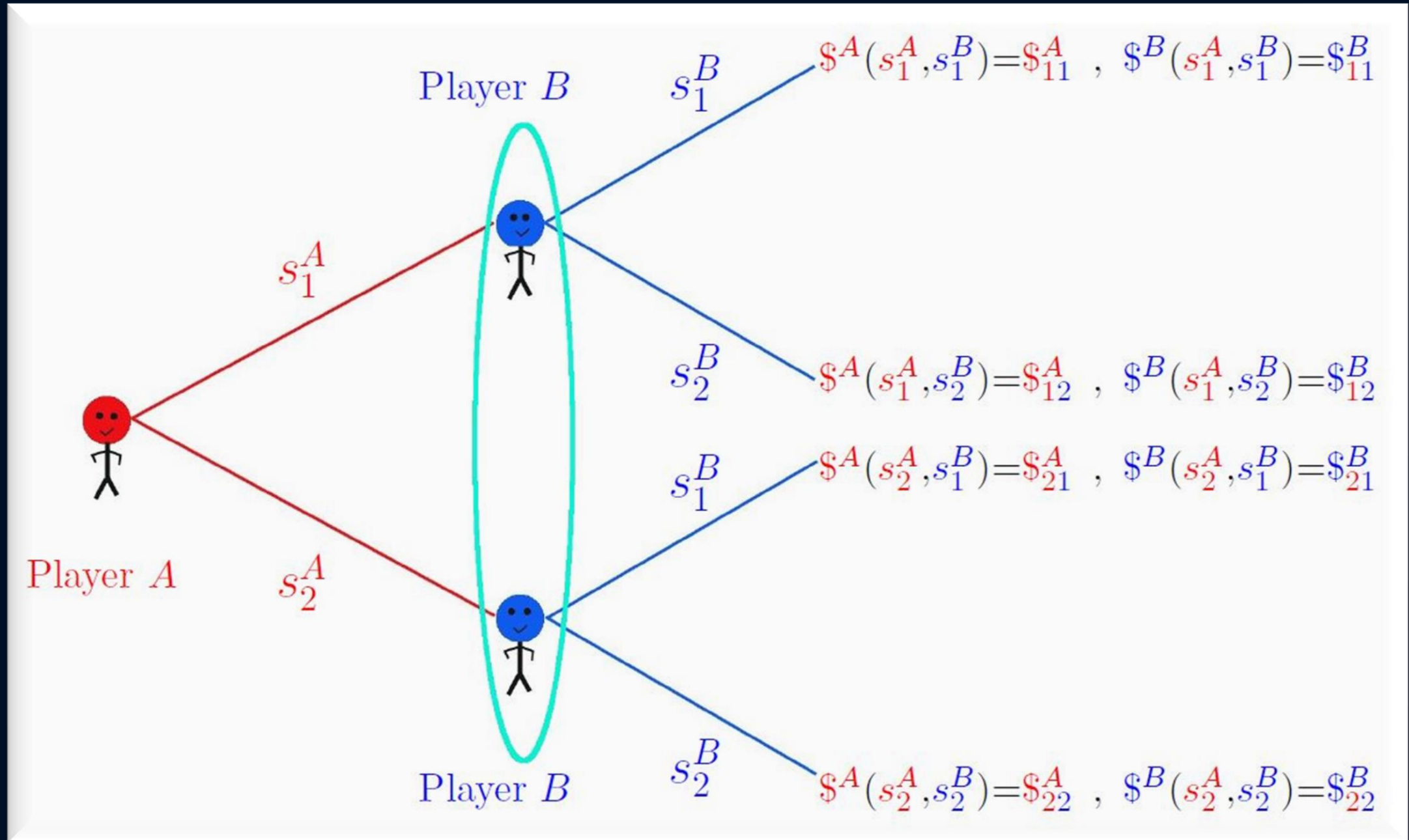
Each player  $\mu \in \mathcal{I}$  has his own set of pure strategies  $\mathcal{S}^\mu = \{s_1^\mu, s_2^\mu, \dots, s_{m_\mu}^\mu\}$ , where each of these  $m_\mu$  strategies represents a possible decision for him/her.

- Preference orders of the players, quantified by a vector-valued payoff function (utility function):

$$\$ = (\$,^1, \$^2, \dots, \$^N) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

After each player (without knowing the decision of his fellow players) has selected a strategy from his set of strategies  $\mathcal{S}^\mu$ , he/she assesses the resulting strategy combination  $\mathcal{S}$  according to his order of preference (payoff function)  $\$,^\mu$ .

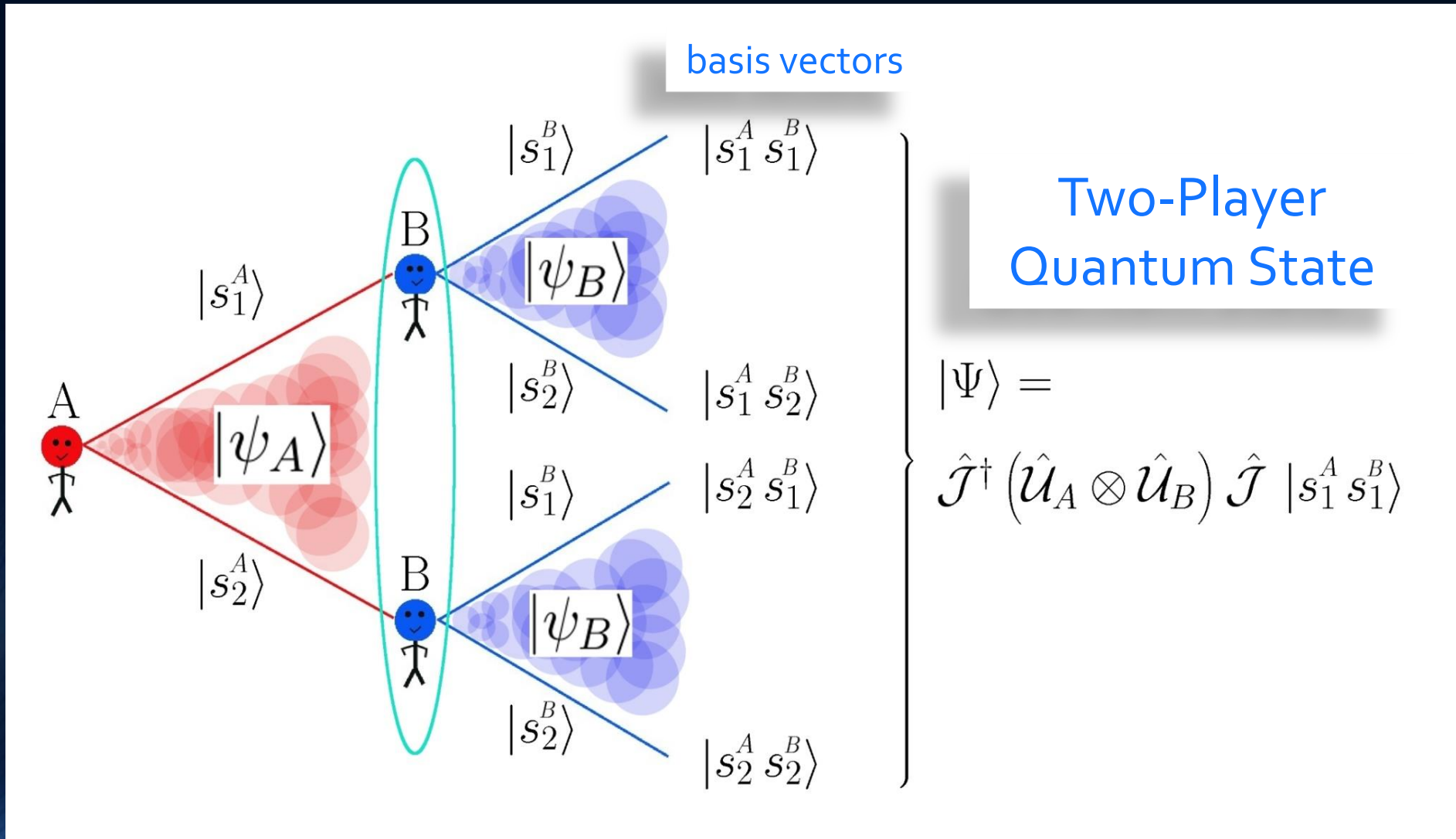
# Game Tree of a simultaneous (2-Player)-(2 Strategy) Game





# Quantum Games

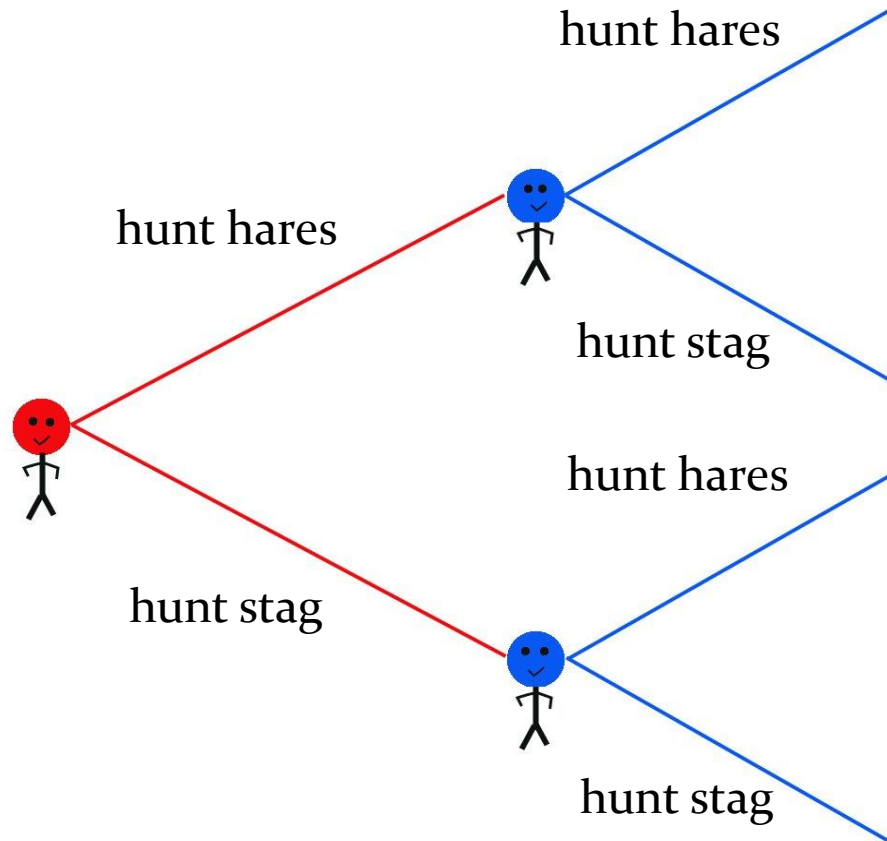
The entangled Two-Player Quantum-Spinor



Through a quantum-theoretical entanglement of the imaginary decision-making paths within an actor network, a population can succeed in escaping a dilemma-like situation if the value of the entanglement exceeds a certain threshold value.

# Rousseau's stag hunting game

	hares	stag
hares	(2, 2)	(4, 0)
stag	(0, 4)	(5, 5)



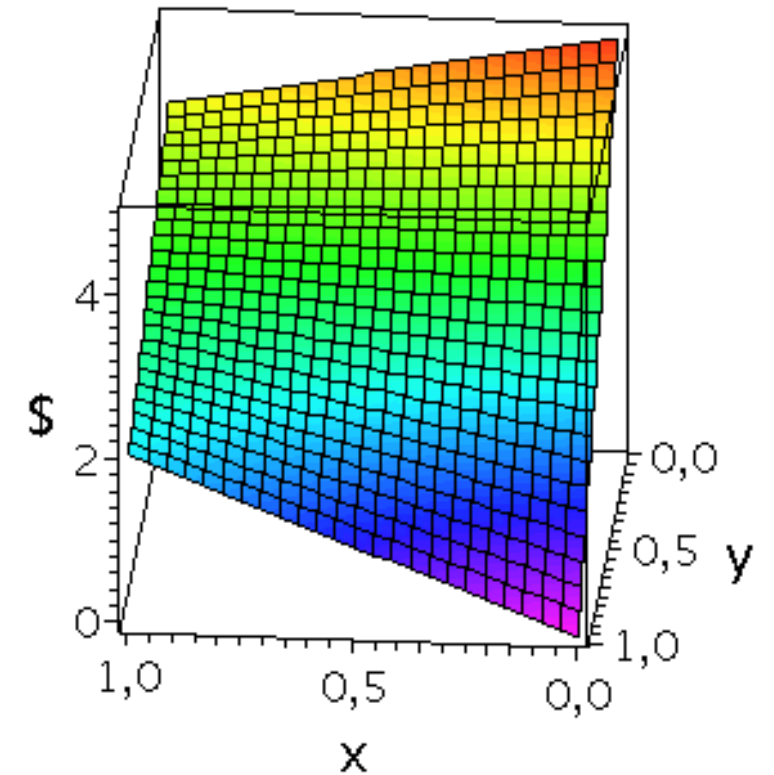
Two hunters succeeded in encircling a stag and four hares in the course of the hunt. The hunters are now faced with the decision to let the hares escape and to kill the stag together or to open fire on the hares immediately. If both decide to kill the stag, then the stag has no chance. A stag can be sold for 10 gold coins. If both of them decide to hunt hares, each hunter shoots two hares, for each of which you receive a gold coin. However, if only one person decides to hunt the deer, the stag can escape and the one who has decided to hunt the hares can kill all four hares.

# Mixed-strategy payoff function in the stag hunt game

$$\begin{aligned}
 \tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) &= \tilde{\$}^A(x, y) = \$_{11}^A xy + \$_{12}^A x(1-y) + \$_{21}^A (1-x)y + \$_{22}^A (1-x)(1-y) \\
 &= 2xy + 4x(1-y) + 0(1-x)y + 5(1-x)(1-y) \\
 &= 2xy + 4x - 4xy + 5 - 5x - 5y + 5xy \\
 &= 3xy - x - 5y + 5
 \end{aligned}$$

	Spieler B Hasen jagen	Spieler B Hirsch jagen
Spieler A Hasen jagen	(2, 2)	(4, 0)
Spieler A Hirsch jagen	(0, 4)	(5, 5)

Auszahlung an Spieler A

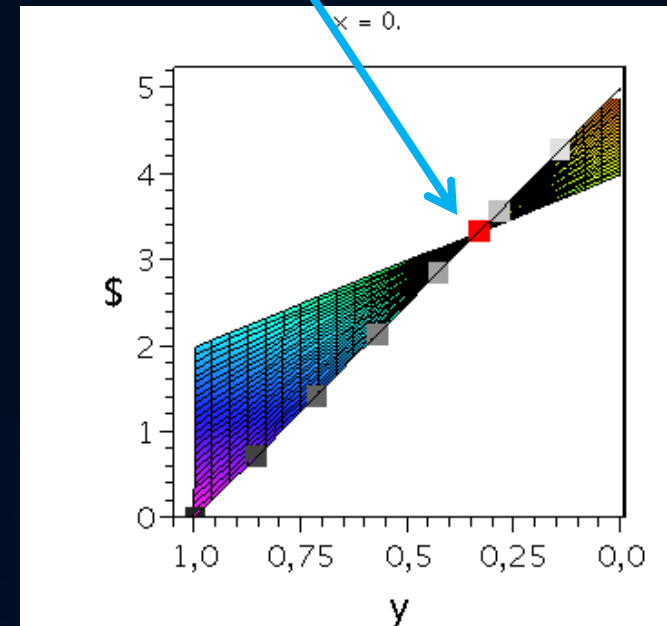
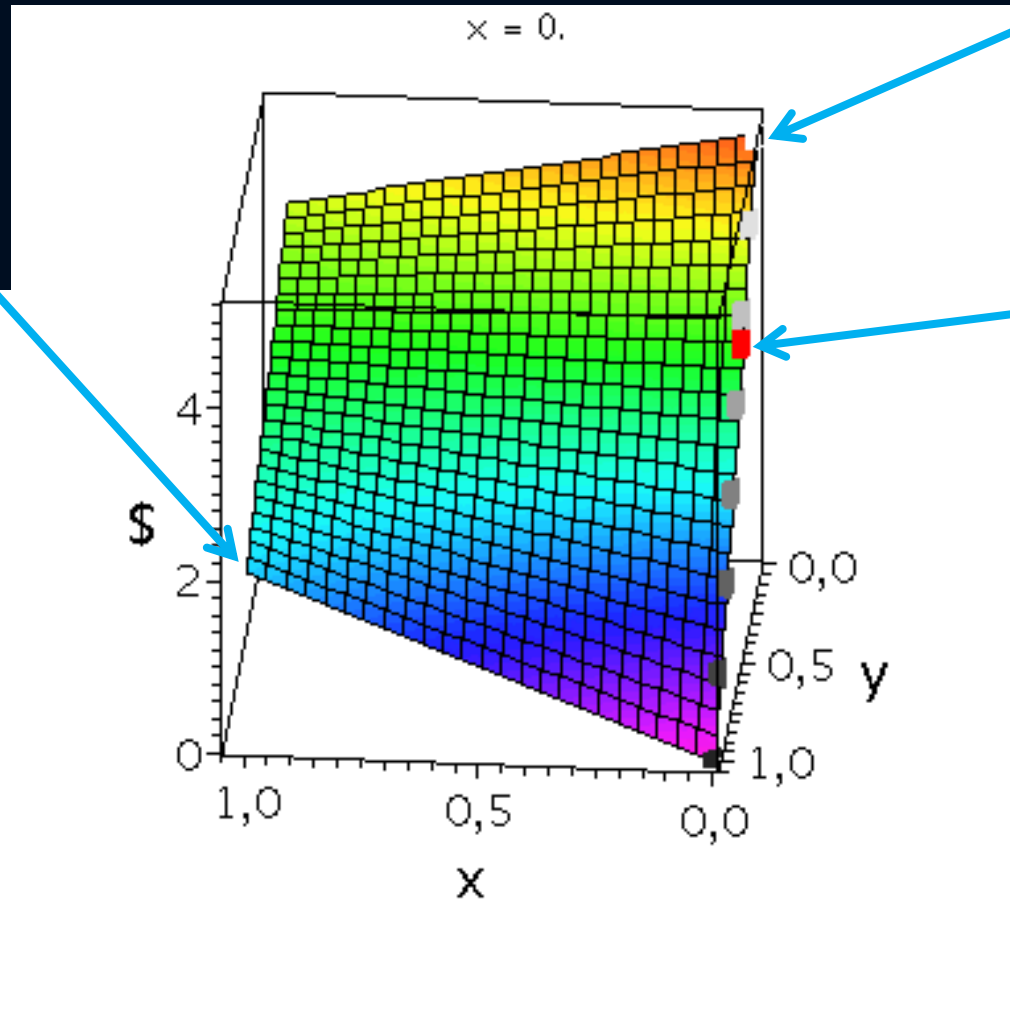
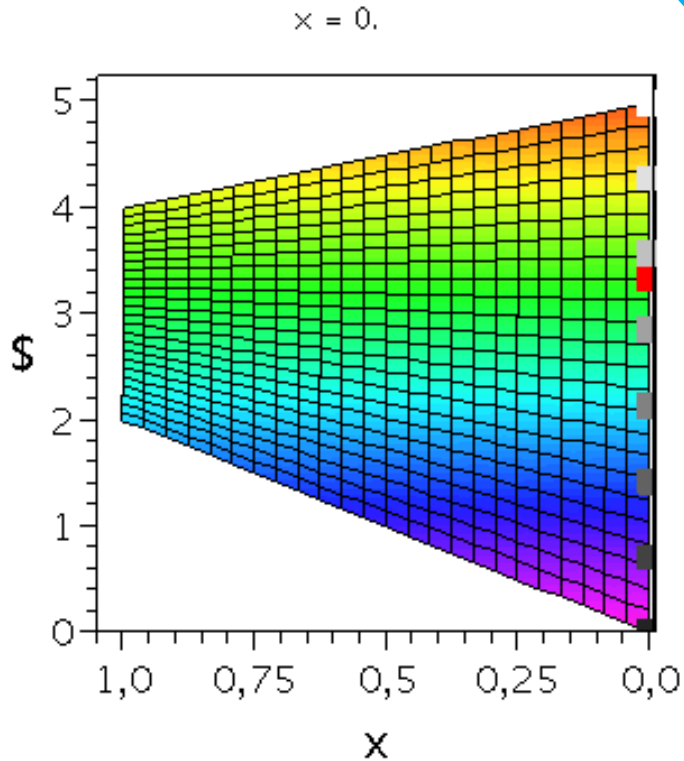


# Three Nash equilibria in the stag hunt game

Pure Nash equilibrium  
 $(x,y)=(1,1)=$   
(hunt hares, hunt hares)

Pure Nash equilibrium  
 $(x,y)=(0,0)=($ hunt stag, hunt stag)

Mixed strategy  
Nash equilibrium  
 $(x,y)=(1/3, 1/3)$

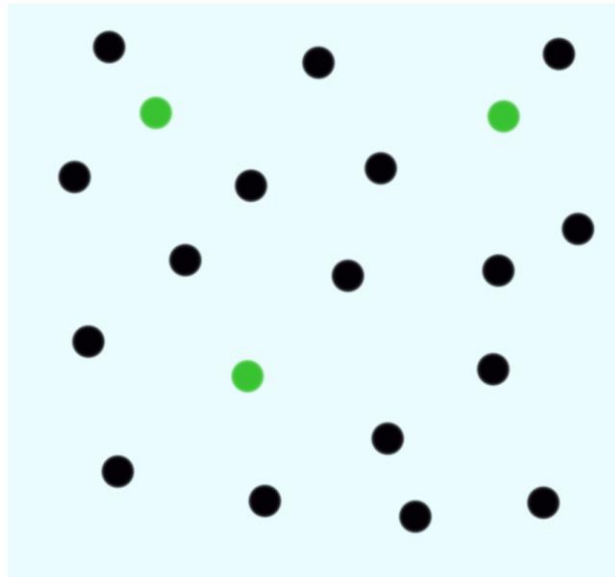


# Origins of evolutionary game theory

- The article published by Maynard Smith in 1972 (J. Maynard Smith “Game theory and the evolution of fighting”, In "On Evolution", pp. 8-28. Edinburgh University Press, Edinburgh, 1972) is generally considered to be the first game theory approach of Evolutionary Game theory. Smith describes in the article how one can extract the biological, dynamic evolution of organisms from the Nash equilibria of symmetrical (2x2) games. He shows how the dynamic evolution of the frequency distribution of organisms ends in a stable state - the so-called *evolutionarily stable strategy*.

# Evolutionary game theory (I)

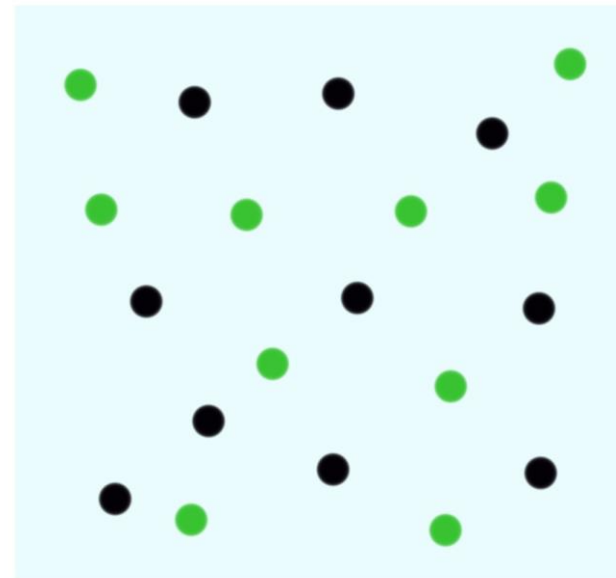
Evolutionary game theory deals with the temporal development of the strategic behavior of an entire player population over time.



$$x(0)=0.15$$



temporal  
development  
of the  
population

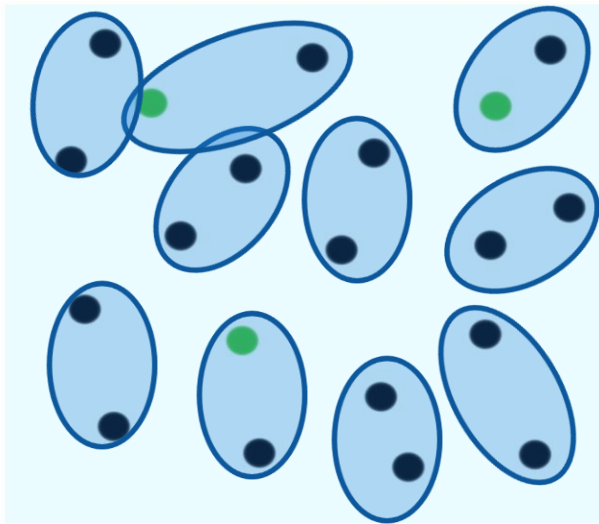


$$x(10)=0.5$$

Possible strategies: (green, black), parameter  $t$  represents the "time"  
 $x(t)$ : Fraction of players who play the "green" strategy at time  $t$ .

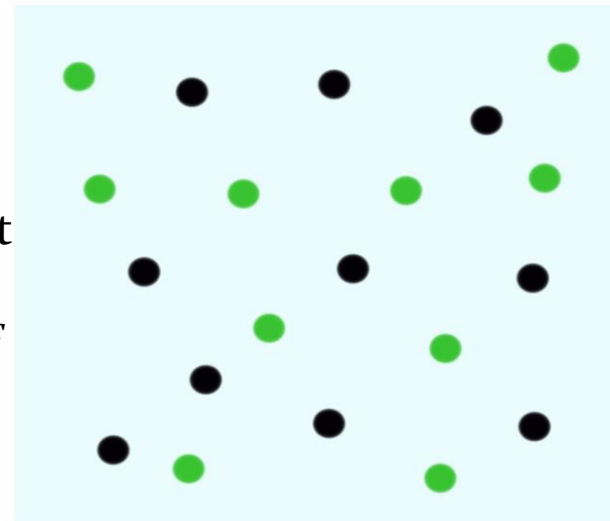
# Evolutionary game theory (II)

The individual actors within the population under consideration play a continuously repetitive game with each other, with two players meeting at random, playing the game and then switching to the next game partner.



$$x(0)=0.15$$

The initial population of players plays the game for the first time at time  $t = 0$ . On average, 15% of the players choose the **green** strategy.



$$x(10)=0.5$$

As time goes on, the **green** strategy is becoming increasingly attractive to players. At time  $t = 10$ , 50% are already playing **green**.

# Evolutionary Game Theory

## and Replicator Dynamics

Das im rechten Panel dieser Vorlesung dargestellte System von gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung beschreibt die evolutionäre Dynamik der deterministischen evolutionären Spieltheorie (Replikatorndynamik). Die zeitliche Veränderung der Populationsvektoren  $\vec{x}^A(t) = (x_1^A(t), x_2^A(t), \dots, x_{m_A}^A(t))$  und  $\vec{x}^B(t) = (x_1^B(t), x_2^B(t), \dots, x_{m_B}^B(t))$  spiegelt die in der jeweiligen Gruppe vorherrschende Strategiewahl zum Zeitpunkt  $t$  wider. In expliziter Formulierung hat die Gleichung das folgende Aussehen:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i^A(t)}{dt} &= \left[ \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \mathcal{S}_{il}^A x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \mathcal{S}_{kl}^A x_k^A(t) x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \right] x_i^A(t) \quad (1) \\ \frac{dx_j^B(t)}{dt} &= \left[ \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \mathcal{S}_{lj}^B x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \mathcal{S}_{lk}^B x_l^A(t) x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \right] x_j^B(t) \quad , \end{aligned}$$

wobei  $x_i^A(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_A$  und  $x_j^B(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_B$  die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit  $t$  gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen. Durch eine

$\hat{A} \quad (\hat{B})^T$



# Evolutionary Game Theory

## *and Replicator Dynamics*

Bi-Matrix Games

$$\frac{dx(t)}{dt} = g_A(x, y) \quad , \quad \frac{dy(t)}{dt} = g_B(x, y)$$

$$g_A(x, y) := \left[ (\$_{11}^A + \$_{22}^A - \$_{12}^A - \$_{21}^A) y(t) + (\$_{12}^A - \$_{22}^A) \right] \left( x(t) - (x(t))^2 \right)$$

$$g_B(x, y) := \left[ (\$_{11}^B + \$_{22}^B - \$_{12}^B - \$_{21}^B) x(t) + (\$_{12}^B - \$_{22}^B) \right] \left( y(t) - (y(t))^2 \right)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[ (\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2) \right] x(t)$$

$$=: g(x)$$

Two-strategy symmetric Games

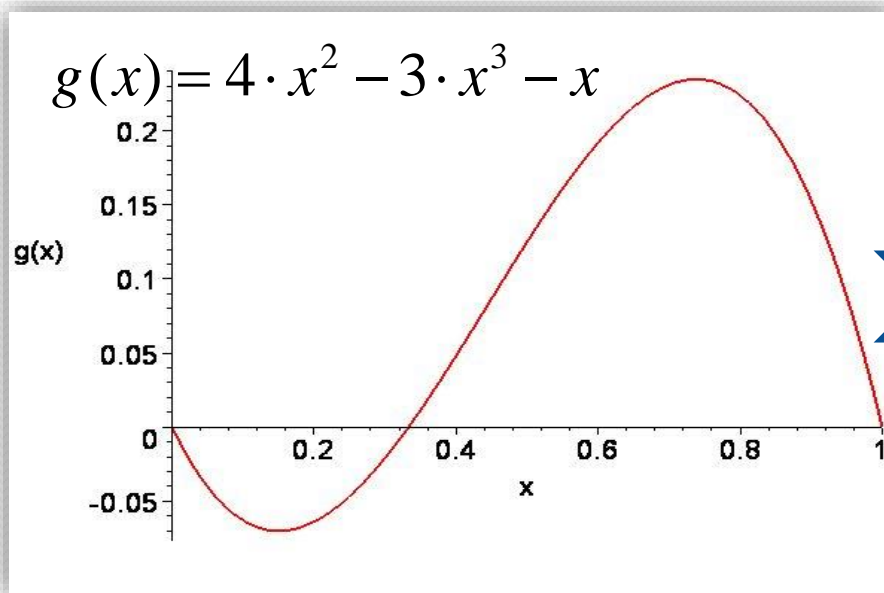
# Replicator dynamics (for the stag hunt game)

	Hares	Stag
Hares	(2, 2)	(4, 0)
Stag	(0, 4)	(5, 5)

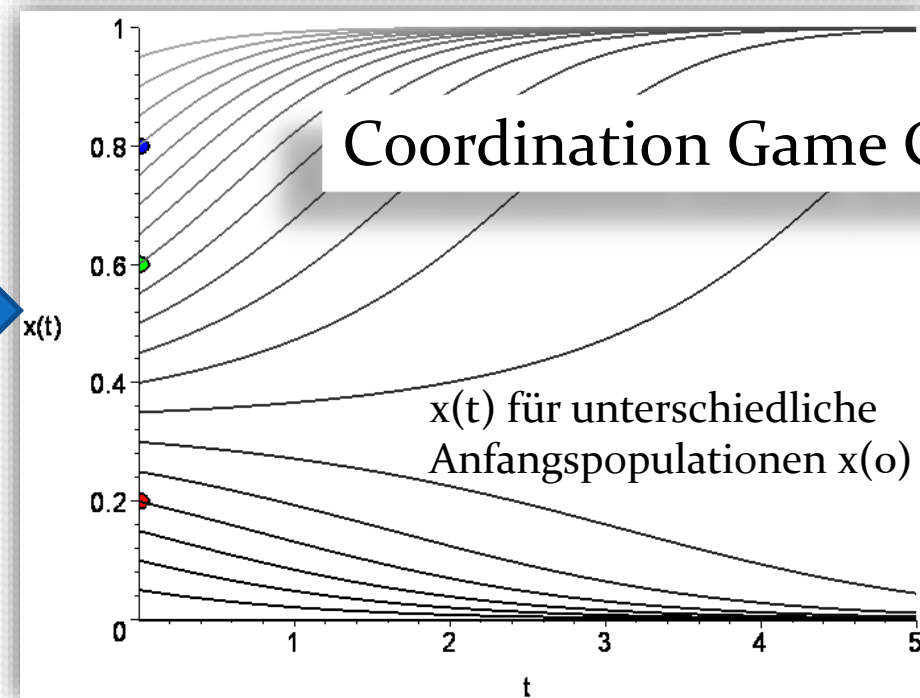
Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Hirschjagd-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 4 \cdot (x(t))^2 - 3 \cdot (x(t))^3 - x(t) =: g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left( (2-0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (5-4) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$



Beispiel: Hirschjagd-Spiel  
 $g(x)=g(x(t))$  im Bereich  $[0,1]$  dargestellt



# Replicator dynamics

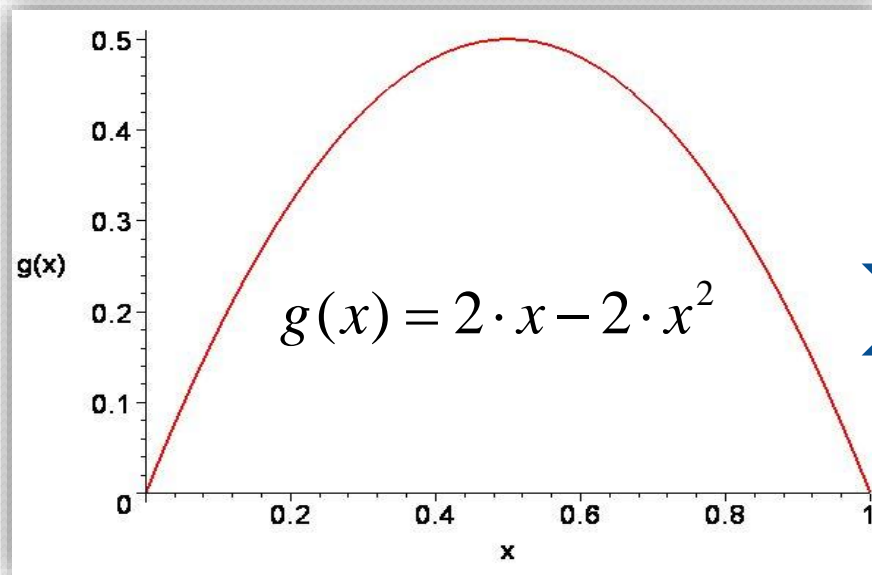
(for the Prisoners Dilemma)

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Gefangenendilemma lautet:

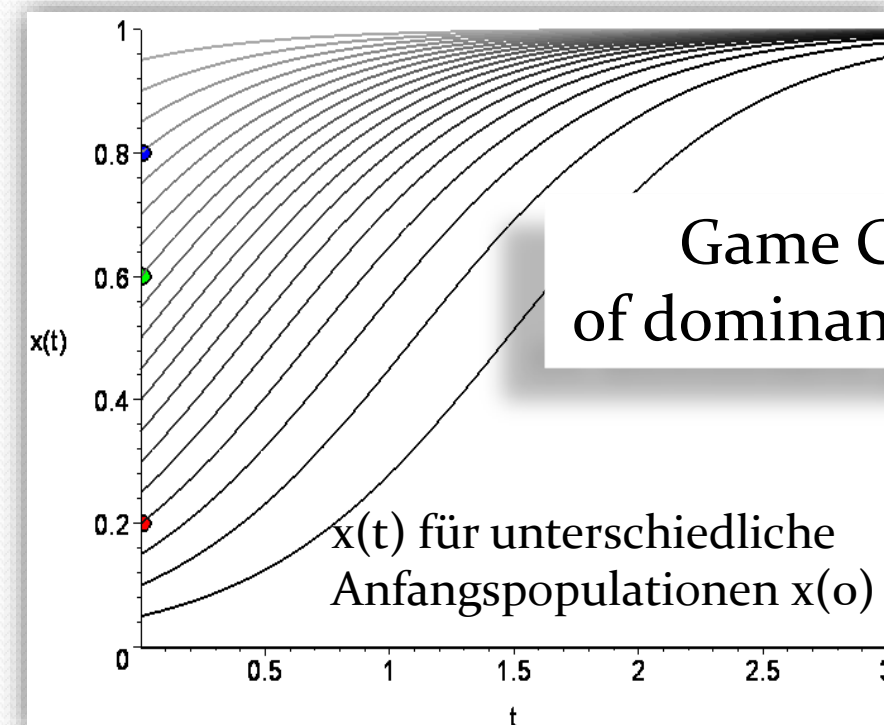
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot (x(t))^2 = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left( (-7 - (-9)) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (-3 - (-1)) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

	Ge	Sc
Ge	(-7, -7)	(-1, -9)
Sc	(-9, -1)	(-3, -3)



Beispiel: Gefangenendilemma  
 $g(x)=g(x(t))$  im Bereich  $[0,1]$  dargestellt



# Replicator dynamics

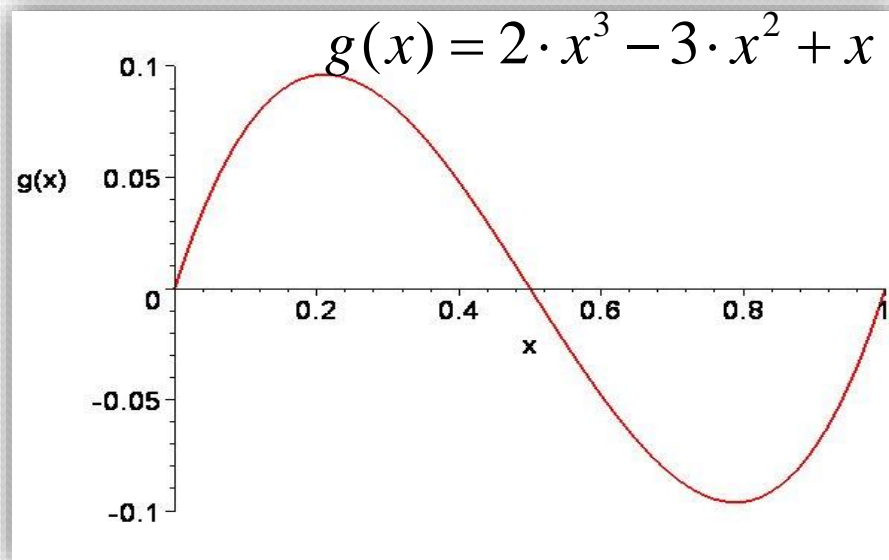
(for the chicken game)

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Angsthasen-Spiel lautet:

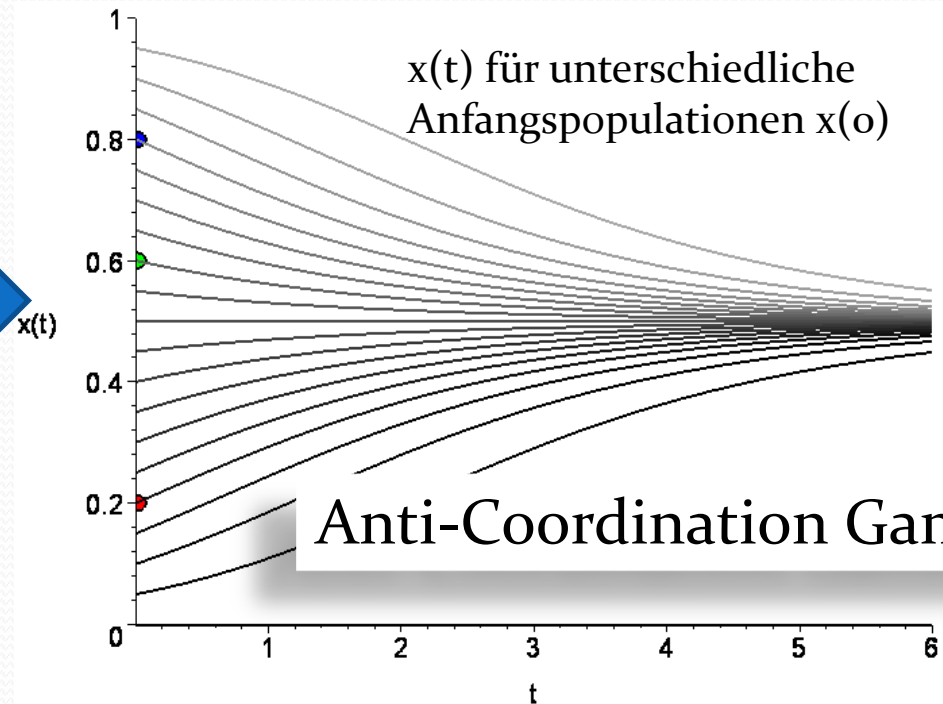
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot (x(t))^3 - 3 \cdot (x(t))^2 + x(t) = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left( (-1 - 0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (1 - 2) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

	Springe nicht	Springe
Springe nicht	(-1, -1)	(2, 0)
Springe	(0, 2)	(1, 1)



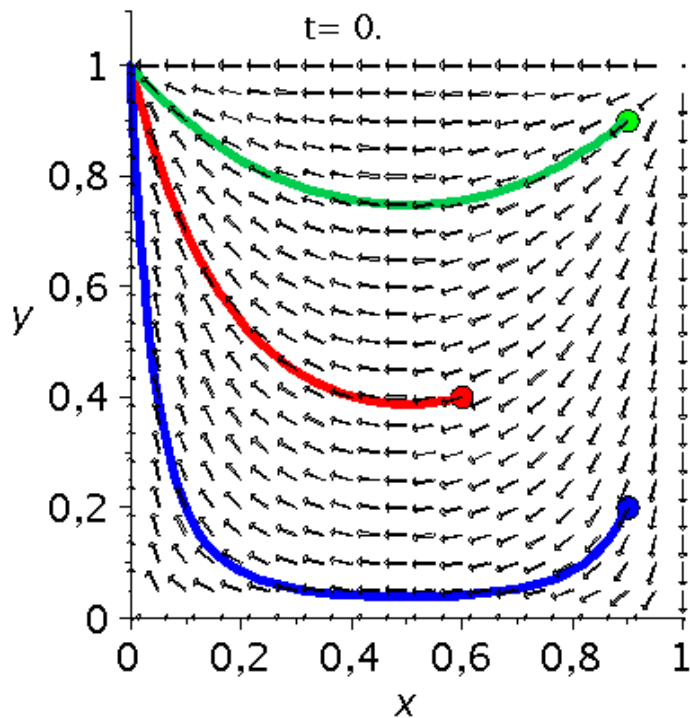
Beispiel: Angsthasen-Spiel  
 $g(x)=g(x(t))$  im Bereich  $[0,1]$  dargestellt



# Classification of Bi-Matrix Games

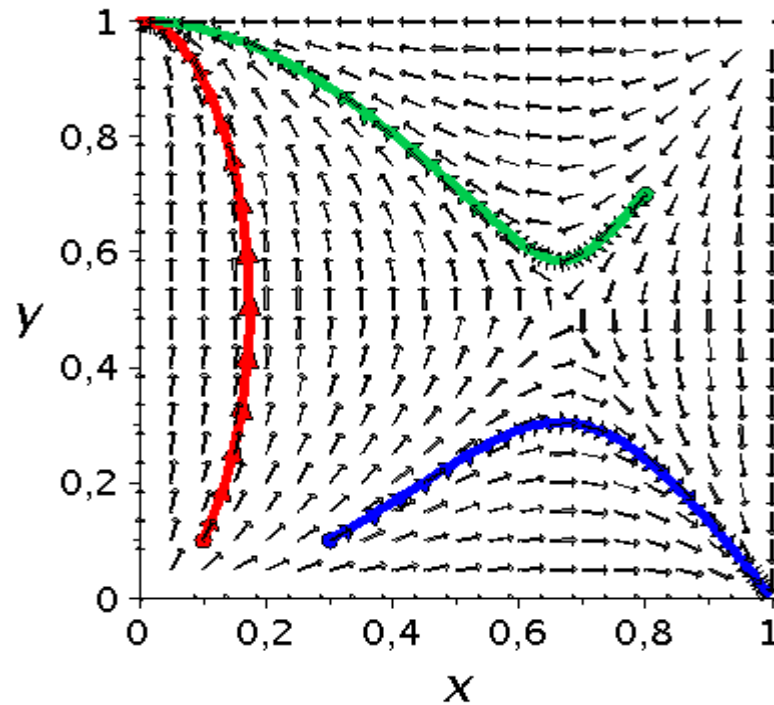
## Corner Class

One of the individual Classes of group A or group B is a dominant game



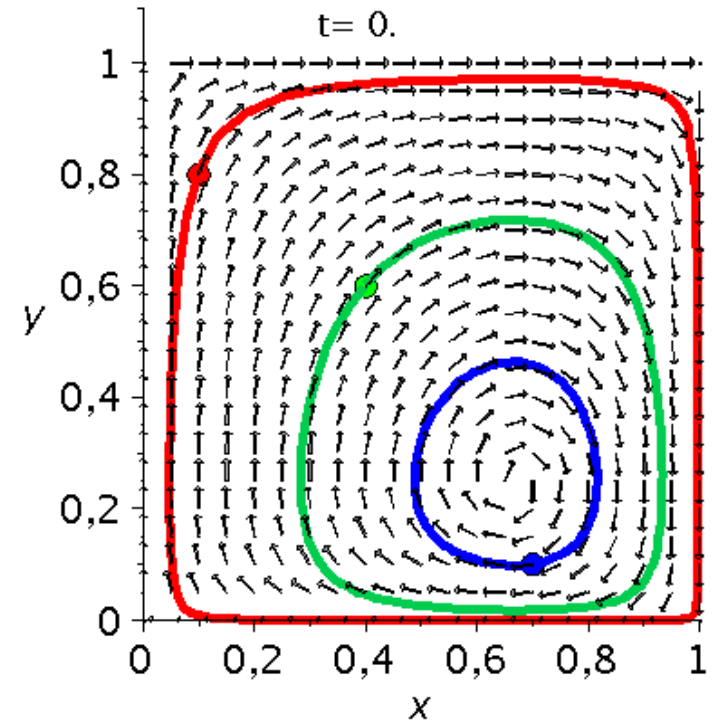
## Saddle Point Class

Game A: Coordination Game  
 Game B: Coordination Game  
 or  
 Game A: Anti-Coordination Game  
 Game B: Anti-Coordination Game

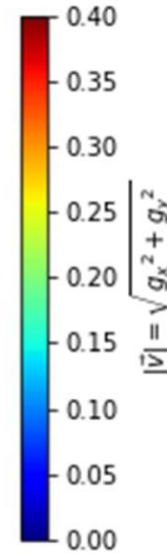
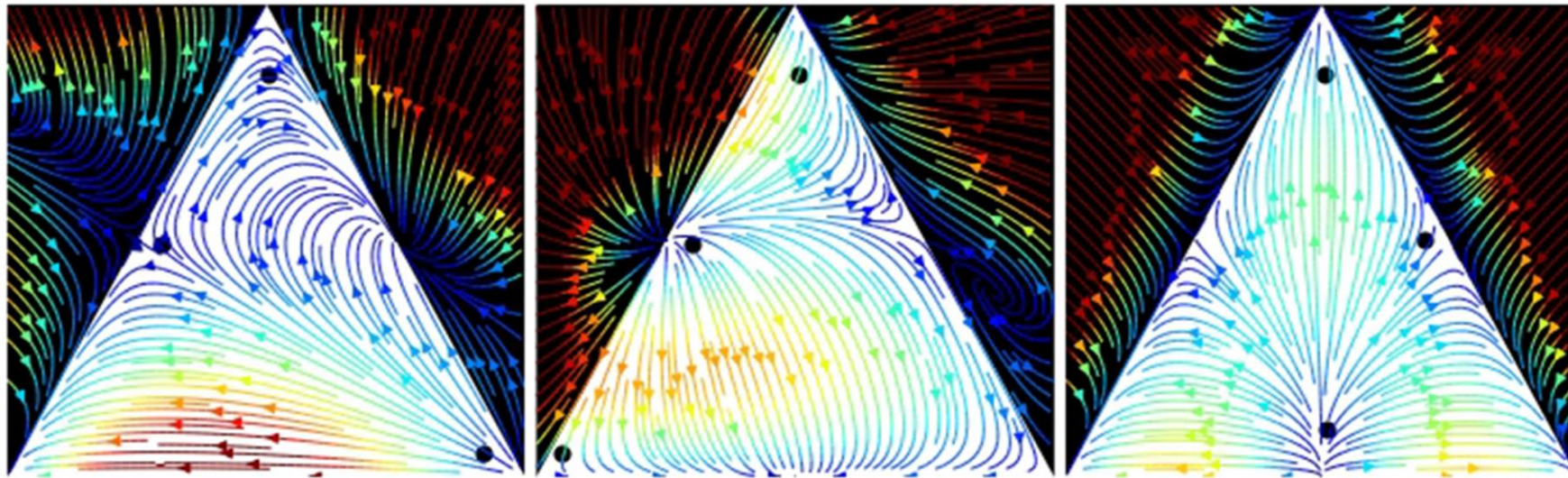


## Center Class Games

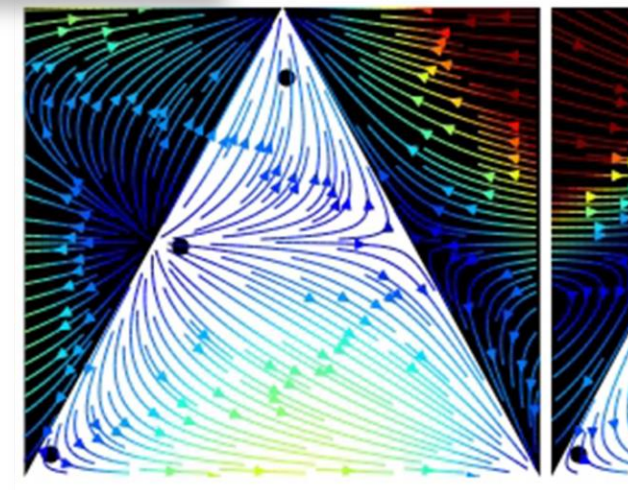
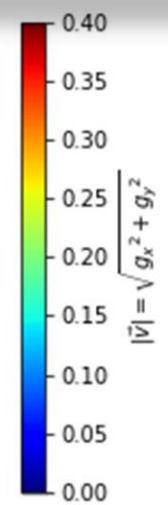
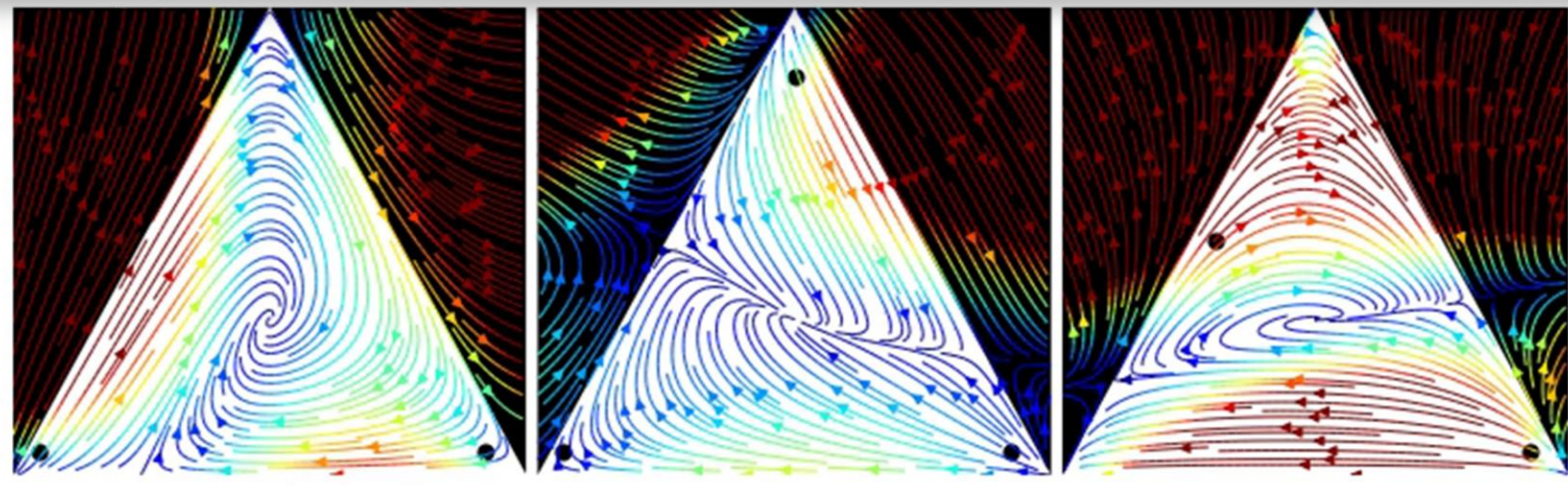
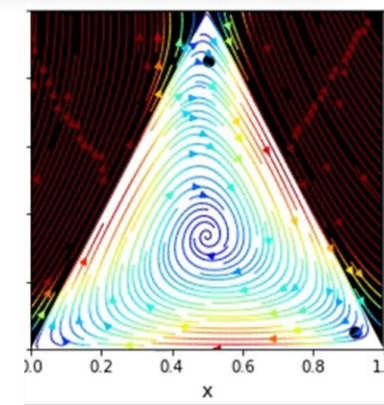
Game A: Coordination Game  
 Game B: Anti-Coordination Game  
 or  
 Game A: Anti-Coordination Game  
 Game B: Coordination Game



# Classification of symmetric 3-Strategy Games



19- different game classes



# Application fields of game theory (I)

- **Biologie**

- **Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock–paper–scissors**

Siehe z.B.: Kerr, Feldmann, Nature 2002

- **Prisoner's dilemma in an RNA virus**

Siehe z.B.: Turner, Chao, Nature 1999

- **Mating strategies of lizards**

Siehe z.B.: Sinervo, Hazard, Nature 1996

- **Natural self-organisation of macromolecules**

Siehe z.B.: Eigen, Schuster, Naturwissenschaften 64, 1977

# Application fields of game theory (II)

- **Economics**

- **„Public Goods“- games**

- **Trust in Private and Common Property Experiments**, Elinor Ostrom, et al.
- **Evolutionary Dynamics in Public Good Games**, CHRISTIANE CLEMENS and THOMAS RIECHMANN, Computational Economics (2006) 28: 399–420
- **Institution Formation in Public Goods Games**, Michael Kosfeld, Akira Okada, and Arno Riedl, American Economic Review 2009, 99:4, 1335–1355

- **Experimental economics**

- **Cooperation in PD games: Fear, greed, and history of play**, T.K. AHN, ELINOR OSTROM, DAVID SCHMIDT, ROBERT SHUPP, Public Choice 106: 137–155, 2001.

- **„Behavioral economics (altruism, empathy, ...)“** z.B.: Fehr et al.

- **Evolution of information networks**



# Application fields of game theory (III)

- **Social science**

- **Cultural and moral developments**

- Evolution of social learning does not explain the origin of human cumulative culture, Magnus Enquist, Stefano Ghirlanda, *Journal of Theoretical Biology* 246 (2007) 129–135
    - **EVOLUTION OF MORAL NORMS**, William Harms and Brian Skyrms, For *Oxford Handbook on the Philosophy of Biology* ed. Michael Ruse

- **Evolution of language**

- Finite populations choose an optimal language, Christina Pawlowitsch, *Journal of Theoretical Biology* 249 (2007) 606–616

- **Social learning**

- Evolution of social learning does not explain the origin of human cumulative culture, Magnus Enquist, Stefano Ghirlanda, *Journal of Theoretical Biology* 246 (2007) 129–135

- **Evolution of social norms**

- **Collective Action and the Evolution of Social Norms**, Elinor Ostrom, *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 14, No. 3 (Summer, 2000), pp. 137–158

- **Evolution of social networks**

- **GOVERNING SOCIAL-ECOLOGICAL SYSTEMS**, MARCO A. JANSSEN and ELINOR OSTROM
    - **A General Framework for Analyzing Sustainability of Social-Ecological Systems**, Elinor Ostrom, et al., *Science* 325, 419 (2009)

# DPG Spring Meeting Berlin, March 25 - 30, 2012

## SCOPE

- Financial Markets and Risk Management
- Economic Models and Evolutionary Game Theory
- Traffic Dynamics, Urban and Regional Systems
- Social Systems, Opinion and Group Dynamics
- Networks: From Topology to Dynamics

## KEYNOTE TALK

**H. Eugene Stanley**  
(Boston, USA)

“Interdependent Networks and Switching Phenomena”

## YOUNG SCIENTIST AWARD FOR SOCIO- AND ECONOPHYSICS\*

Keynote Speaker: **Stefan Thurner** (Wien, A)  
“The Role of Agent Based Models in Understanding Human Societies”

## TUTORIAL “Scientific Writing”\*\*

**Hernan Rozenfeld** (APS, USA)

**Tim Smith** (IOP Publishing, UK)

## INVITED TALKS

**Thilo Gross** (Bristol, UK) “Adaptive Networks of Opinion Formation in Humans and Animals”

**Marc Hütt** (Bremen) “Common Design Principles of Metabolic Networks and Industrial Production”

## FOCUS SESSION: BIG DATA\*\*

**Rosario Mantegna**  
(Palermo, IT)

“Econophysics and Social Research with Large Sets of Data”

**Philip Trelaven**  
(London, UK)  
“Experimental Computational Finance & Big Data Environment”

**Tiziana Di Matteo** (London, UK)  
“Embedding High Dimensional Data on Networks”

**Michael Batty** (London, UK)  
“Cities and Complexity”

## FOCUS SESSION: MODELS OF WAR, CONFLICT AND REVOLUTIONS

**Neil Johnson** (Miami, USA)  
“Escalation, Timing and Severity of Insurgent and Terrorist Events: Robust Patterns and a Generic Model”

**Aaron Clauset** (Boulder, USA)  
“Fatality Dynamics and the Limits of Civil and Interstate Wars”

**Ravinder Bhavnani** (Geneva, CH)  
“Group Segregation and Urban Violence”

\*\*Sessions are organized with the jDPG

## Tutorial

SOE 1.1 Sun 16:00–18:00 HSZ 04 **Collective Dynamics of Firms: A Statistical Physics Approach** — ●FRANK SCHWEITZER

## Focus Session: Swarm Intelligence

SOE 2.1 Mon 10:15–10:45 GÖR 226 **Social Media and Attention** — ●BERNARDO HUBERMAN  
SOE 2.2 Mon 10:45–11:15 GÖR 226 **Mobilizing society with a red balloon** — ●RILEY CRANE  
SOE 2.3 Mon 11:15–11:45 GÖR 226 **Collective behaviour and swarm intelligence** — ●JENS KRAUSE

## Focus Session: GPU-Computing (with DY)

SOE 5.1 Mon 14:00–14:30 GÖR 226 **Applications of GPU-Computing in Statistical Physics** — ●PETER VIRNAU  
SOE 5.2 Mon 14:30–15:00 GÖR 226 **Accelerating Monte Carlo Simulations in Statistical Physics with GPU's** — ●DAVID LANDAU

## Focus Session: Experimental Methods

SOE 10.1 Tue 13:30–14:00 GÖR 226 **Complex Economic Systems in the Laboratory** — ●CARS HOMMES  
SOE 10.2 Tue 14:00–14:30 GÖR 226 **Multiplicative Cascades: How to model trip within cities** — ●MARTA C. GONZÁLEZ  
SOE 10.3 Tue 14:30–15:00 GÖR 226 **Human behavior on networks: lessons and perspectives from game theory** — ●ANGEL SÁNCHEZ  
SOE 10.4 Tue 15:00–15:30 GÖR 226 **Measuring Happiness** — ●PETER S. DODDS

## Young Scientist Award for Socio- and Econophysics

SOE 8.1 Mon 17:00–17:45 HSZ 02 **Dragon-kings versus black swans: diagnostics and forecasts for the on-going world financial crisis** — ●DIDIER SORNETTE  
SOE 8.1 Mon 18:00–18:30 HSZ 02 **Community structure in networks and statistical physics of social dynamics** — ●SANTO FORTUNATO

## Joint Symposium on Foundations and Perspectives of Climate Engineering (with AKE, UP)

See SYCE for the full program of the symposium.

SYCE 1.1 Tue 10:30–11:00 HSZ 01 **Oceanic carbon-dioxide removal options: Potential impacts and side effects** — ●ANDREAS OSCHLIES  
SYCE 1.2 Tue 11:00–11:30 HSZ 01 **Climate Engineering through injection of aerosol particles into the atmosphere: physical insights into the possibilities and risks** — ●MARK LAWRENCE  
SYCE 1.3 Tue 11:30–12:00 HSZ 01 **Geoengineering - will it change the climate game?** — ●TIMO GOESCHL  
SYCE 1.4 Tue 12:00–12:30 HSZ 01 **The gamble with the climate - an experiment** — ●MANFRED MILINSKI

## Plenary Talks related to SOE

PV X Thu 8:30–9:15 H1 **Complex Networks: From Statistical Physics to the Cell** — ●ALBERT LASZLO BARABASI

## Tutorial

SOE 1.1 Sun 16:00–18:00 H10 **Time Series Analysis in Sociophysics and Econophysics** — ●JOHANNES J. SCHNEIDER, ●TOBIAS PREIS

## Invited Talks

SOE 2.1 Mon 9:30–10:15 H44 **Don't panic! - The physics of pedestrian dynamics and evacuation processes** — ●ANDREAS SCHAUSCHNEIDER  
SOE 7.1 Tue 9:30–10:00 H44 **Humans playing spatial games** — ●ARNE TRAUlsen  
SOE 12.1 Wed 9:30–10:15 H44 **The hidden complexity of open source software** — ●FRANK SCHWEITZER  
SOE 17.1 Thu 9:30–10:15 H44 **Wave localization in complex networks** — ●JAN W. KANTELHARDT  
SOE 22.1 Fri 9:30–10:15 H44 **Hypergraphs and social systems** — ●GUIDO CALDARELLI

## Focus Session: Science of Science

SOE 4.1 Mon 13:30–14:00 H44 **Following the actors: individual and collective behavior in epistemic landscapes** — ●ANDREA SCHARNHORST  
SOE 4.2 Mon 14:00–14:30 H44 **Tracking science in real-time from large-scale usage data.** — ●JOHAN BOLLEN  
SOE 4.3 Mon 14:45–15:15 H44 **Mapping change in science** — ●MARTIN ROSVALL, CARL BERGSTROM  
SOE 4.4 Mon 15:15–15:45 H44 **Statistical physics of citation behavior** — ●SANTO FORTUNATO

# Quantum Game Theory and Social Dilemmas

INTRODUCTION

CLASSICAL EVOLUTIONARY GAME THEORY

EVOLUTIONARY GAME THEORY  
ON COMPLEX NETWORKS

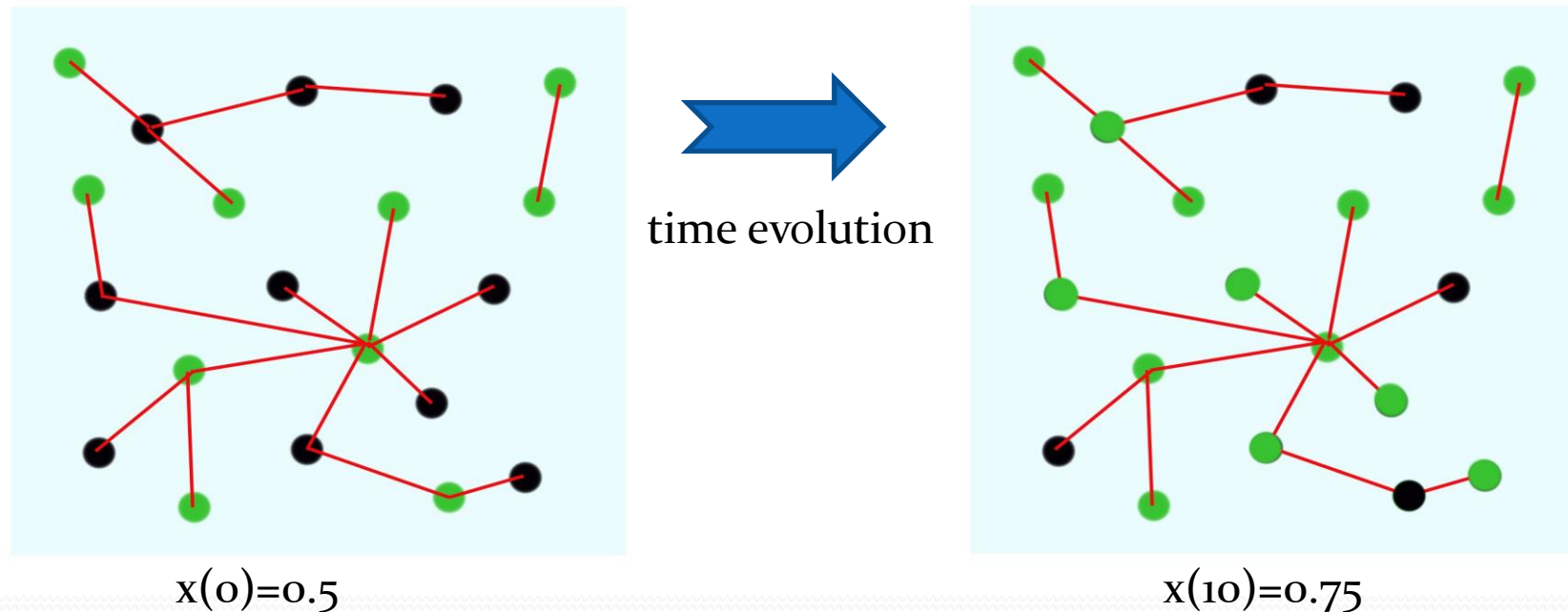
QUANTUM GAME THEORY

EVOLUTIONARY QUANTUM GAME THEORY  
ON COMPLEX NETWORKS

SOCIAL DILEMMAS AND QUANTUM GAME THEORY

# Evolutionary game theory on complex networks

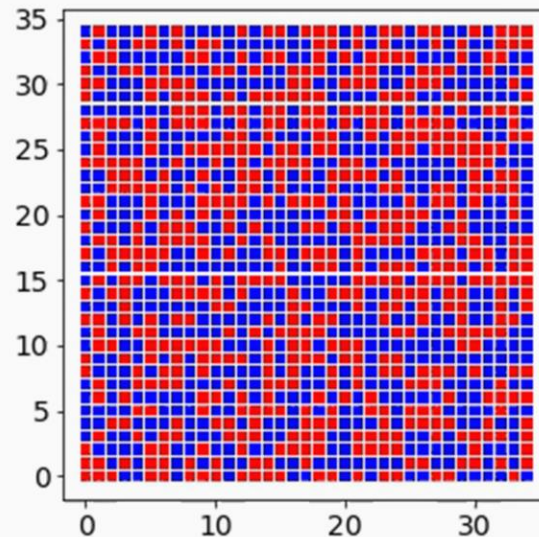
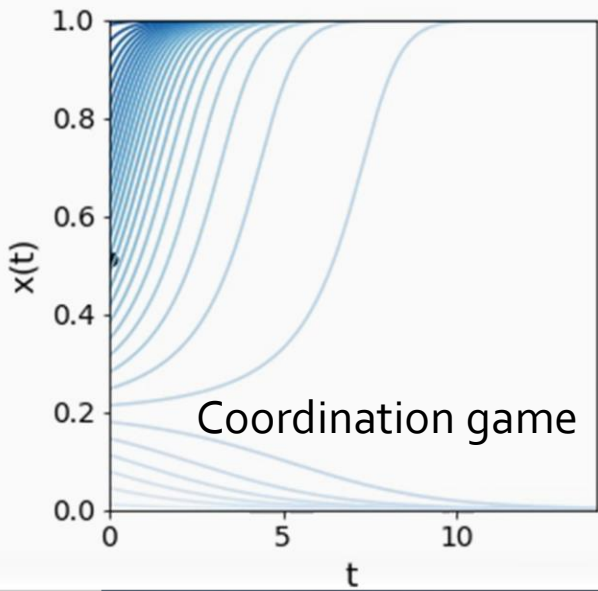
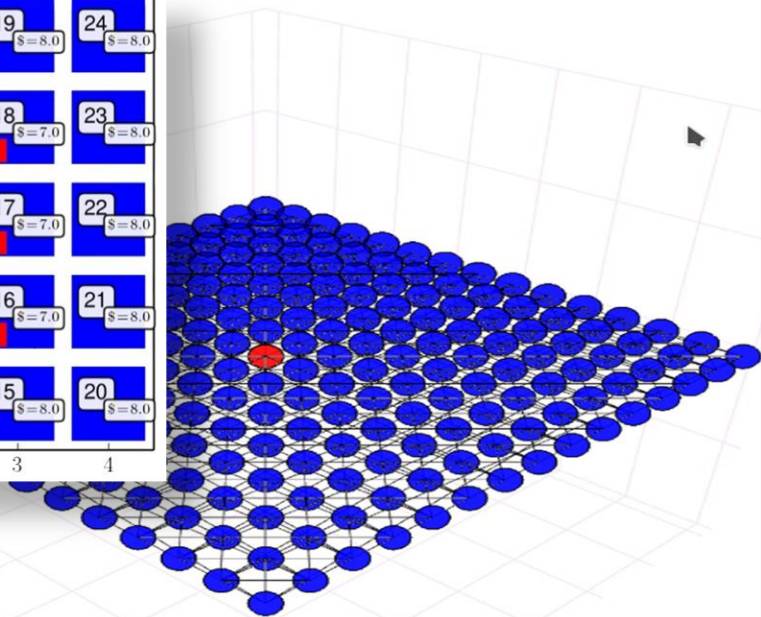
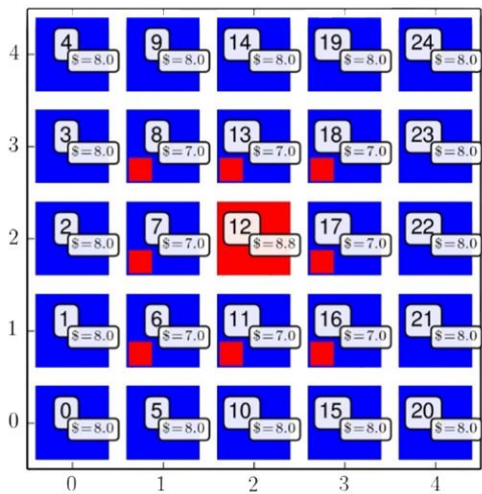
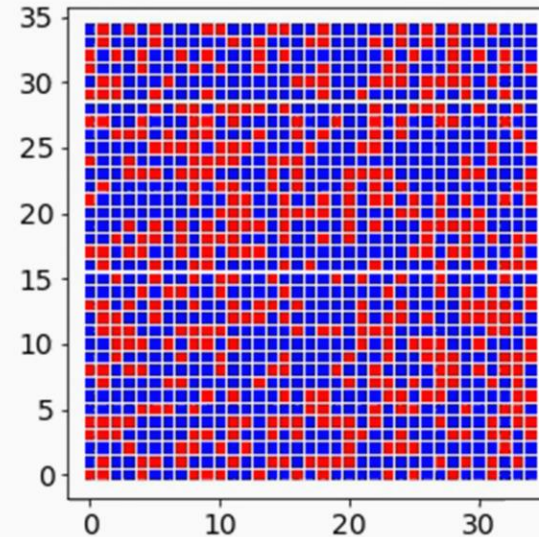
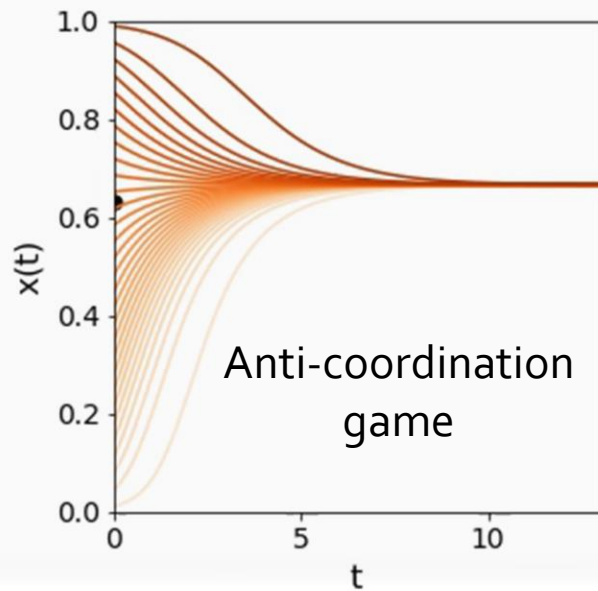
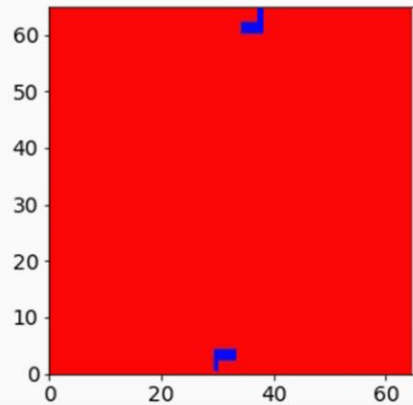
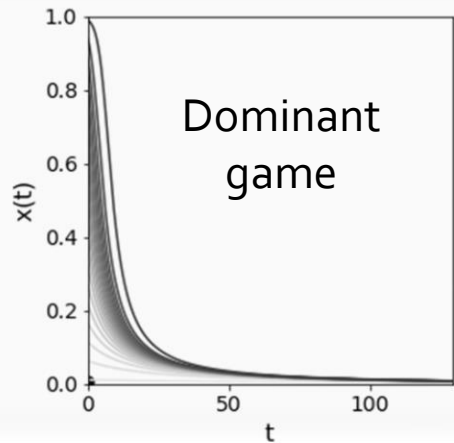
Many evolutionary games that occur in reality are played on a defined network structure (topology). The players of the population under consideration are not equal here, but only select partners linked to them through the network as playing partners.



Possible strategies: (green, black), parameter  $t$  represents the "time"  
 $x(t)$ : Fraction of players who play the "green" strategy at time  $t$ .  
The red connecting lines describe the player's possible playing partners

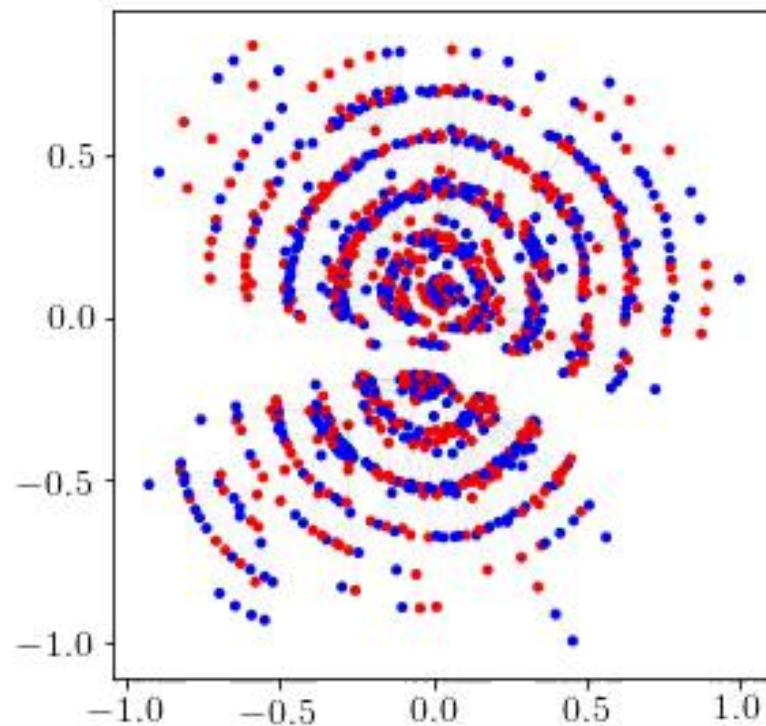
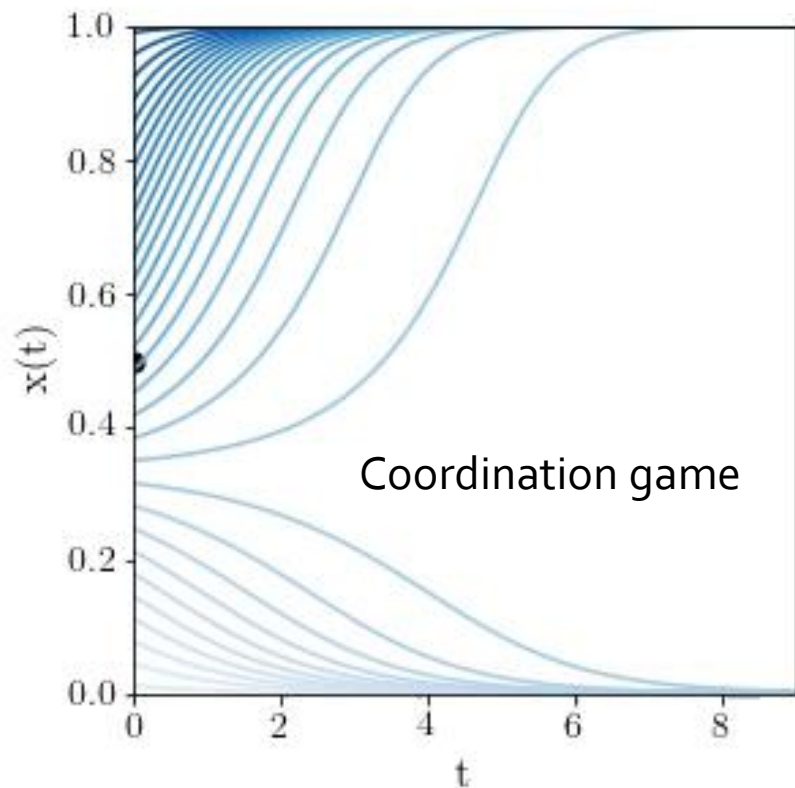
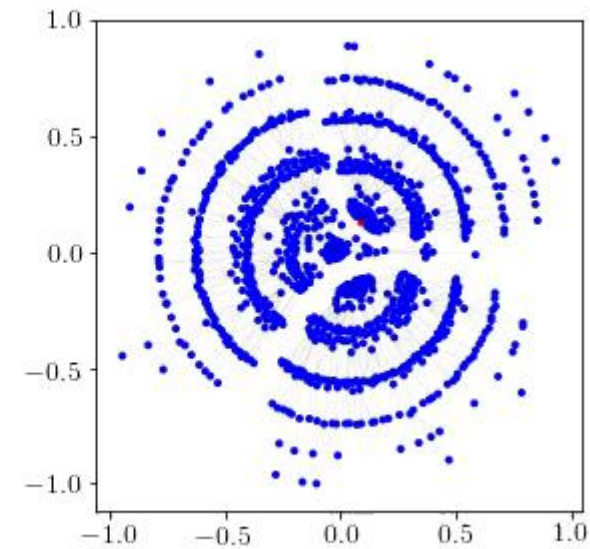
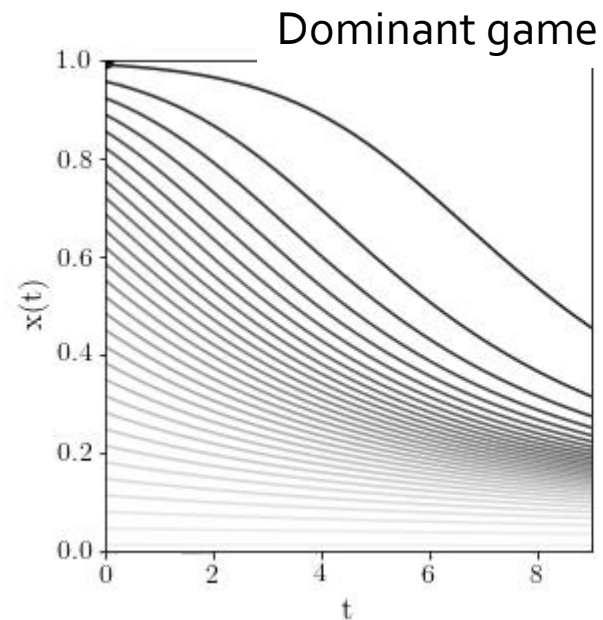
# Spatial games

Evolutionary Agent-based Simulation on Spatial Grid Topologies



# Games on Complex Networks

*Evolutionary  
Agent-based Simulation  
on Scale-free Networks*



# Quantum Game Theory and Social Dilemmas

INTRODUCTION

CLASSICAL EVOLUTIONARY GAME THEORY

EVOLUTIONARY GAME THEORY  
ON COMPLEX NETWORKS

## QUANTUM GAME THEORY

EVOLUTIONARY QUANTUM GAME THEORY  
ON COMPLEX NETWORKS

SOCIAL DILEMMAS AND QUANTUM GAME THEORY

# Quantum Theory

## Complex numbers

G. W. Leibniz (1702)

"...are a subtle and wondrous refuge of the human spirit, almost a hybrid between being and non-being"

"...sind eine feine und wunderbare Zuflucht des menschlichen Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein"

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

The Quantum Wave Function is defined on the space of complex numbers (real numbers and imaginary numbers)

the so-called *Hilbertspace*

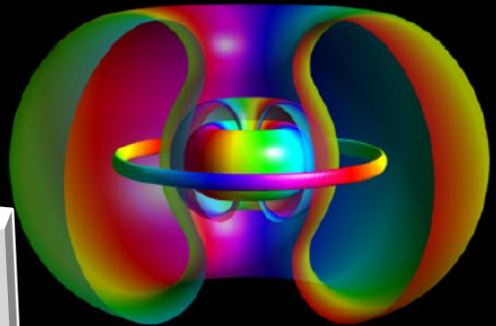




# Quantum Measurement and Reality

$$\langle \hat{M} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \hat{M} \psi^*(x, t) dx$$

At the moment of measurement, the complex-valued state of the quantum object collapses into an observable property:  
*The observable property of the object becomes real*  
*The decision state of a player collapses to one of the pure strategies*

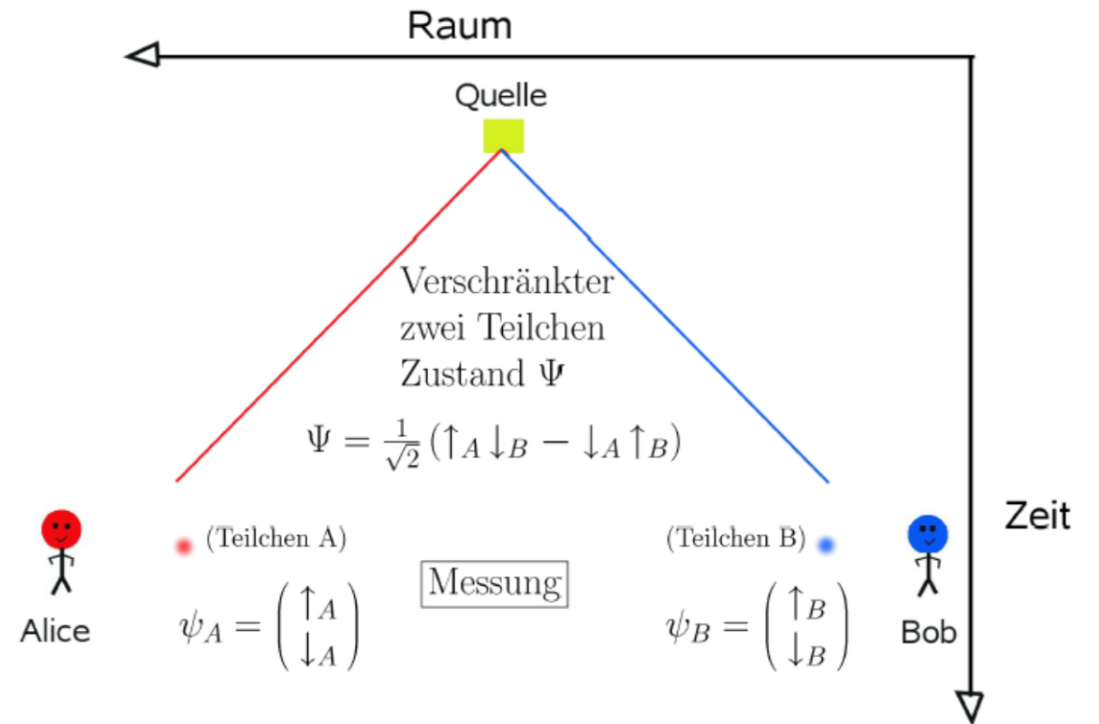


$\psi$

# Quantum Entanglement

## Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

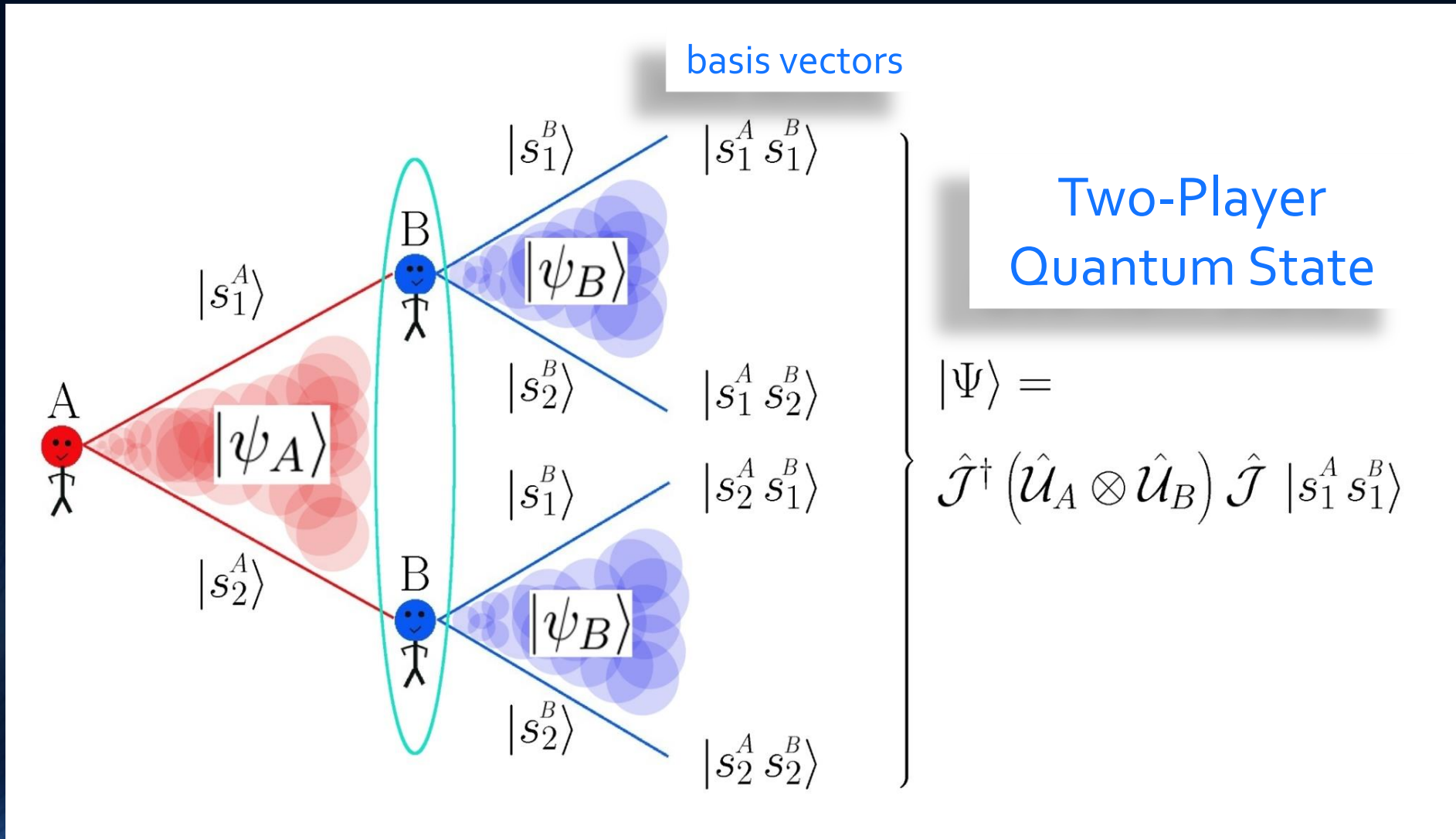
A. Einstein: „Spooky long-distance effect“



*Richard Feynman:*  
*"I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics."*

# Quantum Games

The entangled Two-Player Quantum-Spinor



Through a quantum-theoretical entanglement of the imaginary decision-making paths within an actor network, a population can succeed in escaping a dilemma-like situation if the value of the entanglement exceeds a certain threshold value.

# The Quantum State of Player A and the Decision Operator

$$|\psi_A\rangle = \psi_1^A |s_1^A\rangle + \psi_2^A |s_2^A\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ -\psi_2^A \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_A$$

$$|s_1^A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_2^A\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_1^A = e^{i\varphi_A} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right), \quad \psi_2^A = \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)$$

$$|\psi_A\rangle = \widehat{\mathcal{U}}(\theta_A, \varphi_A) |s_1^A\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_A} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Die reinen Zustände  $|s_1^A\rangle$  und  $|s_2^A\rangle$  bilden die Basis des Hilbertraums  $\mathcal{H}_A$  des Spielers A und repräsentieren die reinen Strategien  $s_1^A$  und  $s_2^A$  des Spiels. Der Entscheidungsoperator des Spielers  $\mu$  hängt von den beiden Entscheidungswinkeln  $\theta_\mu$  und  $\varphi_\mu$  ab und ist explizit wie folgt definiert:

$$\widehat{\mathcal{U}}_\mu(\theta_\mu, \varphi_\mu) := \begin{pmatrix} e^{i\varphi_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) & e^{-i\varphi_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \forall \quad \theta_\mu \in [0, \pi] \wedge \varphi_\mu \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad .$$

# The Entanglement Operator and the 2-Player Quantum State

Der finale Zwei-Spielerzustand eines simultanen Zwei-Strategien-'One Shot'-Quantenspiels wird somit durch den vierkomponentigen Quantenzustand  $|\Psi\rangle$  beschrieben, welcher sich in der Eisert'schen Repräsentation wie folgt aus dem Anfangszustand  $|\Psi_0\rangle = \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle$  entwickelt

$$|\Psi\rangle = \widehat{\mathcal{J}}^\dagger (\widehat{U}_A \otimes \widehat{U}_B) \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle, \quad |\Psi_0\rangle = \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) \\ 0 \\ 0 \\ -i \sin(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix},$$

wobei  $\widehat{\mathcal{J}} := (J_{\alpha\beta})$ ,  $\alpha, \beta = 1 \dots 4$  die von dem Parameter  $\gamma$  abhängige Verschränkungsmatrix (bzw. den Verschränkungsoperator) beschreibt

$$\widehat{\mathcal{J}} := e^{-i \frac{\gamma}{2} (\widehat{s}_2^A \otimes \widehat{s}_2^B)} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) & 0 & 0 & -i \sin(\frac{\gamma}{2}) \\ 0 & \cos(\frac{\gamma}{2}) & i \sin(\frac{\gamma}{2}) & 0 \\ 0 & i \sin(\frac{\gamma}{2}) & \cos(\frac{\gamma}{2}) & 0 \\ -i \sin(\frac{\gamma}{2}) & 0 & 0 & \cos(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix} \mathbb{I}, \quad \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$\widehat{U}_A := (U_{\alpha\beta}^A)$ ,  $\alpha, \beta = 1 \dots 2$  und  $\widehat{U}_B := (U_{\alpha\beta}^B)$ ,  $\alpha, \beta = 1 \dots 2$  stellen die von den Winkeln  $\theta_A, \varphi_A$  und  $\theta_B, \varphi_B$  abhängigen Entscheidungsmatrizen (Entscheidungsoperatoren) der Spieler A und B dar.

# The Quantum Version of the Payoff Function

Der Erwartungswert der Auszahlungen der Spieler wird zusätzlich durch die Spielmatrix (siehe nebenstehende Auszahlungstabelle) mitbestimmt:

$$\$A = \$_{11}^A P_{11} + \$_{12}^A P_{12} + \$_{21}^A P_{21} + \$_{22}^A P_{22}$$

$$\$B = \$_{11}^B P_{11} + \$_{21}^B P_{12} + \$_{12}^B P_{21} + \$_{22}^B P_{22}$$

$$\text{mit: } P_{kl} = |\langle s_k^A s_l^B | \Psi \rangle|^2, \quad k, l = \{1, 2\}$$

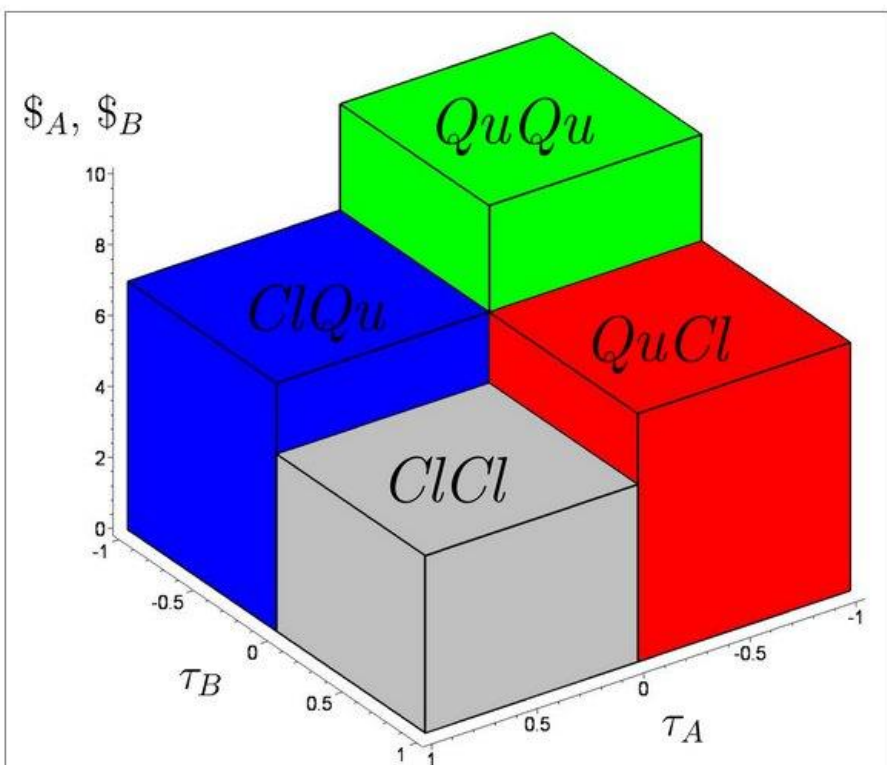
A \ B	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	$(\$_{11}^A, \$_{11}^B)$	$(\$_{12}^A, \$_{21}^B)$
$s_2^A$	$(\$_{21}^A, \$_{12}^B)$	$(\$_{22}^A, \$_{22}^B)$

**Allgemeine Auszahlungsmatrix eines (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels.**

Dieser Erwartungswert der Auszahlungen stellt eine Erweiterung des aus der klassischen Spieltheorie bekannten Konzepts der Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien dar.

Um die Auswirkungen des quantenspieltheoretischen Konzepts auf die dem Spieler ratsame Wahl der Entscheidung zu untersuchen, wird im Folgenden die Struktur der quantenspieltheoretisch erweiterten gemischten Auszahlungsfunktion untersucht. Im Unterschied zur klassischen Auszahlungsfunktion ( $\tilde{\$}^\mu(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)$ ), die lediglich von den gemischten Strategien des Spielers A ( $\tilde{s}^A$ ) und des Spielers B ( $\tilde{s}^B$ ) abhängt, hängt die quantentheoretische Erweiterung der Auszahlungsfunktion im Allgemeinen von fünf Parametern ab: Die vier Winkel der Entscheidungsoperatoren ( $\theta_A, \varphi_A, \theta_B$  und  $\varphi_B$ ) und der Parameter  $\gamma$ , welcher die Stärke der Strategienverschränkung quantifiziert.

# Visualization and the Reduced Set of Quantum Strategies



Visualisierungsraum der quantentheoretisch erweiterten Auszahlung  $\$$  als Funktion der reduzierten  $s_1$ -Quantenstrategien  $\tau_A$  des Spielers A und  $\tau_B$  des Spielers B.

Um die Auszahlungsfunktion dennoch als Fläche in einem dreidimensionalen Raum zu visualisieren, reduziert man deren Abhängigkeiten, indem man einerseits den Verschränkungsparameter  $\gamma$  fixiert und die Menge der Quantenstrategien auf diejenigen beschränkt, die vom Ursprung der reinen, klassischen  $s_1$ -Strategie starten. Die Abhängigkeiten des vierkomponentigen Zwei-Spieler Quantenzustand  $|\Psi\rangle$  werden durch die Einführung zweier neuer Parameter ( $\tau_A$  und  $\tau_B$ ) reduziert:

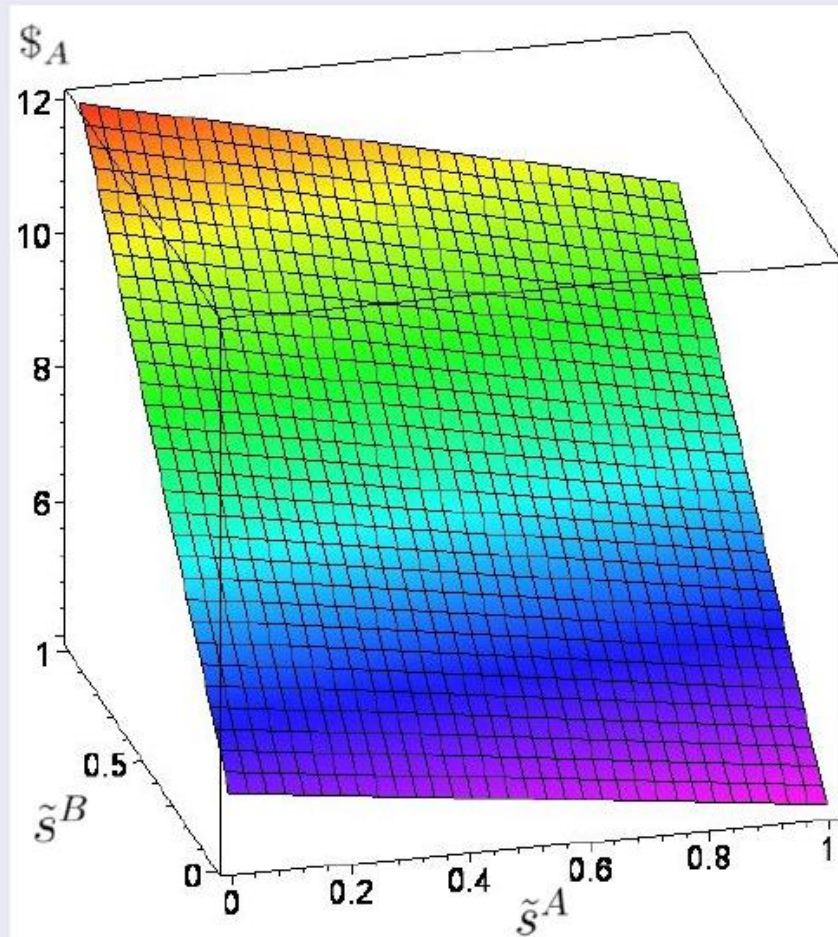
$|\Psi\rangle = |\Psi(\theta_A, \varphi_A, \theta_B, \varphi_B)\rangle \rightarrow |\Psi(\tau_A, \tau_B)\rangle$ . Die für jeden Spieler wählbaren Entscheidungswinkel  $\theta$  und  $\varphi$  werden dadurch auf einen einzigen Parameter  $\tau \in [-1, 1]$  reduziert. Positive  $\tau$ -Werte entsprechen den klassischen gemischten Strategien, wohingegen negative  $\tau$ -Werte Quantenstrategien mit  $\theta = 0$  und  $\varphi > 0$  repräsentieren. Der gesamte quantentheoretische Strategienraum wird dadurch in vier separate Regionen unterteilt: in den absolut klassischen Bereich (ClCl:  $\tau_A, \tau_B \geq 0$ ), den absoluten Quantenbereich (QuQl:  $\tau_A, \tau_B < 0$ ) und in die beiden semi-klassischen Quantenbereiche (ClQl:  $\tau_A \geq 0 \wedge \tau_B < 0$  und QlCl:  $\tau_A < 0 \wedge \tau_B \geq 0$ ). Durch diese  $(\tau_A, \tau_B)$ -Repräsentation wird die Menge der möglichen Quantenstrategien auf die folgende Untermenge reduziert:

$$\underbrace{\{(\tau \pi, 0) \mid \tau \in [0, 1]\}}_{\text{klassischer Bereich Cl}} \quad \wedge \quad \underbrace{\{(0, \tau \frac{\pi}{2}) \mid \tau \in [-1, 0]\}}_{\text{Quantenbereich Ql}}$$

Die nebenstehende Abbildung stellt die vier Regionen des Visualisierungsraums der quantentheoretischen Auszahlungsfunktion dar. Die absolut klassische Region (ClCl,  $\varphi_A, \varphi_B \equiv 0$ ) befindet sich im vorderen Bereich, die Region in welchem beide Spieler eine Quantenstrategie

# Quantum extension of dominant class games

## Classical payoff for player A



A \ B	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	(10,10)	(4,12)
$s_2^A$	(12,4)	(5,5)

**Table:** Payoffmatrix of a dominant, prisoners dilemma like game.

This dominant, prisoners dilemma like game has only one pure, symmetric Nash equilibrium  $(s_2^A, s_2^B)$  which is the only ESS of the evolutionary game.

## Teil III.2.3 Symmetrische (2x2)-Quantenspiele

Parametersätze	Spielklasse	$\$_{11}$	$\$_{12}$	$\$_{21}$	$\$_{22}$	Nash-Gleichgewichte
$Set_A$	Dominantes Spiel	10	4	12	5	Ein reines Nash-Gleichgewicht $(s_2^A, s_2^B)$
$Set_B$	Koordinations-spiel	10	4	9	5	Zwei reine NEs, ein internes NE $(s^* = \frac{1}{2})$
$Set_C$	Anti-Koordinations-spiel	10	7	12	5	Zwei reine NEs, ein internes NE $(s^* = \frac{1}{2})$

Parameterwerte der drei symmetrischen Beispielspiele.

Die auf der rechten Seite dargestellte Abbildung stellt die quantentheoretisch erweiterte Auszahlung  $\$A$  des Spielers A (untransparente Fläche) und  $\$B$  des Spielers B (transparente Fläche) als Funktion der reduzierten  $s_1$ -Quantenstrategien  $\tau_A$  des Spielers A und  $\tau_B$  des Spielers B dar. Als zugrundeliegender Parametersatz wurde  $Set_A$  verwendet und die Stärke der Quantenverschränkung der Spielerstrategien wurde auf null gesetzt ( $\gamma = 0$ ). Als Visualisierungsraum wurde der in der oberen Abbildung beschriebene reduzierte Raum verwendet, wobei der absolute Quantenbereich QuQu, bei dem beide Spieler eine Quantenstrategie benutzen,

im hinteren Teil des Diagramms zu finden ist und die rein klassische Region ClCl nach vorne projiziert wurde. Die Abbildung zeigt deutlich, dass das unverschränkte Quantenspiel identisch mit der klassischen Version des Spiels ist. Im Bereich, in dem beide Spieler eine Quantenstrategie wählen ( $\tau_A < 0 \wedge \tau_B < 0$ ),

ist die Auszahlung der Spieler gleich der Auszahlung, als wenn die Spieler die klassische Strategie  $s_1$  gewählt hätten ( $\$A(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10, \$B(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$ ). Das Nash-Gleichgewicht des klassischen Spiels ( $(s_2^A, s_2^B)$ , die dominante Strategie) entspricht den folgenden  $\tau$ -Werten:

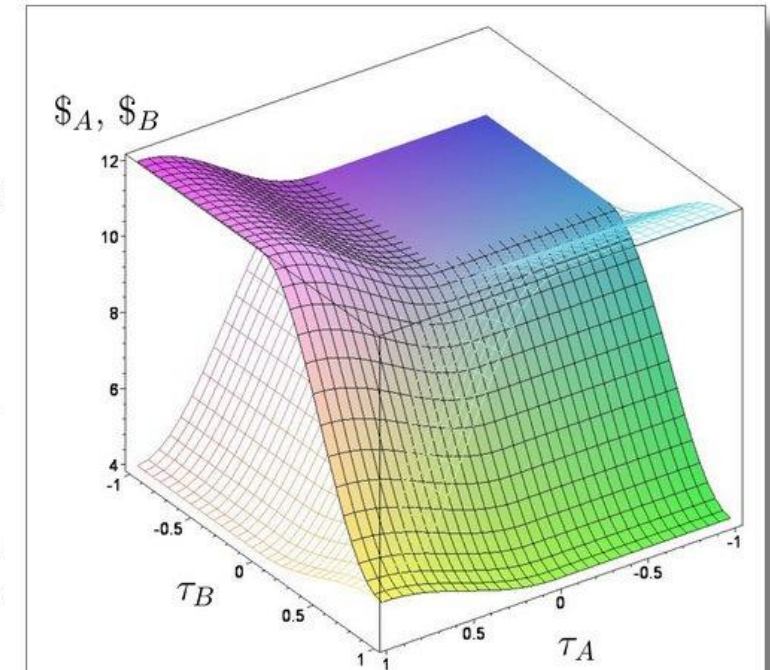
$(s_2^A, s_2^B) \hat{=} (\tau_A = 1, \tau_B = 1)$  und bleibt auch im unverschränkten Quantenspiel bestehen.

Die beiden Diagramme in der linken unteren Abbildung stellen die quantentheoretisch erweiterte Auszahlungsfunktion bei einem mittleren und dem maximalen Verschränkungswert dar. Die Struktur der Auszahlungsflächen innerhalb der vollständig klassischen Region ClCl verändert ihr Erscheinungsbild bei

Symmetrische (2 Personen)-(2 Strategien) Spiele lassen sich formal in drei unterschiedliche Spielklassen separieren (siehe Teil I).

### Dominante Spiele ( $Set_A$ )

Das durch Parametersatz  $Set_A$  definierte Spiel gehört der Klasse der dominanten Spiele an. Das Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien befindet sich bei der Strategienkombination, bei welcher beide Spieler die Strategie  $s_2$  spielen ( $s_2^A, s_2^B$ ).



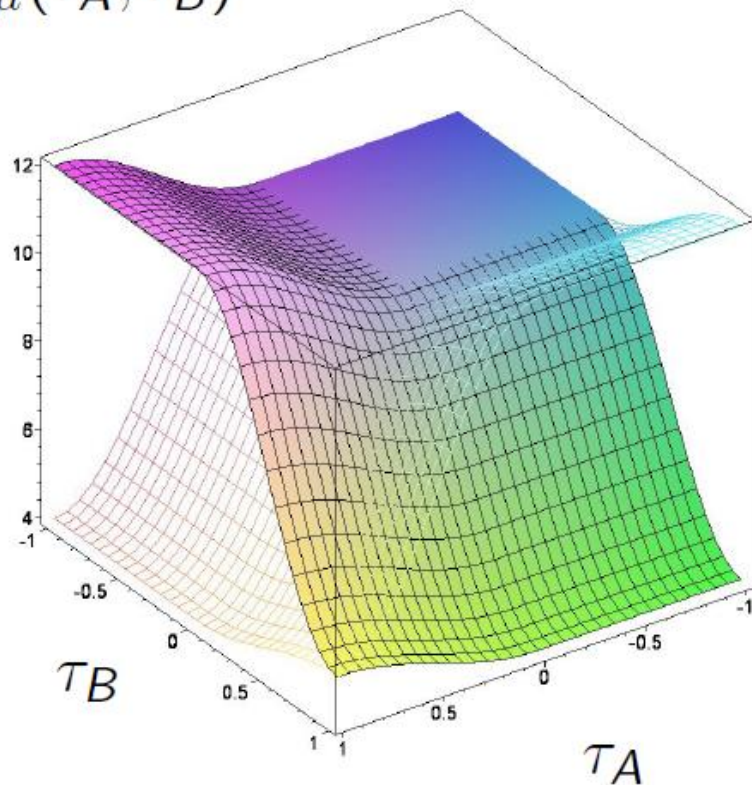
Quantentheoretisch erweiterte Auszahlung  $\$A$  des Spielers A (untransparente Fläche) und  $\$B$  des Spielers B (transparente Fläche) als Funktion der reduzierten  $s_1$ -Quantenstrategien  $\tau_A$  des Spielers A und  $\tau_B$  des Spielers B in einem unverschränkten Quantenspiel ( $\gamma = 0$ ) unter Verwendung des Parametersatzes  $Set_A$ .



# Quantum extension of dominant class games

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = 0$  (no entanglement)

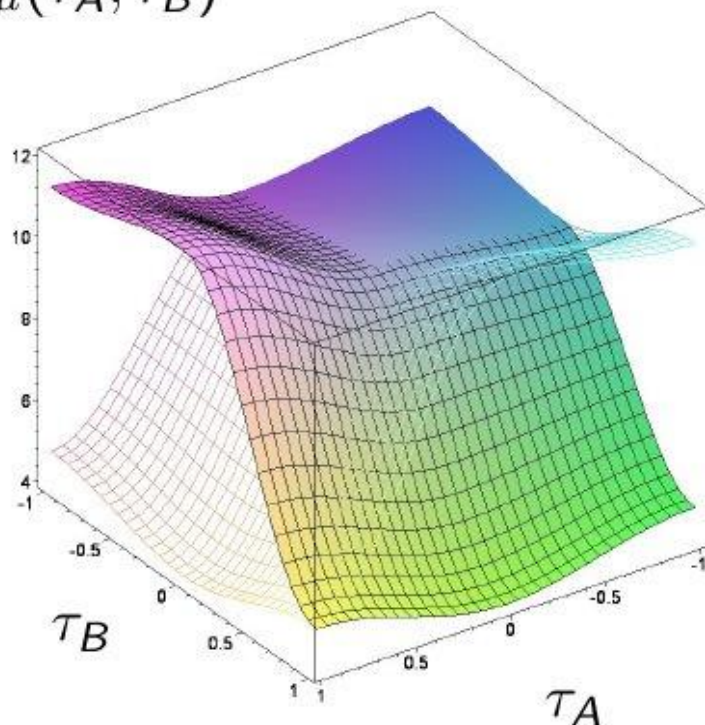
$$\$_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The diagram clearly exhibits that the non-entangled quantum game simply describes the classical version of the prisoner's dilemma game. For the case, that both players decide to play a quantum strategy ( $\tau_A < 0 \wedge \tau_B < 0$ ) their payoff is equal to the case where both players choose the classical pure strategy  $s_1$  ( $\$A(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$ ). The classical Nash equilibrium ( $(s_2^A, s_2^B)$ , the dominant strategy) corresponds to the following  $\tau$ -values:  $(s_2^A, s_2^B) \hat{=} (\tau_A = 1, \tau_B = 1)$ .

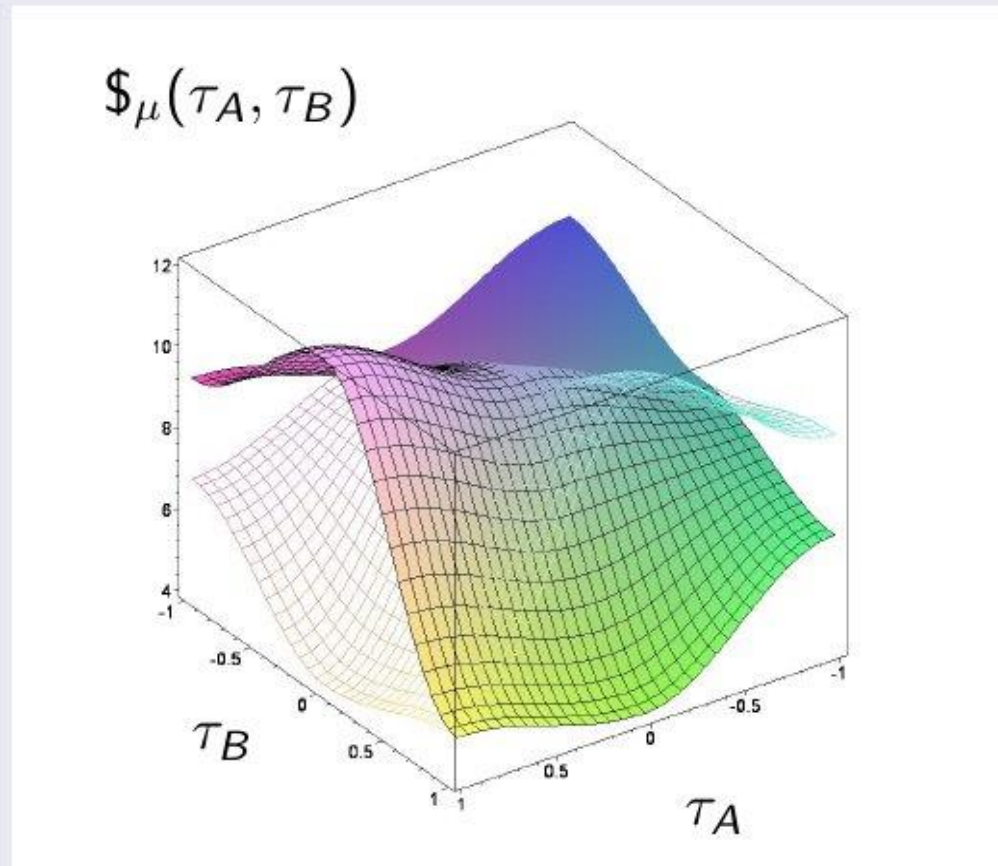
Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{10} \approx 0.31$

$$\mathcal{S}_\mu(\tau_A, \tau_B)$$



For the absolute classical region  $CICI$  the shape of the surfaces does not change, whereas for the partially classical-quantum ( $CIQu$  and  $QuCI$ ) and absolute quantum region regions  $QuQu$  the payoff structure changes due to a possible interference of quantum strategies within Hilbertspace. The structure of Nash-equilibria does not change for the left picture, whereas for the following pictures the previously present dominant strategy of the prisoner's dilemma game has disappeared and a new, advisable quantum Nash-equilibrium will appear at  $(\hat{Q}, \hat{Q} \hat{=} (\tau_A = -1, \tau_B = -1))$ . During the transition from this figure to the next picture two separate phenomena occur. At first, for an entanglement value  $\gamma_1 \approx 0.37$ , the best response for player A to the strategy  $s_2^B \hat{=} \tau_B = 1$  is no longer the strategy  $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$ , as  $\mathcal{S}_A(\tau_A = -1, \tau_B = 1) \approx 5.05$  is now higher than  $\mathcal{S}_A(\tau_A = 1, \tau_B = 1) = 5$ . Secondly, for an entanglement value  $\gamma_2 \approx 0.53$ , the best response for player A to the strategy  $\hat{Q}_B \hat{=} \tau_B = -1$  is no longer the strategy  $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$ , as  $\mathcal{S}_A(\tau_A = 1, \tau_B = -1) \approx 9.96$  is for  $\gamma_2 = 0.53$  lower than  $\mathcal{S}_A(\tau_A = -1, \tau_B = -1) = 10$ .

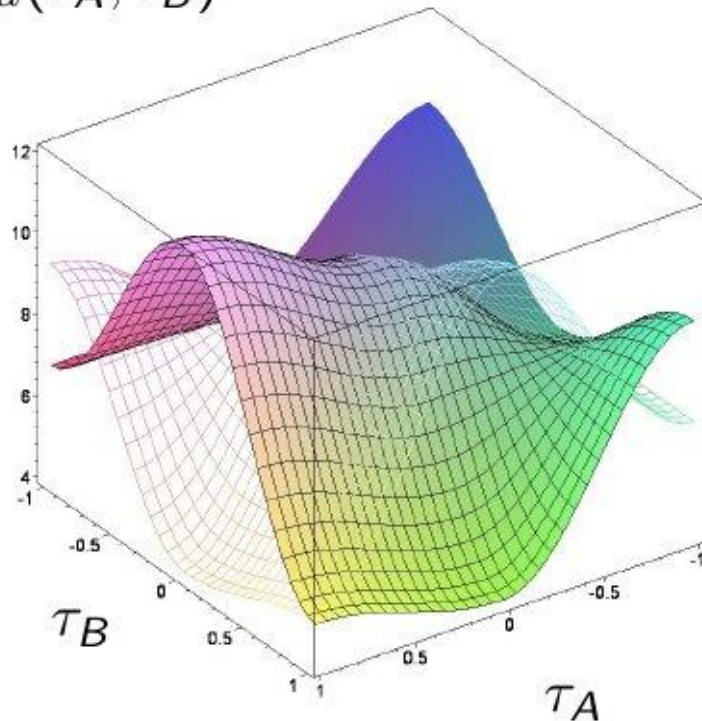
Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{8} \approx 0.52$



For the absolute classical region  $CICI$  the shape of the surfaces does not change, whereas for the partially classical-quantum ( $CIQu$  and  $QuCI$ ) and absolute quantum region regions  $QuQu$  the payoff structure changes due to a possible interference of quantum strategies within Hilbertspace. The structure of Nash-equilibria did not change for the last figure, whereas for this and the following pictures the previously present dominant strategy of the prisoner's dilemma game has disappeared and a new, advisable quantum Nash-equilibrium has appeared ( $\hat{Q}, \hat{Q} \hat{=} (\tau_A = -1, \tau_B = -1)$ ). During the transition from the last picture to this figure two separate phenomena occurred. At first, for an entanglement value  $\gamma_1 \approx 0.37$ , the best response for player A to the strategy  $s_2^B \hat{=} \tau_B = 1$  is no longer the strategy  $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$ , as  $\$_A(\tau_A = -1, \tau_B = 1) \approx 5.05$  is now higher than  $\$_A(\tau_A = 1, \tau_B = 1) = 5$ . Secondly, for an entanglement value  $\gamma_2 \approx 0.53$ , the best response for player A to the strategy  $\hat{Q}_B \hat{=} \tau_B = -1$  is no longer the strategy  $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$ , as  $\$_A(\tau_A = 1, \tau_B = -1) \approx 9.96$  is for  $\gamma_2 = 0.53$  lower than  $\$_A(\tau_A = -1, \tau_B = -1) = 10$ .

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{6} \approx 0.94$

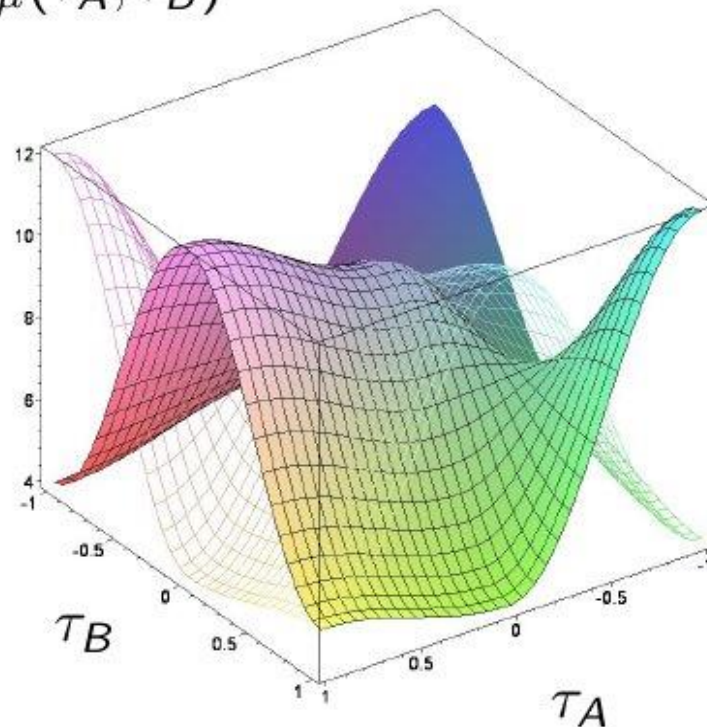
$$S_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The results show, that a quantum extension of a classical prisoner's dilemma game is able to change the structure of Nash-equilibria, and even previously present dominant strategies could become nonexistent, if the value of entanglement increases further than a defined  $\gamma$ -threshold. Players with a higher strategic entanglement value  $\gamma$  escape the dilemma as they see the advantage of the quantum strategy combination  $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$ , which is measured as if both are playing the classical strategy  $s_2$ .

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$

$$S_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The results show, that a quantum extension of a classical prisoner's dilemma game is able to change the structure of Nash-equilibria, and even previously present dominant strategies could become nonexistent, if the value of entanglement increases further than a defined  $\gamma$ -threshold. Players with a higher strategic entanglement value  $\gamma$  escape the dilemma as they see the advantage of the quantum strategy combination  $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$ , which is measured as if both are playing the classical strategy  $s_2$ .

Social dilemmas can be resolved with the entangled strategic decision paths of quantum game theory.

For vanishing values of entanglement ( $\gamma=0$ ) quantum games are identical to classical games.

### Dominant Class:

Games with a dilemma: The dilemma resolves if the value of entanglement is above a defined  $\gamma$ -barrier.

Games without a dilemma: No further Nash-equilibria, dominant strategy remains.

### Class of coordination games:

The coordination problem resolves if the value of entanglement is above a defined  $\gamma$ -barrier.

### Class of anti-coordination games:

An additional Nash-Equilibrium appears if the value of entanglement is above a defined  $\gamma$ -barrier.

In General: If the strategy entanglement is large enough, then additional Nash equilibria can occur, previously present, not favorable dominant or evolutionary stable strategies could become nonexistent and new, favorable evolutionary stable strategies do appear for some game classes.

## Quantum Game Theory and Financial Crises (Anti-Coordination Class)

M. Hanauske, J. Kunz, S. Bernius und W. König "Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory-based analysis of financial crises" (in Physica A 389 (2010) 5084 – 5102)

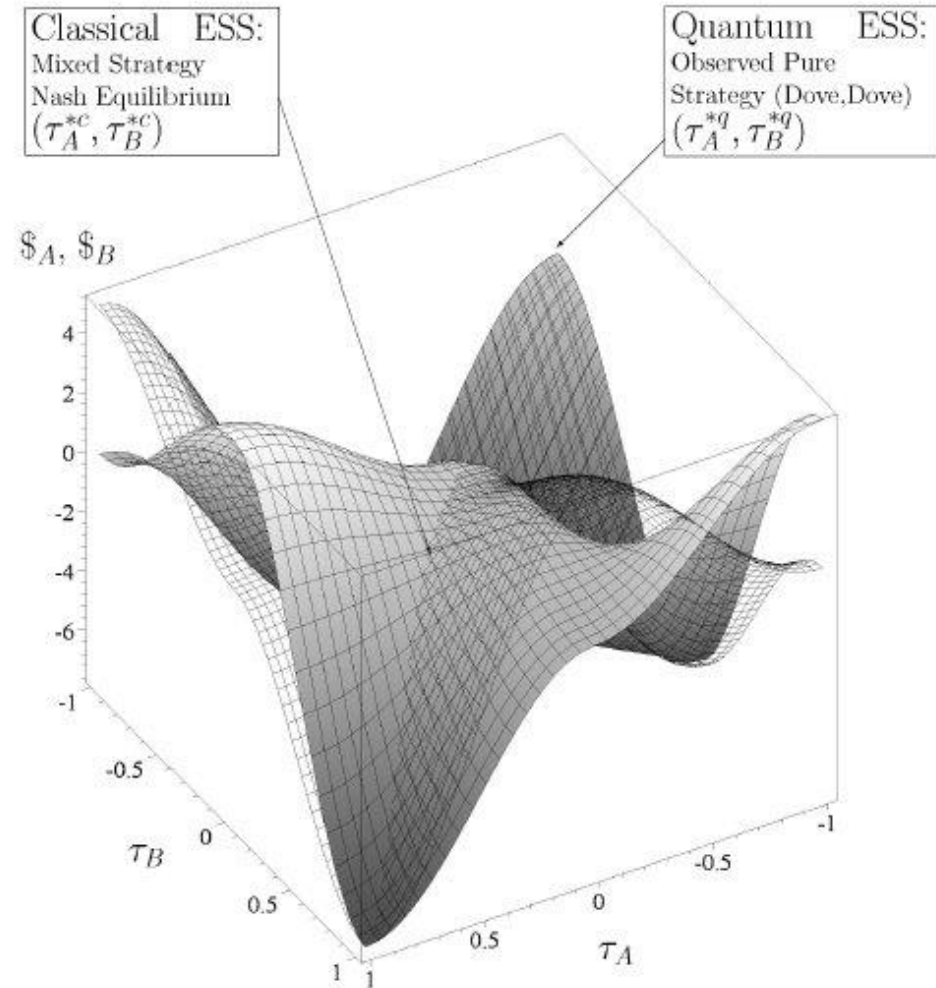


Figure 5.10.: Same description as Figure 5.7, whereas the results were calculated within a maximally entangled quantum game ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ) using parameter set  $P3$ .

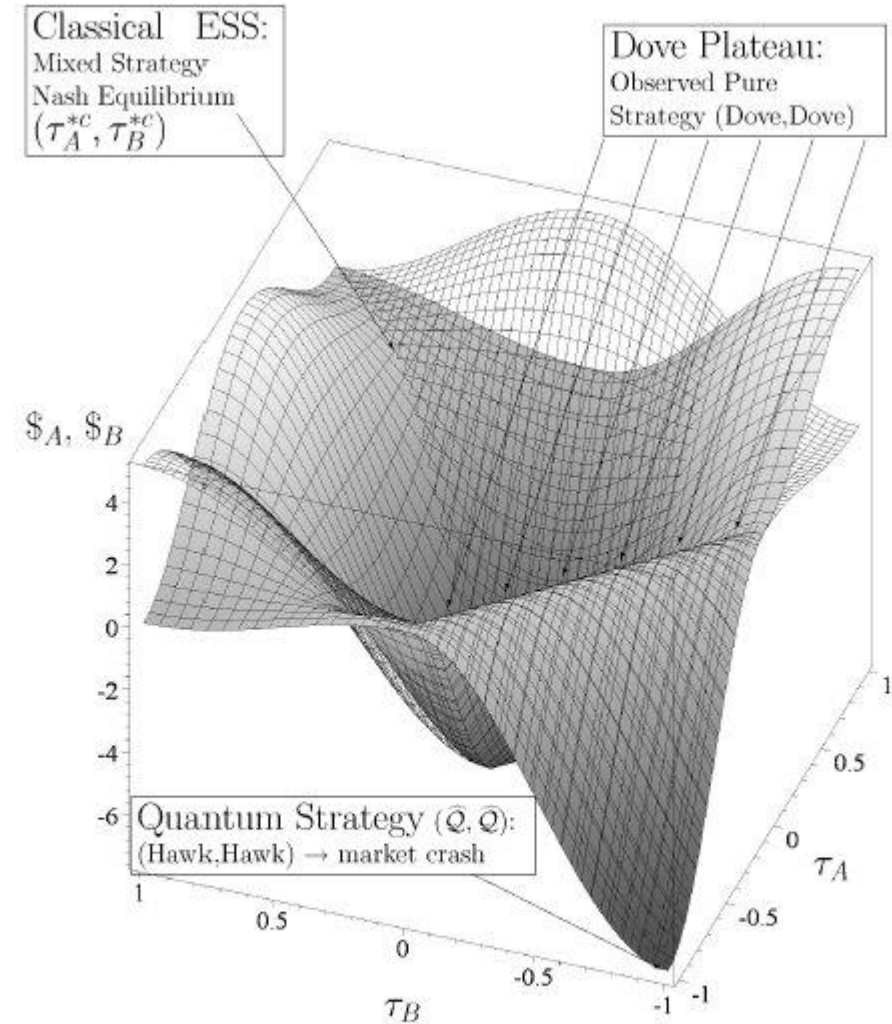


Figure 5.13.: Same description as Figure 5.12, whereas the results were calculated within a maximally entangled quantum game ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ) using parameter set  $P3$ .

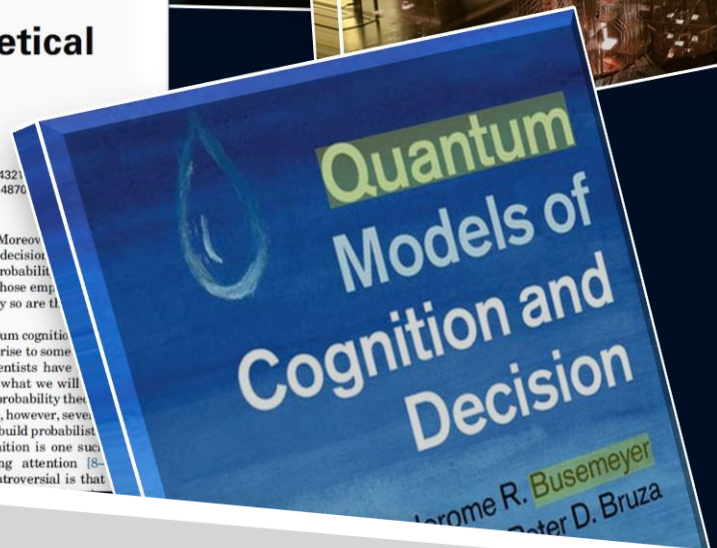
Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)  
**SCIENCE @ DIRECT®**  
 Journal of Mathematical Psychology 50 (2006) 220–241  
[www.elsevier.com/locate/jmp](http://www.elsevier.com/locate/jmp)

**Journal of Mathematical Psychology**

**Quantum dynamics of human decision-making**  
 Jerome R. Busemeyer<sup>\*</sup>, Zheng Wang, James T. Townsend  
 Indiana University, USA  
 December 2004; received in revised form 11 January 2006  
 Available online 15 March 2006

**Feature Review** **CellPress**

**Quantum cognition: a new theoretical approach to psychology**  
 Peter D. Bruza<sup>1</sup>, Zheng Wang<sup>2</sup>, and Jerome R. Busemeyer<sup>3</sup>  
<sup>1</sup>Information Systems School, GPO Box 2434, Queensland University of Technology, Brisbane 4001, Australia  
<sup>2</sup>School of Communication, 3145 Derby Hall, 154 North Oval Mall, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA  
<sup>3</sup>Department of Psychological and Brain Sciences, 1875 University Avenue, Bloomington, IN 47405, USA



Emmanuel Haven • Andrei Khrennikov  
 Editors

**The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science**  
 Applications and Grand Challenges

**ELSEVIER**

Journal of Mathematical Psychology 53 (2009) 303–305  
 Contents lists available at ScienceDirect  
**Journal of Mathematical Psychology**  
 journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jmp](http://www.elsevier.com/locate/jmp)

- The Quantum Penny Flip Game**  
 1999, D. A. Meyer, *Quantum strategies*, PRL 82 (1052)
- The Quantum Prisoner's Dilemma**  
 1999, J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, *Quantum Games and Quantum Strategies*, PRL 83 (3077)
- The Quantum Battle of Sexes**  
 2001, L. Marinatto and T. Weber, *A Quantum Approach To Static Games Of Complete Information*, Physics Letters A 272
- The Quantum Coordination Game**  
 2003, B. A. Huberman and T. Hogg, *Quantum Solution of Coordination Problems*, Quantum Information Processing 2(6)
- The Quantum Ultimatum Game**  
 2005, R. Vilela Mendes, *The Quantum Ultimatum Game*, Quantum Information Processing 4(1)

Editorial  
**Introduction to the special issue on quantum cognition**  
 Peter Bruza<sup>a</sup>, Jerome R. Busemeyer<sup>b,\*</sup>, Liane Gabora<sup>c</sup>  
<sup>a</sup> Queensland University of Technology, Faculty of Information Technology, GPO Box 2434, Brisbane, Australia  
<sup>b</sup> Indiana University, Department of Psychology, Bloomington, IN, United States  
<sup>c</sup> Columbia University, Department of Psychology, Kelowna, Canada



# Quantum Game Theory and Social Dilemmas

INTRODUCTION

CLASSICAL EVOLUTIONARY GAME THEORY

EVOLUTIONARY GAME THEORY ON COMPLEX NETWORKS

QUANTUM GAME THEORY

EVOLUTIONARY QUANTUM GAME THEORY ON COMPLEX NETWORKS

SOCIAL DILEMMAS AND QUANTUM GAME THEORY

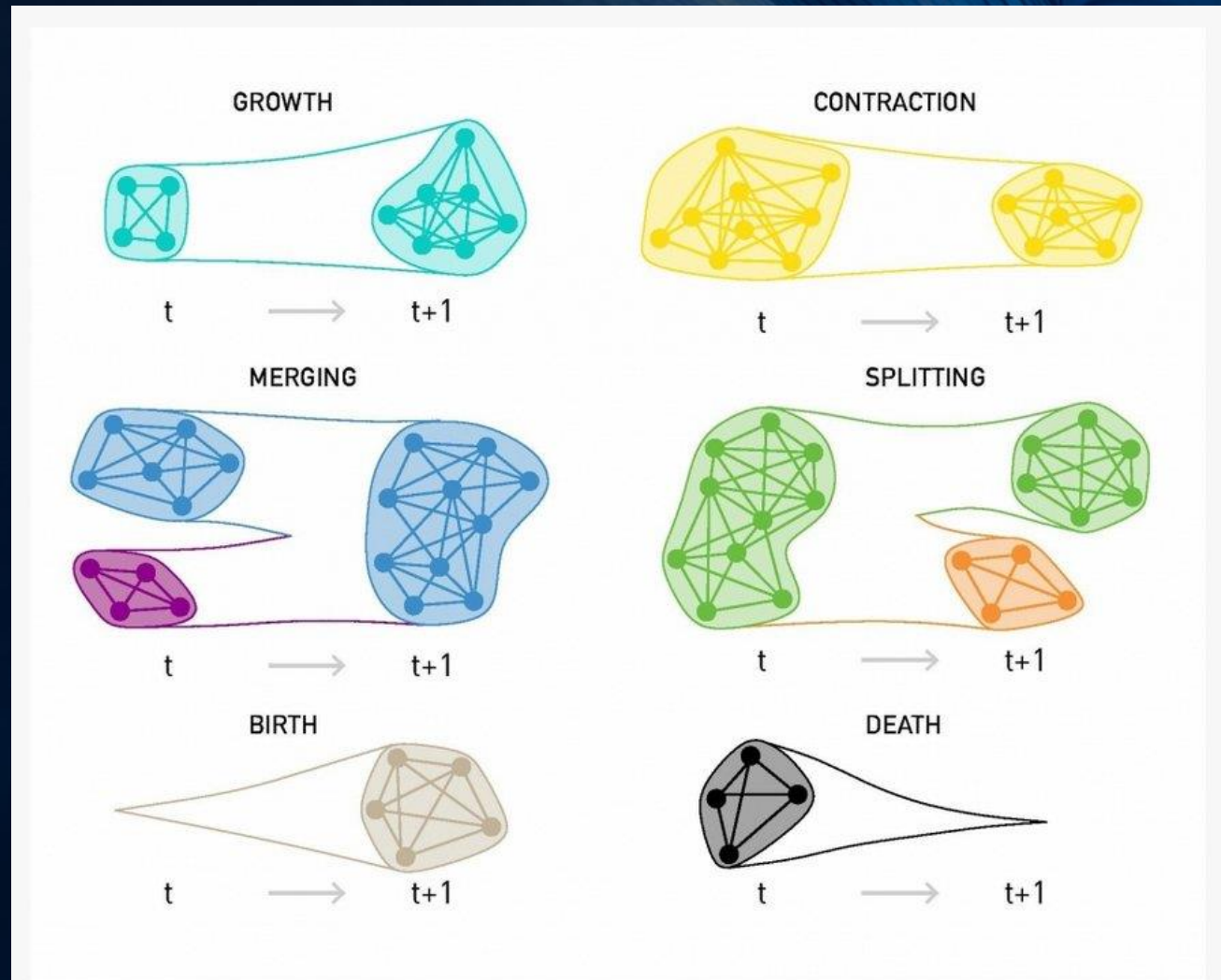


Image 9.31

## Evolving Communities

When networks evolve in time, so does the underlying community structure. All changes in community structure are the result of six elementary events in the life of a community, illustrated in the figure: a community can grow or contract; communities can merge or may split; new communities are born while others may disappear. After [50].

Picture taken from <http://networksciencebook.com/chapter/9>

# Quantum Game Theory and Social Dilemmas

INTRODUCTION

CLASSICAL EVOLUTIONARY GAME THEORY

EVOLUTIONARY GAME THEORY  
ON COMPLEX NETWORKS

QUANTUM GAME THEORY

EVOLUTIONARY QUANTUM GAME THEORY  
ON COMPLEX NETWORKS

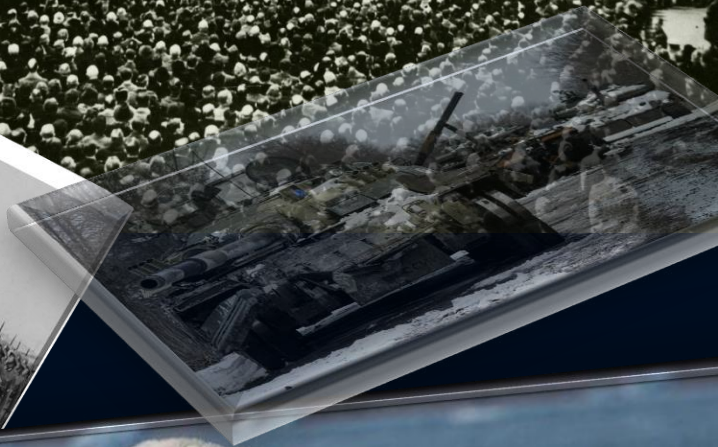
SOCIAL DILEMMAS AND  
QUANTUM GAME THEORY

# Social Dilemmas

A population of people ends up in a tragic state  
A social tragedy such as

People fight each other when a state of peace is possible.

People are exploiting their natural assets in a senseless and are causing an existential global temperature rise, although this was not the case 300 years ago.



# Summary and Outlook

The dominant nature of humans still causes recurring crises (e.g. financial crises, the climate crisis, revolutions) that often lead to violent fights and warlike conflicts - a metaphysics of socio-economic systems is desperately needed. Both deterministic evolutionary game theory and game theory on complex networks show that the evolution of populations can develop into dilemma-like situations. Evolutionary quantum game theory, a new mathematical model to describe the decision state of a population facing dilemma-like situations, was presented, and it was shown that a strategically entangled state of the population vector can escape the dilemma if the value of entanglement is above a certain threshold.

Quantum game theory represents a mathematical and conceptual extension of classical game theory. The space of all imaginable decision paths of the players is extended from purely real, measurable space into the space of complex numbers (real and imaginary numbers). Through the concept of the possible quantum-theoretical entanglement of the decision-making paths in the imaginary space of all imaginable quantum strategies, common directions of thought that have arisen from cultural or moral norms can be included in evolutionary dynamics. If the player's strategy entanglement in the imaginary space of the conceivable decision paths is only large enough, additional Nash equilibria can occur and previously existing dominant strategies dissolve.

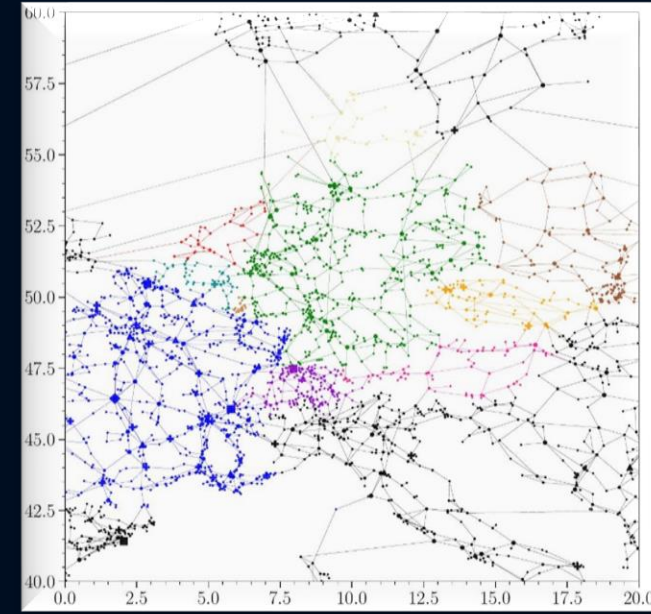
# Outlook: Applications and ...

## Evolutionary Quantum Game Theory for Power-, Heat- and Traffic-Networks

*A game-theoretic approach of the evolutionary paths of carbon dioxide consumers*

*Energy System Group  
Prof. Dr. Stöcker, Dr. Kies, Dr. Hoffmann  
and Markus Schlott*

The climate crisis is one of the most important example of a situation where humanity is trapped in a dilemma-like situation. Energy systems including the sectors of electricity, heating, and transportation need to transform towards renewable energy sources. The future of the electric power network depends on the decisions of the various actors which are embedded in a multipartite complex network. A game-theoretic approach of the whole European sector-coupled energy system depends on country-specific political and economic decisions and last but not least on the behavior of consumption of each human.



## Theoretical works regarding the mathematical basis of Quantum Game Theory

What happens when the strategic behaviour of a population is heading towards the abyss. The mathematical groundings of Quantum Game Theory are not well established so far to answer this question. There is neither an evolution equation of the theory based on basic gauge-theoretic principles, nor is there a kind of Dirac equation on curved strategy manifolds - similar to the movement of an electron with spin in curved space-time.

Together with **Prof. Carsten Greiner** and **Prof. Hendrik van Hees**, I am mainly working on the collapse of matter and the formation and movement of black holes.

# Evolutionary Quantum Game Theory on Curved Strategy Manifolds and the Gauge Symmetry Group

des Elektrons und seines zugehörigen Antiteilchen  
spinors zusammen:

$$\psi_A = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \\ \tilde{e}_L \\ \tilde{e}_R \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} \text{Linkshändiges Elektron} \\ \text{Rechtshändiges Elektron} \\ \text{Linkshändiges Positron} \\ \text{Rechtshändiges Positron} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Man kann dann mit ein und derselben Gleichung sowohl das Teilchen  
als auch das Antiteilchen beschreiben. Die zutreffende Gleichung nennt man  
Dirac equation of an particle-antiparticle state with spin

$$i \gamma^\mu_A{}^B \partial_\mu \psi_B - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi_A = 0 \quad (1.2)$$

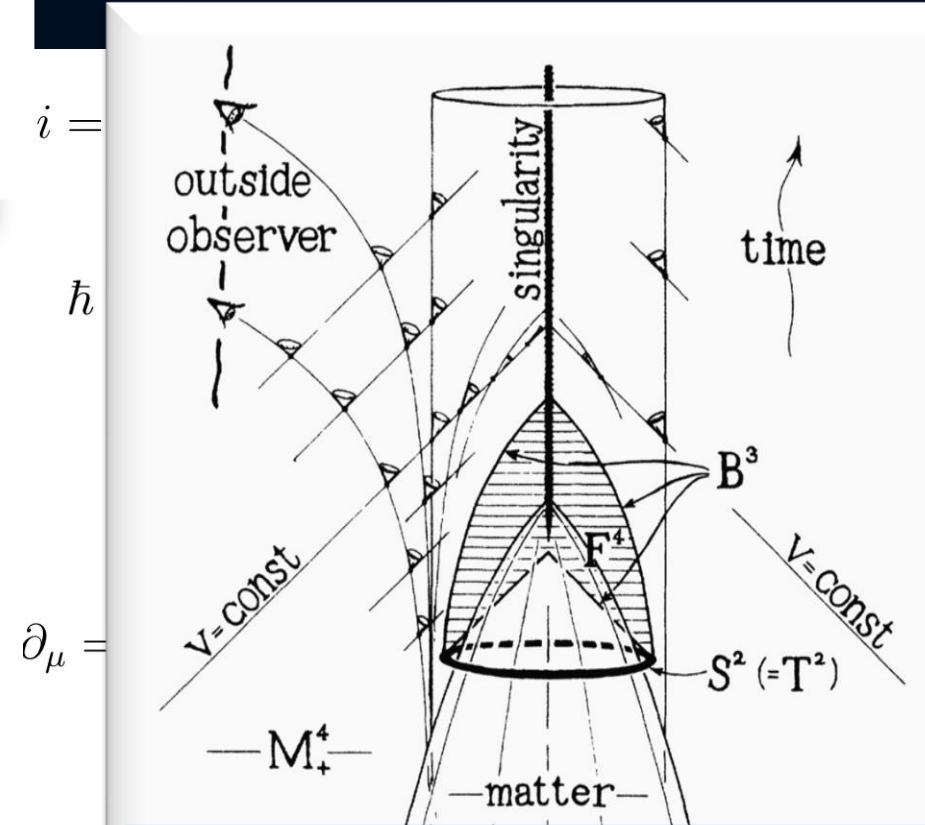
## Strategy-Dependent Dirac Matrices

What happens when the strategic behaviour of a population is heading towards the abyss.  
Elementary matter that collapses to black hole has been theoretically studied for decades,  
but only recently the gravitational wave signal from a  
collapsing hypermassive neutron star has been observed.

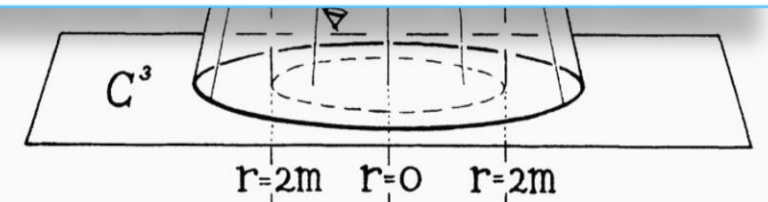
The Dirac spinor has the  
same mathematical  
structure as the (Two-  
Payer)(2 Strategy)-  
Quantum-Decision State

# GRAVITATIONAL COLLAPSE AND SPACE- TIME SINGULARITIES

Nobel Price in Physics 2020  
R.Penrose, PRL Vol.14 No.3 (1965)



The collapse of matter  
and the formation of a black hole



**MATTHIAS HANAUSKE**  
 FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES  
 JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
 INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
 ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK  
 D-60438 FRANKFURT AM MAIN



Lateral Thoughts: Matthias Hanauske

### Black holes and the German Reichstag

One day a couple of years ago I was attending a meeting of the German Astronomical Society in Berlin, when I was gripped with an almost irrefragable sense of inner unrest. There was no other option – I simply had to leave the lecture halls of the Technical University and carefully tape the entrance outside. Before I left, however, I carefully taped my poster to the wall between the entrances to the men's and women's toilets, which seemed the perfect spot for it. Every congress delegate would now be forced – subliminally at least – to notice my creation.

After leaving the university buildings, I first soaked up the summer sunshine in the zoological gardens before heading towards the Reichstag – the home of the German parliament. As I did so, my thoughts wandered off in a different direction. What a waste of time. What physics desperately need an exciting way of presenting their results.

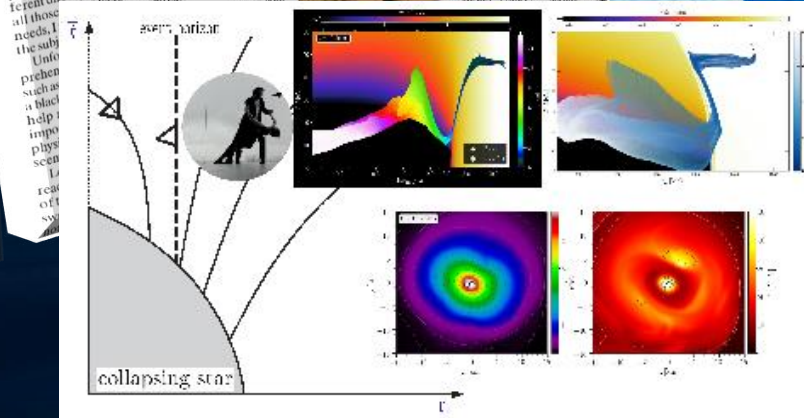
*A Report to an Academy*

*Humanity is of a contradictory nature. On the one hand, humans are able to understand and analyze the evolution of the whole universe and brilliant ideas like the prediction of gravitational waves by Albert Einstein and black holes have been recently observed. On the other hand, the dominant nature of man manifests itself in a stupidity that screams to heaven ....*

<http://itp.uni-frankfurt.de/~hannauske/new/etc/pdf/MG16-Hanauske.pdf>

# General Relativity in the Theater of the Absurd

Parallel session: Education  
 Teaching Einsteinian Physics to School Students  
 08.07.2021, 17:20



## MG16 5-10 JULY 2021

### SIXTEENTH MARCEL GROSSMANN MEETING

ON RECENT DEVELOPMENTS IN THEORETICAL AND EXPERIMENTAL GENERAL RELATIVITY, ASTROPHYSICS AND RELATIVISTIC FIELD THEORIES

**VIRTUAL MEETING**  
 websites: <http://www.icranet.org/mg16/> <https://indico.icranet.org/event/11/>  
 email: [mg16@icranet.org](mailto:mg16@icranet.org)  
 6:30-19:30 CENTRAL EUROPEAN SUMMER TIME

**50TH ANNIVERSARY OF "INTRODUCING THE BLACK HOLE"**

"Peace cannot be kept by force. It can only be achieved by understanding."  
 Albert Einstein

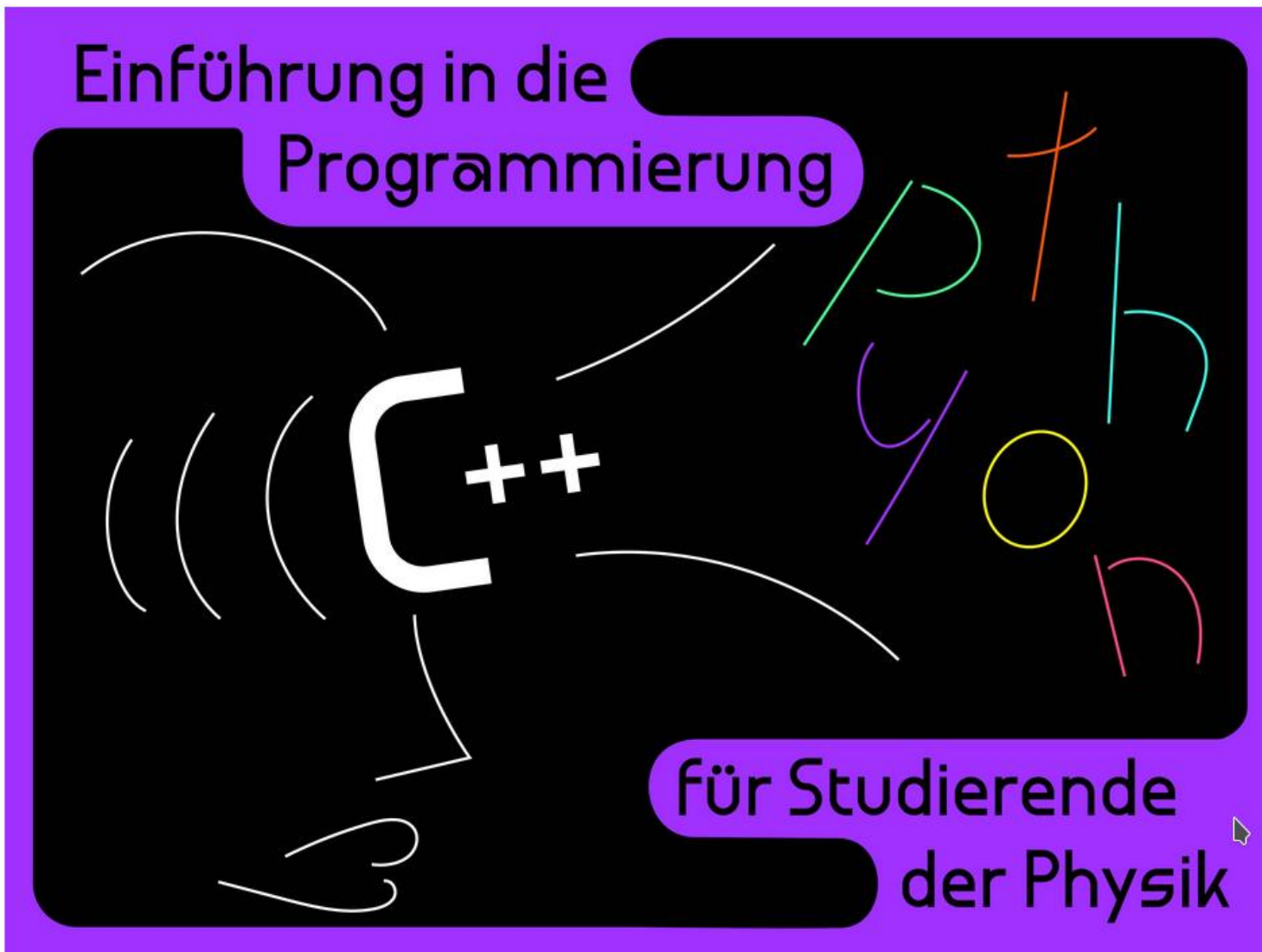


Illustration: Deborah Moldawski

Die Vorlesung *Einführung in die Programmierung für Studierende der Physik* stellt ein Pflichtmodul im Bachelor Studium Physik der Goethe-Universität Frankfurt dar. Bei regelmäßiger und erfolgreicher Teilnahme an den

## Einführung in die Programmierung für Studierende der Physik (Introduction to Programming for Physicists) Vorlesung SS 2022

Diese Internetseite fasst die Online-Angebote der Vorlesung *Einführung in die Programmierung für Studierende der Physik* zusammen. Die Vorlesungstermine finden jeweils dienstags von 15.00-16.00 Uhr und donnerstags von 14.00-16.00 Uhr im Raum Phys-0.111 statt. Die Termine der Übungen/Praktika finden Sie auf der [Online-Lernplattform OLAT](#) und die Übungsaufgaben werden im linken Panel unter der jeweiligen Vorlesung und zusätzlich auf [OLAT](#) bereitgestellt.

Die Vorlesung gibt einerseits eine Einführung in die Objekt-orientierte Programmiersprache C++ und vermittelt andererseits einige wesentliche Grundlagen der numerischen Mathematik. Es werden die grundlegenden Elemente der Programmiersprache, das Programmierparadigma der Objektorientierung und Simulationen von komplexen physikalischen Problemen behandelt. Das Hauptanliegen der Vorlesung besteht darin, dass die Studierenden die numerische Lösung eines komplexen physikalischen Problems auf dem Computer erstellen können. Der Schwerpunkt wird hierbei auf der Programmiersprache C++ liegen, wobei für die Visualisierung der berechneten Daten die Skriptsprache Python benutzt wird. Zusätzlich werden die berechneten mathematisch/physikalischen Gleichungen mittels Python Jupyter Notebooks analysiert und illustriert.

### Literatur zu C++

- Prof. Dr. Marc Wagner, Vorlesung im WS 2019/20: [Einführung in die Programmierung für Physiker](#)
  - [Bjarne Stroustrup 2015: Die C++ Programmiersprache](#)
  - [Bjarne Stroustrup 2009: Programming: Principles and Practice Using C++](#)
- Prof. Dr. Claudius Gros, Vorlesung im WS 2021/22: [Advanced Introduction to C++, Scientific Computing and Machine Learning](#)



# Additional Slides

# Die klassische Mechanik

## *und das Prinzip der kleinsten Wirkung*

### Mechanik

Wie bewegen sich Körper wenn eine Kraft auf sie einwirkt ?

Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist ein allgemeingültiges Prinzip der Natur und die gesamte klassische Mechanik kann mittels dieses Prinzips hergeleitet werden.

Pierre Maupertuis sprach 1746 als erster von diesem allgemeingültigen Prinzip der Natur extremal oder optimal abzulaufen

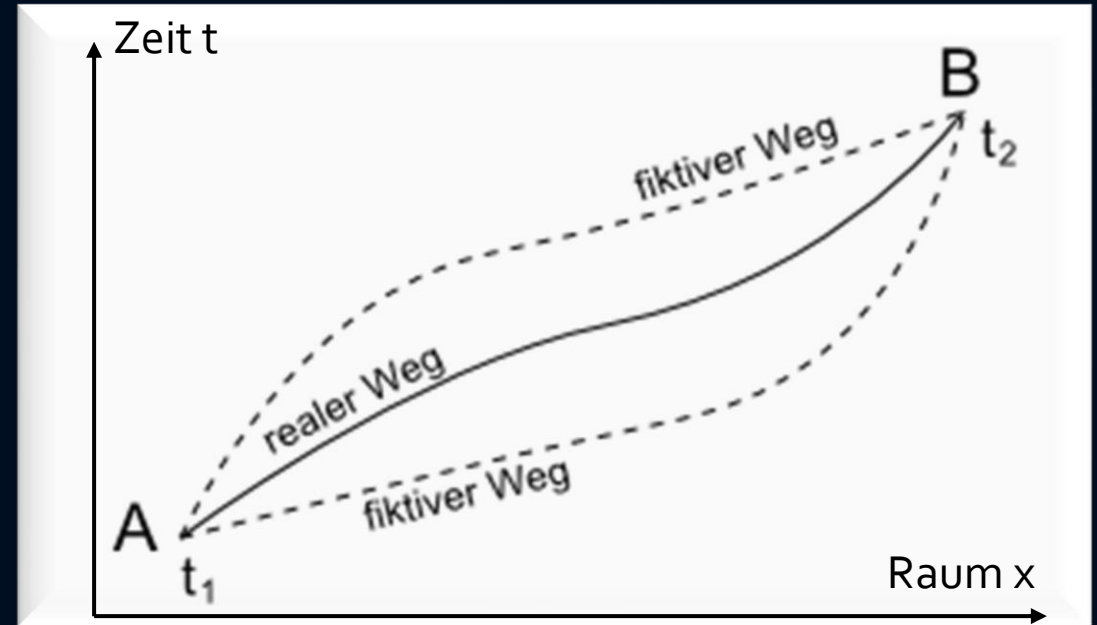
Leonhard Euler und Joseph Lagrange klärten in der Mitte des achtzehnten Jahrhunderts, dass solch ein Prinzip die Gültigkeit von Euler-Lagrange-Gleichungen bedeute. Die lagrangesche Formulierung der Mechanik stammt von 1788. 1834 formulierte William Hamilton das nach ihm benannte Prinzip.

Hamilton Funktion

$$H = T + V = E$$

Lagrange Funktion

$$L = T - V$$



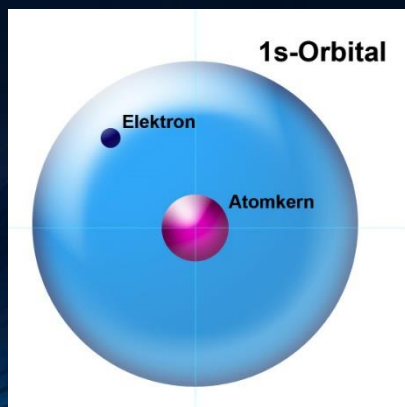
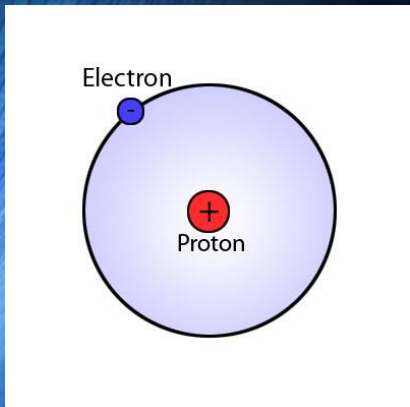
Das **Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung** besagt, dass von allen denkbaren, fiktiven Bahnen, die anfänglich bei A starten und im Punkt B enden, diejenigen Bahnen in der Natur durchlaufen werden, die die kleinste Wirkung haben. Für die physikalisch in der Natur realisierte Bahn verschwindet somit die Variation der Wirkung.

$$\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

# Von der klassischen Physik zur Quantentheorie

Um die, in den zuvor beschriebenen Experimenten gewonnenen Resultate theoretisch beschreiben zu können, musste eine gänzlich neue Formulierung der Physik entstehen. Bei der mathematischen Konstruktion dieser neuen Theorie stand man vor dem Dilemma, dass man einerseits daran gebunden ist, jedes physikalische Experiment in den Begriffen der klassischen Physik zu beschreiben, andererseits benötigte man neue, nicht klassische Elemente innerhalb der Theorie, um z.B. den Welle-Teilchen-Dualismus oder nichtlokale Eigenschaften von Teilchen adäquat zu beschreiben. Am Ende dieser Entwicklung stand ein vollkommen neues Gerüst einer mathematischen Beschreibung, welches z.B. mittels der "Kopenhagener Deutung der Quantentheorie" interpretiert und verstanden wurde.

Würde das Elektron im Wasserstoffatom ständig das Proton auf einer Bahn umkreisen, würde es elektromagnetische Strahlung abgeben, Energie verlieren und schließlich auf das Proton fallen.



Zustand eines Quantenobjektes

Richard Feynman: "I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics."




Wie kann man die Quantentheorie mathematisch beschreiben?

# Komplexe Zahlen

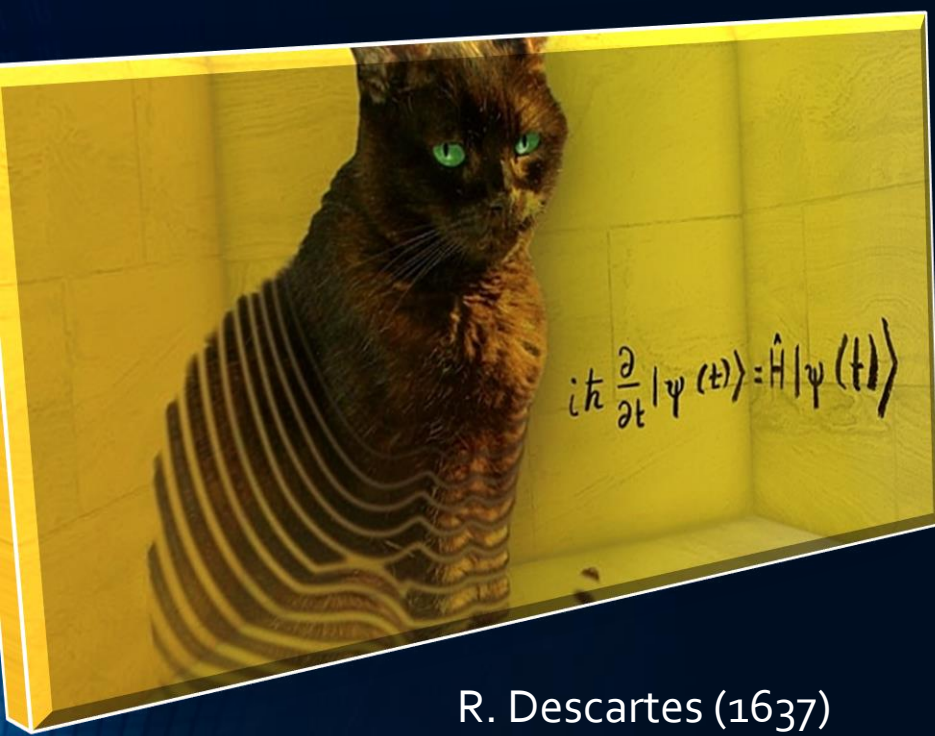
G.W. Leibniz (1702)

“...sind eine feine und wunderbare  
Zuflucht des menschlichen  
Geistes, beinahe ein Zwitterwesen  
zwischen Sein und Nichtsein”


$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

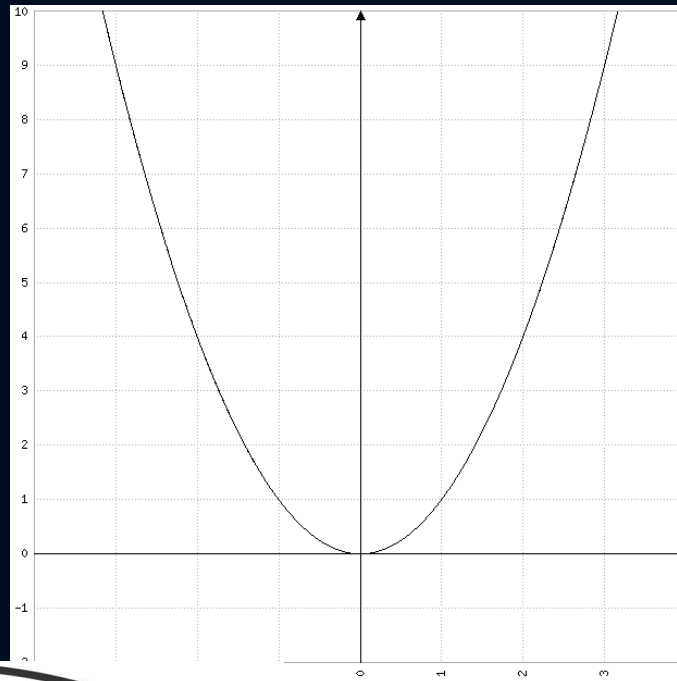
# Komplexe Zahlen

Reelle Zahlen und Imaginäre Zahlen



Welche Lösungen hat die Gleichung

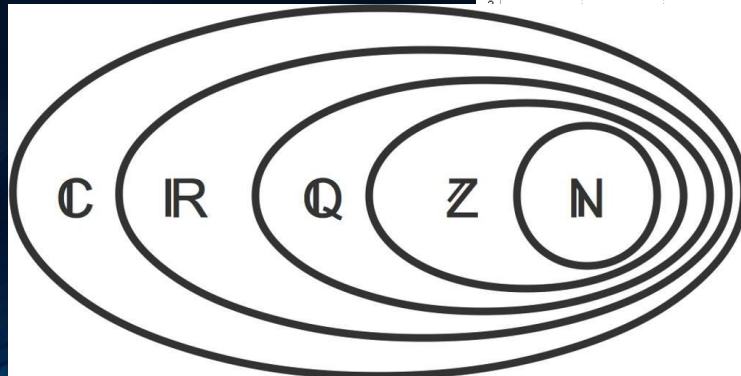
$$x^2 = x \cdot x = -1$$



R. Descartes (1637)  
Begriff der imaginären Zahl  
 $i^2 = i \cdot i = -1$

Betrag einer komplexen Zahl  
ist Reell  $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$

C.F. Gauß (1831)  
Definition komplexe  
Zahlenmenge



Die Quantentheorie stellt eine gänzlich neue Formulierung der Physik dar. Bei der mathematischen Konstruktion dieser neuen Theorie stand man vor dem Dilemma, dass man einerseits daran gebunden ist, jedes physikalische Experiment in den Begriffen der klassischen Physik zu beschreiben, andererseits benötigte man neue, nicht klassische Elemente innerhalb der Theorie, um z.B. den Welle-Teilchen-Dualismus oder nichtlokale Eigenschaften von Teilchen äquivalent zu beschreiben. Am Ende dieser Entwicklung stand ein vollkommen neues Gerüst einer mathematischen Beschreibung, welches mittels der komplexwertigen Zahlen beschrieben wurde.

# Superpositionen von Eigenzuständen

## Schrödingers Katze



Figure: Theoretische Versuchsanordnung des Gedankenexperiments.

In einem geschlossenen Kiste befindet sich ein instabiler Atomkern, der innerhalb einer bestimmten Zeitspanne mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zerfällt. Im Falle eines Zerfalls werde Giftgas freigesetzt, was eine im Raum befindliche Katze tötet. Bevor ein Beobachter die Kiste öffnet, schwebt der Zustand  $\psi$  der Katze zwischen den Eigenzuständen ' $\psi_1 := \text{Lebend}$ ' und ' $\psi_2 := \text{Tot}$ '.

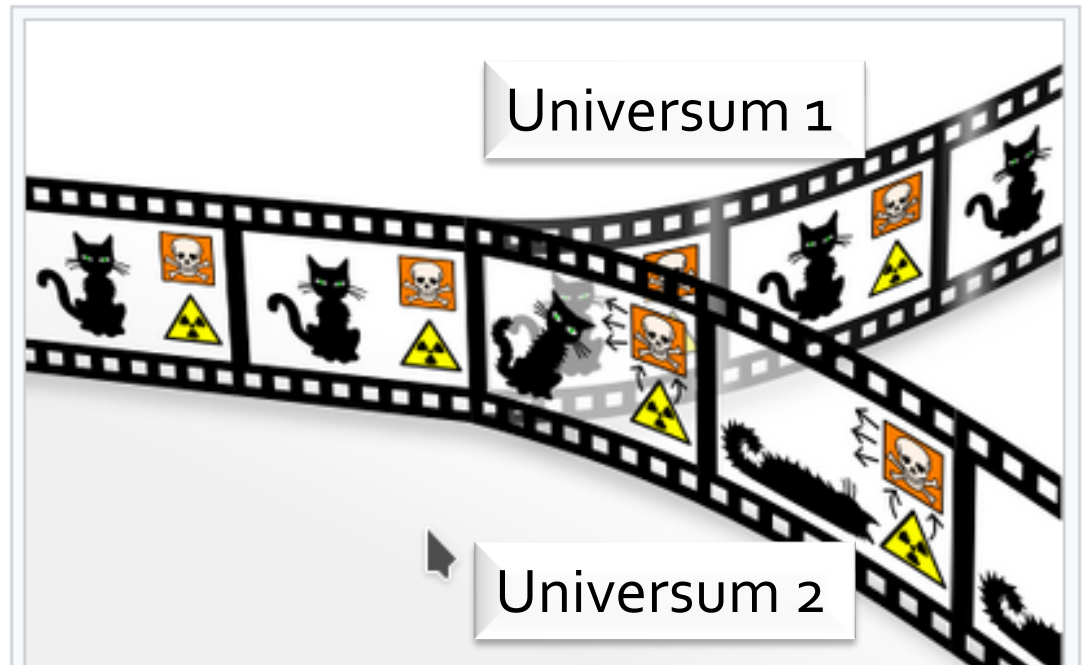
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2)$$

# Superpositionen von Eigenzuständen

## Schrödingers Katze



Figure: Theoretische Versuchsanordnung des Gedankenexperiments.



Die „Viele-Welten“- Interpretation der Quantentheorie von Hugh Everett ist von der gewöhnlich benutzten „Kopenhagener Deutung“ insofern unterschiedlich, als das sie die Messung des Quantenzustandes nicht als Aufenthaltswahrscheinlichkeit und Kollaps der Zustandes auffasst, sondern bei jeder Messung teilt sich das Universum und jeder der Eigenzustände existiert getrennt voneinander weiter.

# Quantisierte Messgrößen

## Beispiel: Das Wasserstoffatom

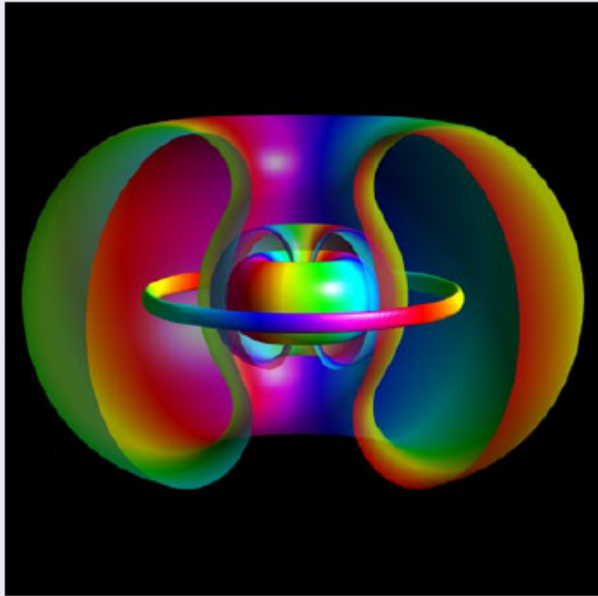


Figure:

Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Wasserstoffatom

( $n=4, l=2, m=2$ ). Quelle: Bernd Thaller,

Visual Quantum Mechanics

Der Zustand eines Elektrons im Wasserstoffatom wird mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung berechnet. Die messbaren Eigenzustände des Elektrons ( $\psi_{nlm}(\vec{r})$ ) sind durch ihre Quantenzahlen ( $n, l, m$ ) quantisiert, d.h. Messgrößen wie z.B. die Energie können nur diskrete Werte annehmen. Der allgemeine Elektronenzustand ergibt sich durch Überlagerung (Superposition) der Eigenzustände ( $a_{nlm} \in \mathbb{C}$ ).

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l a_{nlm} \psi_{nlm}$$

**n:** Hauptquantenzahl, **l:** Drehimpulsquantenzahl

**m:** magnetische Quantenzahl (Orientierung des Drehimp.)



# Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

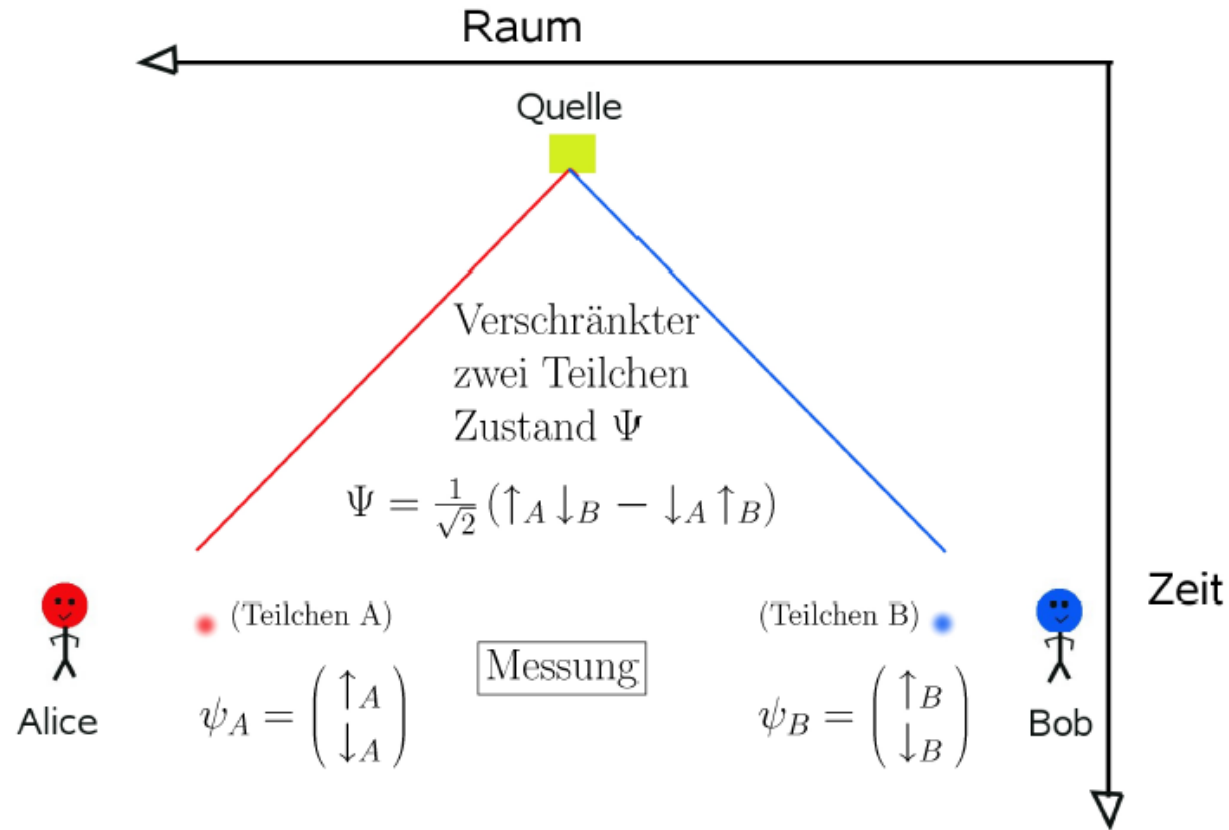


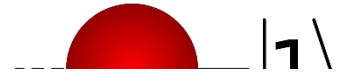
Figure: EPR Gedankenexperiment: Obwohl es keine messbare Wechselwirkung zwischen den Teilchen A und B gibt, sind diese dennoch mittel einer Quantenverschränkung verbunden.

# Anwendungen der Quantenverschränkung

## Quantencomputer

Ein Quantencomputer basiert auf einem Prozessor, dessen Funktion auf den Gesetzen der Quantenmechanik beruht. In einem klassischen Computer werden sämtliche Informationen in „Bits“ (entweder Null oder Eins)

Qubit durch Verschränkung der Eigenzustände

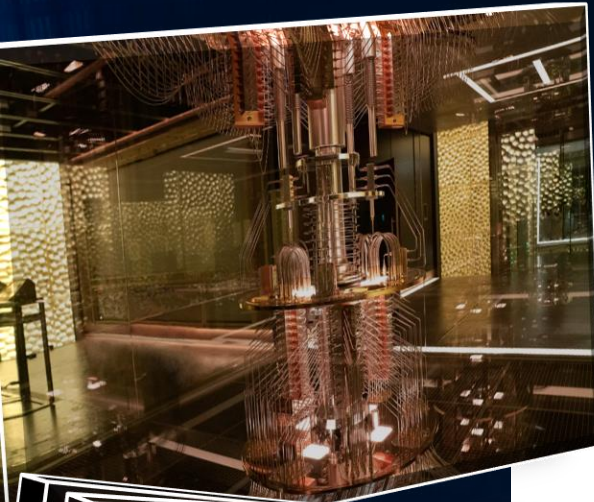


### Quantum Computer and Quantum Game Theory

2002, J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou and R. Han  
*Experimental realization of quantum games on a quantum computer*, PRL 88 (137902)

2007, R. Prevedel, A. Stefanov, P. Walther and A. Zeilinger  
*Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer*, New Journal of Physics 9 (205)

2008, P. Benicio, Melo de Sousa, R. V. Ramos  
*Multiplayer Quantum Games and its Application as Access Controller in Architecture of Quantum Computers*, arXiv:0802.3684v2



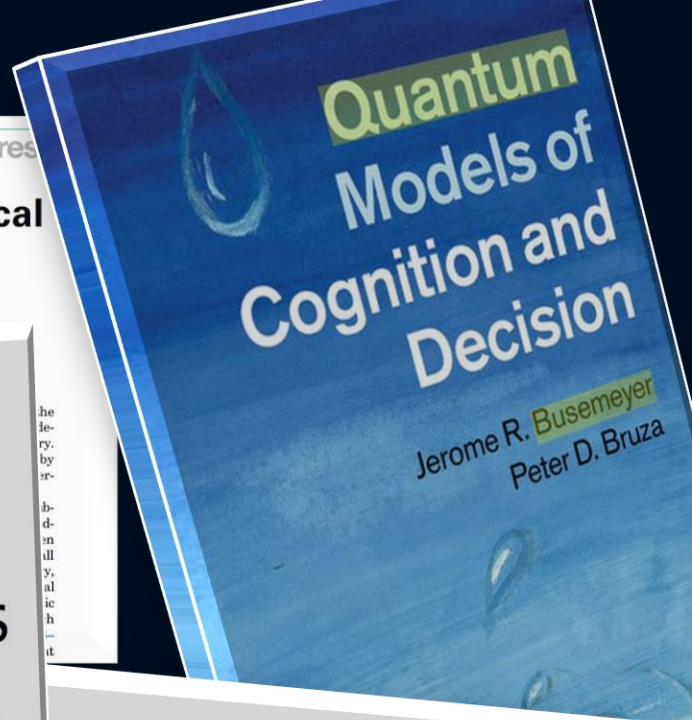
Science-Fiction Miniserie

DEVS

Raum aller denkbaren komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Teile) durch Verschränkung der Eigenzustände durch kulturelle oder andere Faktoren werden.

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)  
**SCIENCE @ DIRECT®**  
 Journal of Mathematical Psychology 50 (2006) 220–241  
[www.elsevier.com/locate/jmp](http://www.elsevier.com/locate/jmp)  
**Journal of Mathematical Psychology**  
**Quantum dynamics of human decision-making**  
 Jerome R. Busemeyer<sup>\*</sup>, Zheng Wang, James T. Townsend  
 Indiana University, USA  
 December 2004; received in revised form 11 January 2006  
 available online 15 March 2006

**Feature Review**  
**Quantum cognition: a new theoretical approach to psychology**  
 Peter D. Bruza<sup>1</sup>, Zheng Wang<sup>2</sup>, and Jerome R. Busemeyer<sup>3</sup>  
<sup>1</sup>Information Systems School, GPO Box 2434, Queensland University of Technology, Brisbane  
<sup>2</sup>School of Communication, 3145 Derby Hall, Indiana University  
<sup>3</sup>Department of Psychology, Indiana University  
 What type of decisions humans make under conditions of uncertainty have been a topic of interest for many years. In the past, the success of a theory depends on its ability to always conform to the data. However, the recent development of quantum probability theory. These quantum models provide a new way of modeling human decision-making.



Emmanuel Haven • Andrei Khrennikov  
 Editors  
**The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science**  
 Applications and Grand Challenges

- The *Quantum Penny Flip Game*  
 1999, D. A. Meyer, *Quantum strategies*, PRL 82 (1052)
- The *Quantum Prisoner's Dilemma*  
 1999, J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, *Quantum Games and Quantum Strategies*, PRL 83 (3077)
- The *Quantum Battle of Sexes*  
 2001, L. Marinatto and T. Weber, *A Quantum Approach To Static Games Of Complete Information*, Physics Letters A 272
- The *Quantum Coordination Game*  
 2003, B. A. Huberman and T. Hogg, *Quantum Solution of Coordination Problems*, Quantum Information Processing 2(6)
- The *Quantum Ultimatum Game*  
 2005, R. Vilela Mendes, *The Quantum Ultimatum Game*, Quantum Information Processing 4(1)

Journal of Mathematical Psychology 53 (2009) 303–305  
 Contents lists available at ScienceDirect  
**Journal of Mathematical Psychology**  
 journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jmp](http://www.elsevier.com/locate/jmp)  
**ELSEVIER**

Editorial  
**Introduction to the special issue on quantum cognition**  
 Peter Bruza<sup>a</sup>, Jerome R. Busemeyer<sup>b,\*</sup>, Liane Gabora<sup>c</sup>  
<sup>a</sup> Queensland University of Technology, Faculty of Information Technology, GPO Box 2434, Brisbane, Australia  
<sup>b</sup> Indiana University, Department of Psychology, Bloomington, IN, United States  
<sup>c</sup> University of Saskatchewan, Department of Psychology, Kelowna, Canada

# Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

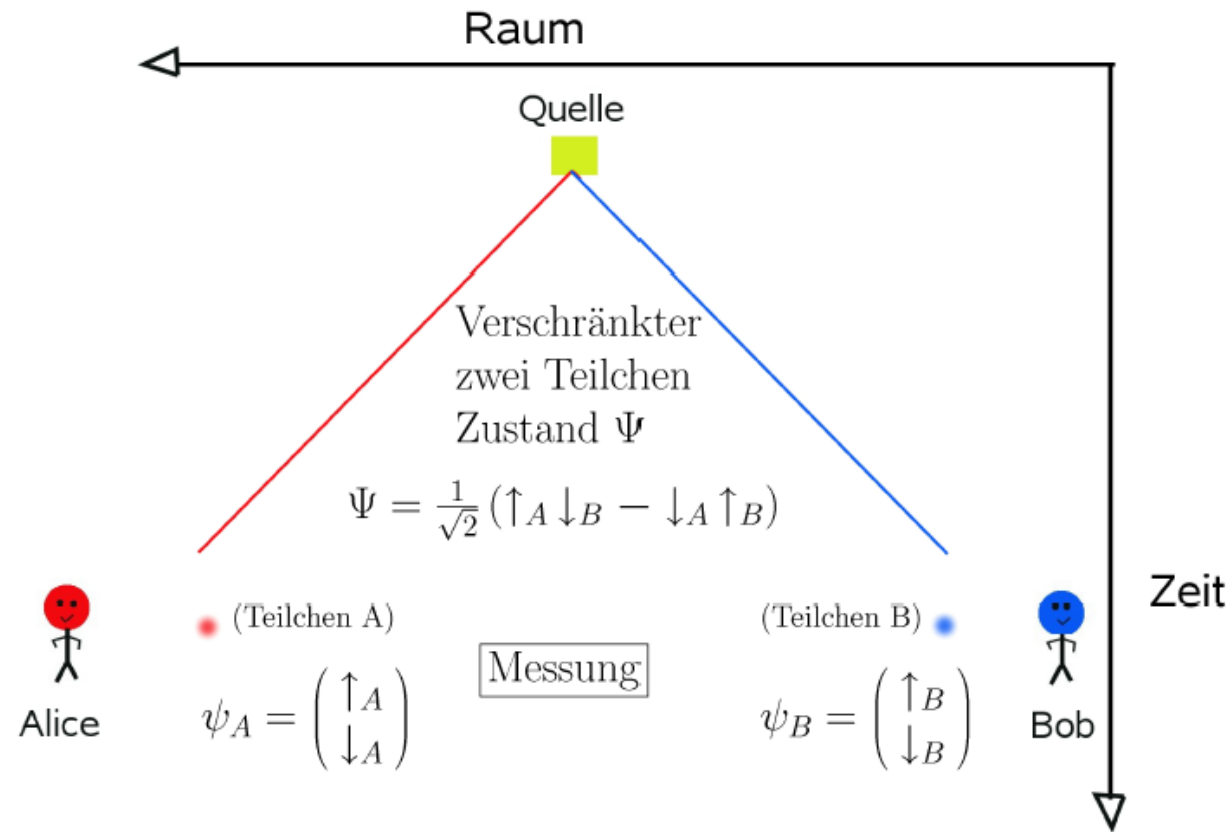


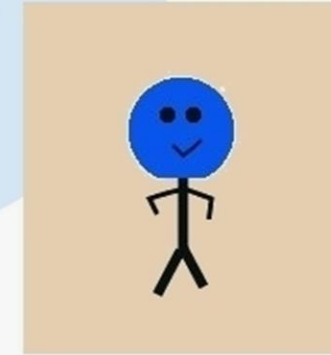
Figure: EPR Gedankenexperiment: Obwohl es keine messbare Wechselwirkung zwischen den Teilchen A und B gibt, sind diese dennoch mittel einer Quantenverschränkung verbunden.

# Denkwege im Gefangenendilemma

If A betrays me it is better  
if I also betray A.

If A is silent, it is better  
if I betray A

Complex space  
of all possible ways of thinking



If B betrays me it is better  
if I also betray B

If B is silent, it is better  
if I betray B



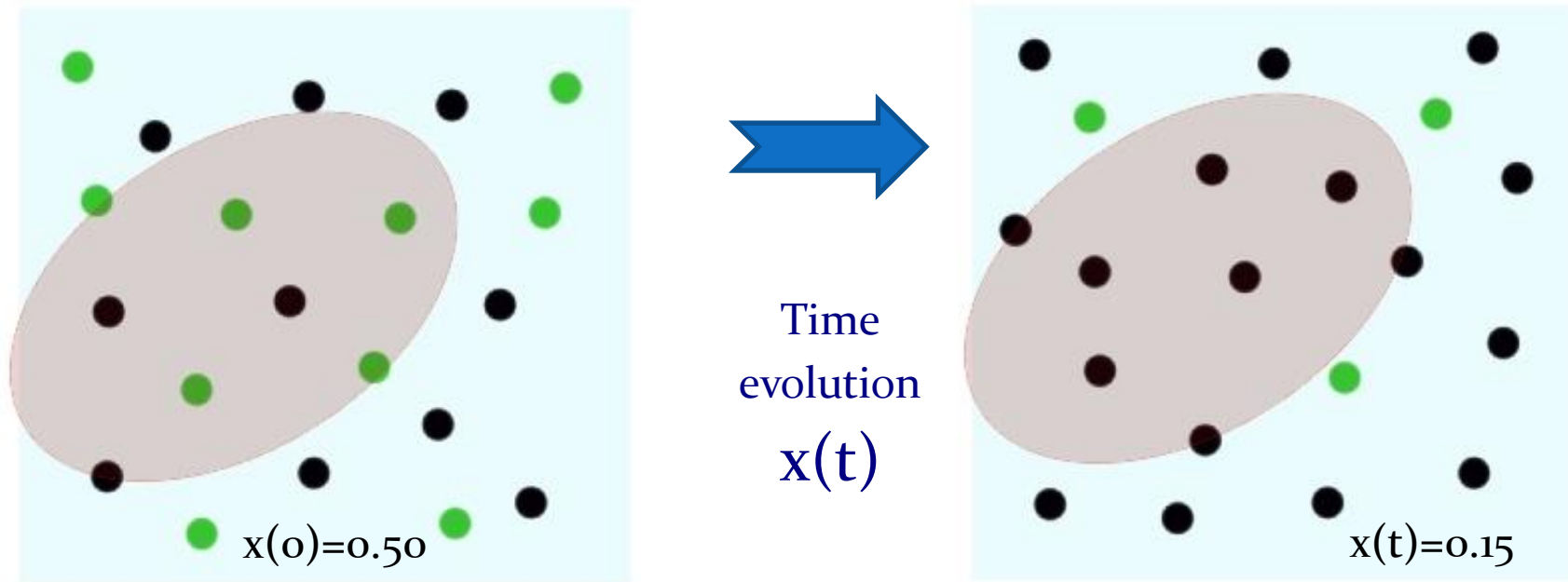
be silent

betray B

	be silent	betray A
A\B	C	D
C	$(-1, -1)$	$(-5, 0)$
D	$(0, -5)$	$(-4, -4)$

## Introduction

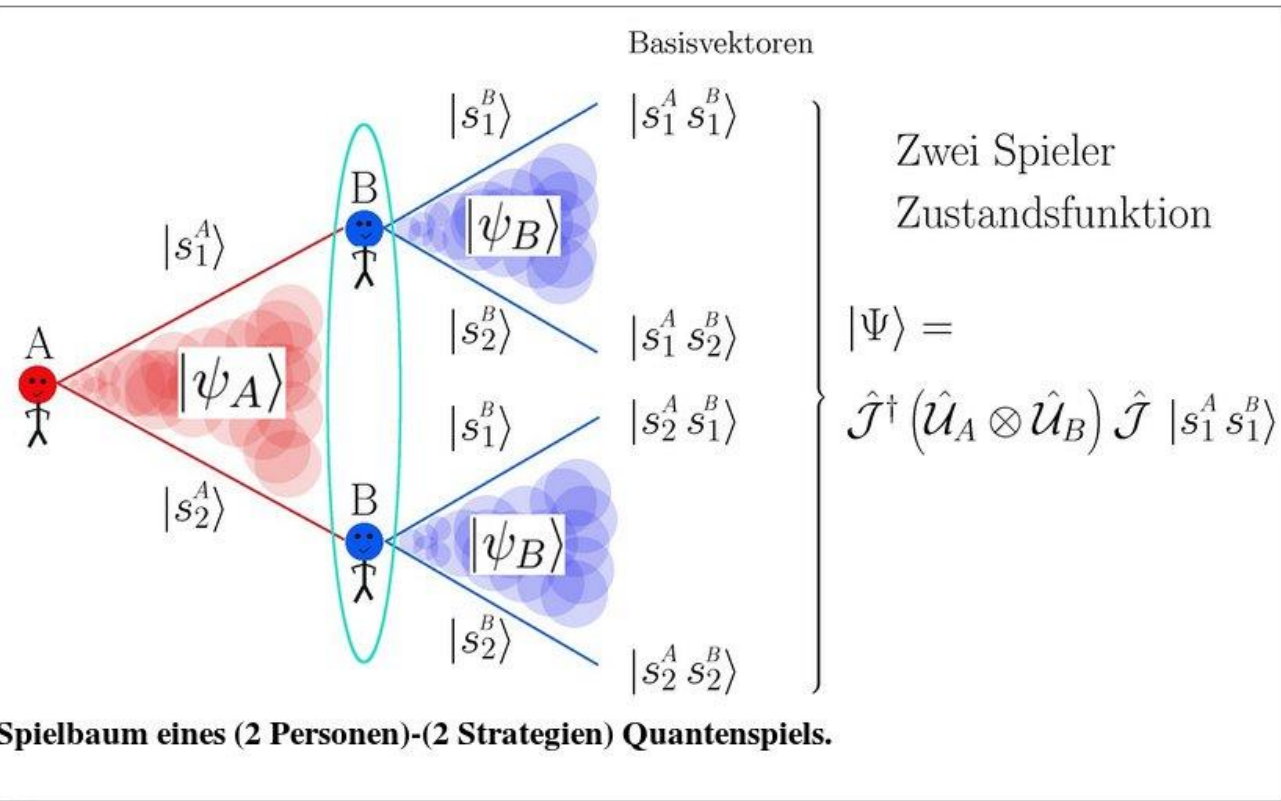
Die Quanten-Spieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Akteure wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden.



Strategies of each node (of each player): (green , black),  $x(t)$  : Fraction of player with strategy „green“ as a function of time  $t$   
Grey region: Group dependent collective cultural or moral standard

# Evolutionäre Quantenspieltheorie

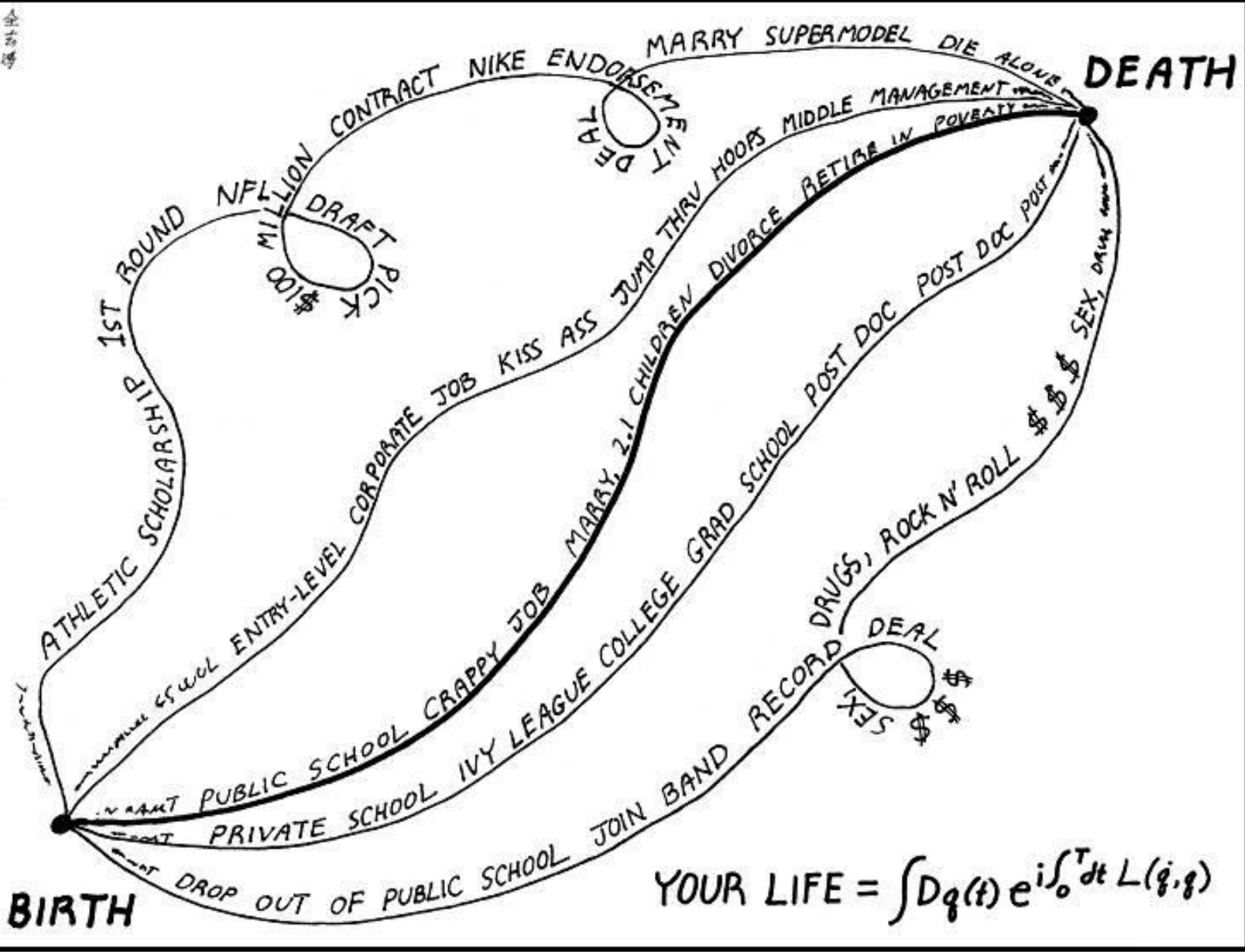
*Zeitliche Entwicklung einer ganzen Population von Spielern (Akteuren, Entscheidern)*



Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.

Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungszustand eines Spielers  $\mu = A, B$ , bevor dieser die endgültige Wahl der reinen Strategie getroffen hat, als eine komplexwertige Größe (einen sog. Spinor  $|\psi\rangle_A$  bzw.  $|\psi\rangle_B$ ) in einem zweidimensionalen Zustandsraum, dem sogenannten Hilbertraum  $\mathcal{H}_A$  bzw.  $\mathcal{H}_B$ . Der Zwei-Spielerzustand  $|\Psi\rangle$  ist ein

Durch eine quantentheoretische Verschränkung der imaginären Entscheidungswege innerhalb eines Akteur Netzwerks kann es einer Population gelingen einer Dilemma-ähnlichen Situation zu entkommen, falls der Wert der Verschränkung einen bestimmten Schwellenwert überschreitet.



Parallelwelten Interpretation (H.Everett)

$|s_1^A s_1^B\rangle$



Universum 1

$|s_1^A s_2^B\rangle$



Universum 2

$|s_2^A s_1^B\rangle$



Universum 3

$|s_2^A s_2^B\rangle$



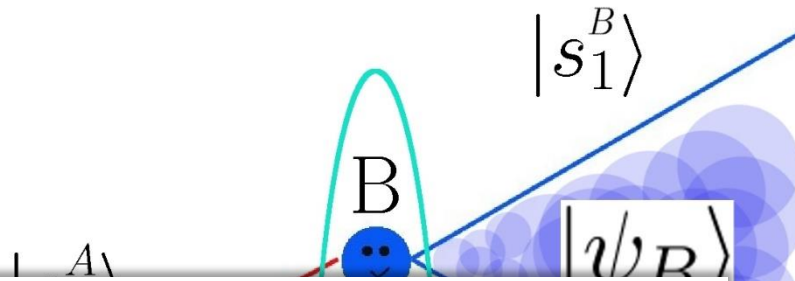
Universum 4

# The Path Integral Formulation of Your Life



# Die verschränkte Spezies-Zustandsfunktion

$$|\Psi\rangle$$



the Wheeler-DeWitt equation says

$$\hat{H}(x)|\psi\rangle = 0$$

where  $\hat{H}(x)$  is the Hamiltonian constraint in quantized general relativity and  $|\psi\rangle$  stands for the wave function of the universe.

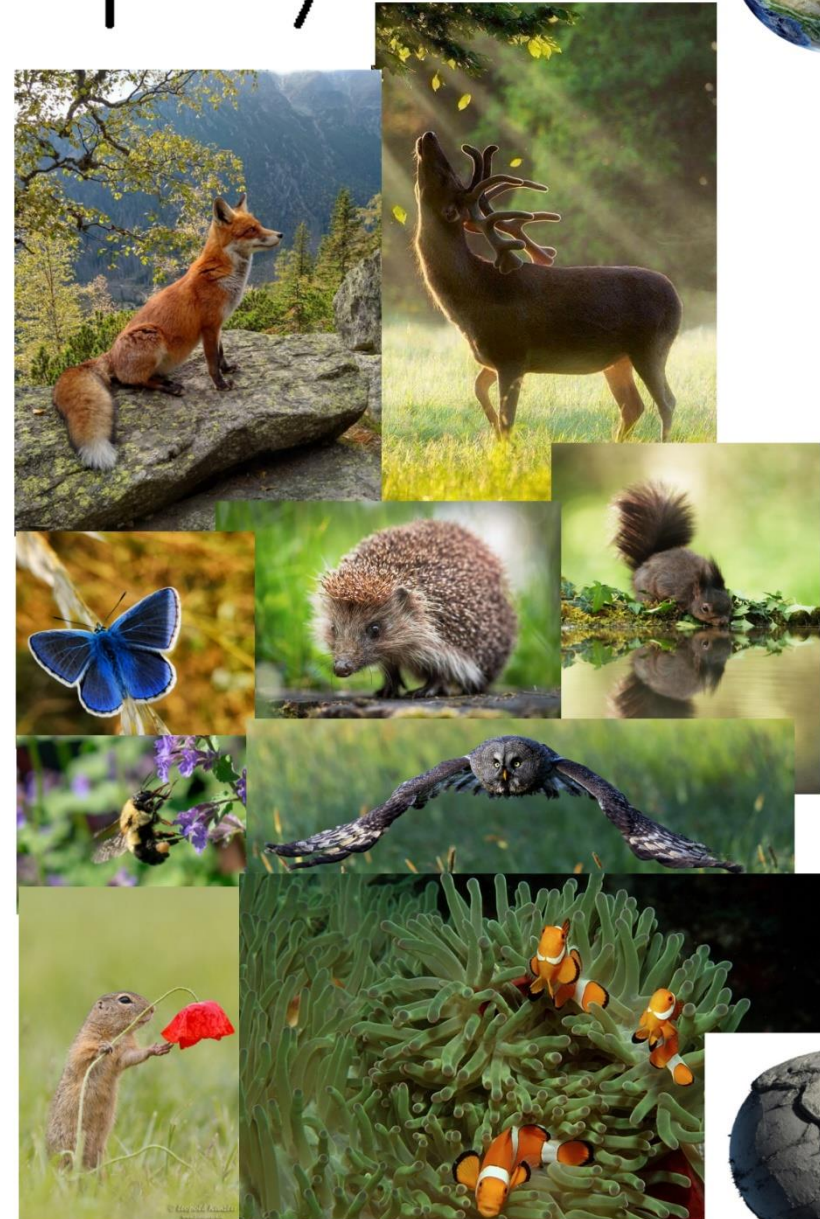
## Universal wavefunction

From Wikipedia, the free encyclopedia

The **universal wavefunction** (or **wave function**), a term introduced by Hugh Everett in his PhD thesis<sup>[1]</sup> *The Theory of the Universal Wave Function*, informs a core concept in the relative state interpretation<sup>[2][3]</sup> or many-worlds interpretation<sup>[4][5]</sup> of quantum mechanics.

$$|\psi_B\rangle$$

$$|s_2^B\rangle$$



# Definition: Dominant Strategies and Nash Equilibrium

In the following two  
 $N$  player) - ( $m$  s  
 consists of the cho  
 -th player

Nash equilibrium at  $(s_2^A, s_2^B)$ :

$$\begin{aligned} \$^A(s_2^A, s_2^B) = \$_{22}^A &\geq \$^A(s^A, s_2^B) \quad \forall s^A \in \mathcal{S}^A = \{s_1^A, s_2^A\} \\ \$^B(s_2^A, s_2^B) = \$_{12}^B &\geq \$^B(s_2^A, s^B) \quad \forall s^B \in \mathcal{S}^B = \{s_1^B, s_2^B\} \end{aligned}$$

ain to a *simultaneous* ( $s^1, s^2, \dots, s^N$ )  $\in \mathcal{S}$   
 the exception of the  $\mu$   
 $= \mathcal{S}^\mu \times \mathcal{S}^{-\mu}$ .

A strategy  
 holds for

A Nash equilibrium is therefore a combination of strategies from which no player would get an advantage if he/she deviated from his strategy - he/she would not receive a larger payoff. It is true that every equilibrium in dominant strategies is also a Nash equilibrium.

condition

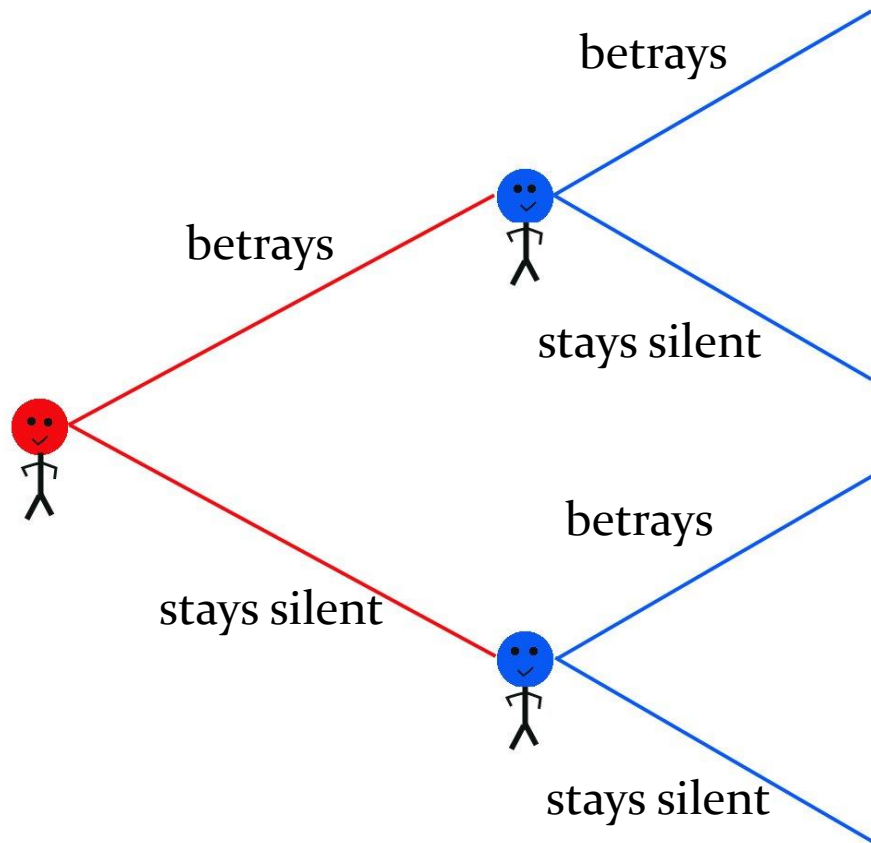
A strategy combination  $s^* = (s^{1*}, s^{2*}, \dots, s^{N*})$  is called a Nash equilibrium if the following condition holds for all  $\mu \in \mathcal{I}$ :

Nash equilibrium:

$$\$^\mu(s^{\mu*}, s^{-\mu*}) \geq \$^\mu(s^\mu, s^{-\mu}) \quad \forall \mu \in \mathcal{I} \text{ und } \forall s^\mu \in \mathcal{S}^\mu$$

# The prisoner's dilemma

	B	S
B	$(-7, -7)$	$(-1, -9)$
S	$(-9, -1)$	$(-3, -3)$



Bonnie and Clyde are caught after a failed bank robbery and placed in different cells. If both are silent, the public prosecutor can only put them behind bars for three years for illegal possession of weapons. However, if one of them betrays the other, the confessing witness will only be put behind bars for a year as a witness for the prosecution - the non-confessing will then have to go to prison for nine years. If both confess, they have to serve seven years.

# The Nash Equilibrium in the Prisoner's Dilemma is a dominant strategy

	Spieler B Gestehe S <sub>1</sub>	Spieler B Gestehe nicht S <sub>2</sub>
Spieler A Gestehe S <sub>1</sub>	(-7, -7)	(-1, -9)
Spieler A Gestehe nicht S <sub>2</sub>	(-9, -1)	(-3, -3)

Player A:  $\$^A: S^A \times S^B \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\$^A(S_1, S_1) = -7 \geq -9 = \$^A(S_2, S_1)$$

$$\$^A(S_1, S_2) = -1 \geq -3 = \$^A(S_2, S_2)$$

Player B:  $\$^B: S^A \times S^B \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\$^B(S_1, S_1) = -7 \geq -9 = \$^B(S_1, S_2)$$

$$\$^B(S_2, S_1) = -1 \geq -3 = \$^B(S_2, S_2)$$

# Paths of thought in the prisoner's dilemma

If A betrays me it is better if I also betray A.

If A is silent, it is better if I betray A

Complex space of all possible ways of thinking



If B betrays me it is better if I also betray B

If B is silent, it is better if I betray B



be silent

betray B

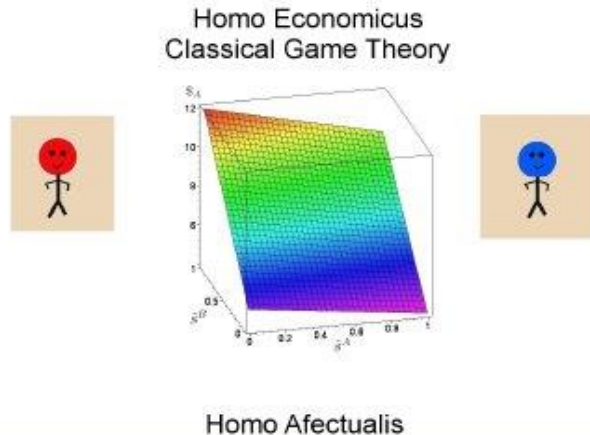
	be silent	betray A
A\B	C	D
C	$(-1, -1)$	$(-5, 0)$
D	$(0, -5)$	$(-4, -4)$

## Beyond Homo Economicus

Quantum Game Theory  
Entanglement    Quantum Strategies  
Homo Sociologicus    Homo Transcendentalis

$$|\Psi\rangle$$

Extended models of classical evolutionary game theory (e.g. [10, 9])



The final 2-player quantum state:

$$|\Psi\rangle = \hat{\mathcal{J}}^\dagger \left( \hat{U}_A \otimes \hat{U}_B \right) \hat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle$$

$\hat{\mathcal{J}}(\gamma)$ : Entangling operator

$\hat{\mathcal{J}}^\dagger(\gamma)$ : Disentangling operator

$\gamma \in [0, \pi]$ : Strength of entanglement

$\hat{U}_A$ : Decision Operator for player A

$\hat{U}_B$ : Decision Operator for player B

# Nash equilibria in the game of deer hunting

	Spieler B Hasen jagen	Spieler B Hirsch jagen
Spieler A Hasen jagen	$(2, 2)$	$(4, 0)$
Spieler A Hirsch jagen	$(0, 4)$	$(5, 5)$

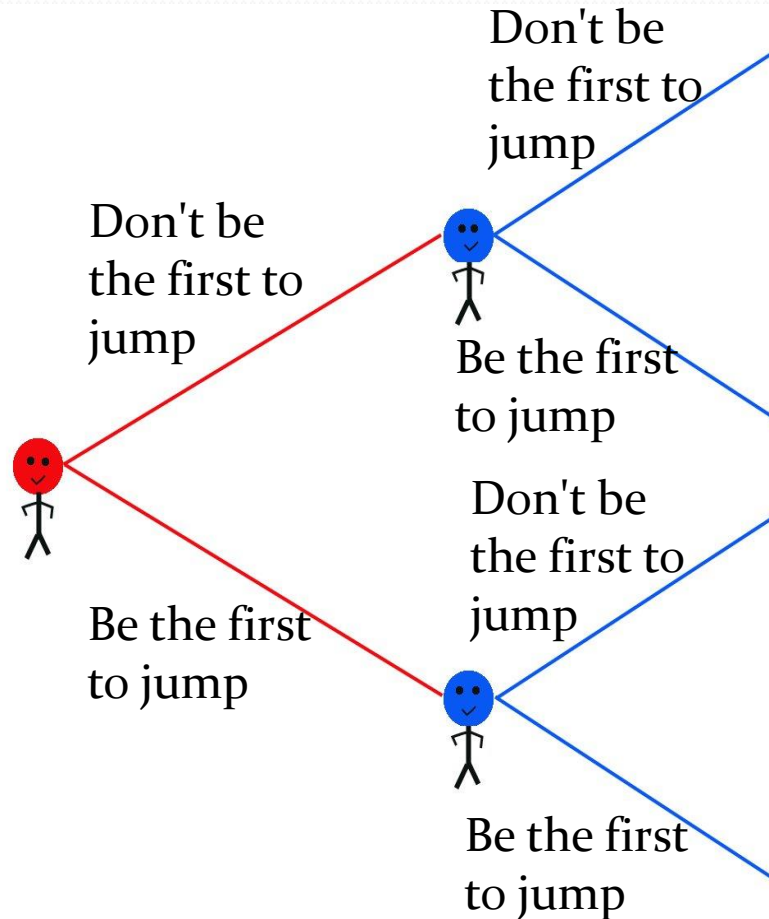
The table shows the payoffs for two players, A and B, in a game of deer hunting. The strategies are 'Hasen jagen' (hunt rabbits) and 'Hirsch jagen' (hunt deer). The payoffs are given as (Player A, Player B).

- If both hunt rabbits, they each get 2 points:  $(2, 2)$ .
- If both hunt deer, they each get 5 points:  $(5, 5)$ .
- If one hunts rabbits and the other hunts deer, the rabbit hunter gets 0 points and the deer hunter gets 4 points:  $(0, 4)$  if A hunts rabbits and B hunts deer, or  $(4, 0)$  if A hunts deer and B hunts rabbits.

Blue arrows indicate Player B's best responses: from  $(2, 2)$  to  $(0, 4)$  and from  $(4, 0)$  to  $(5, 5)$ . Red arrows indicate Player A's best responses: from  $(2, 2)$  to  $(5, 5)$  and from  $(0, 4)$  to  $(5, 5)$ . The only Nash equilibrium is at  $(5, 5)$ .

# The chicken game (playing with doom)

	don't jump	jump
don't jump	$(-1, -1)$	$(2, 0)$
jump	$(0, 2)$	$(1, 1)$



Based on the 1955 film by Nicholas Ray "*Rebel Without a Cause*" (leading actor "James Dean"): Jimbo and his archenemy Buzz take a test of courage and speed towards a cliff in their cars. The one who is the first to jump out of his car is the coward (chicken). The benefit achieved can be quantified, for example, as indicated above.



# Definition: Mixed Strategies

In the following we will generalize the definition of a game by extending the set of *pure strategies*  $\mathcal{S}$  to the set of *mixed strategies*  $\tilde{\mathcal{S}}$ . Such a game is known as the *mixed extension of a simultaneous (N player) - (m strategies) game in strategic form with a payoff*.

The set of mixed strategies of the players  $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}^1 \times \tilde{\mathcal{S}}^2 \times \dots \times \tilde{\mathcal{S}}^N$  is made up of the individual sets of the players' mixed strategies. The set of mixed strategies of the player  $\mu \in \mathcal{I}$  ( $\tilde{\mathcal{S}}^\mu$ ) can be used as a mathematical generalization of the set of pure strategies  $\mathcal{S}^\mu$ , where the individual elements of the set of mixed strategies of the player  $\mu$  consist of  $m_\mu$  real-valued numbers that are subject to the following normalization conditions:

$$\tilde{\mathcal{S}}^\mu = \left\{ (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu, \dots, \tilde{s}_{m_\mu}^\mu) \mid \sum_{i=1}^{m_\mu} \tilde{s}_i^\mu = 1, \tilde{s}_i^\mu \geq 0, i = 1, 2, \dots, m_\mu \right\}$$

The individual values  $\tilde{s}_i^\mu$  can be interpreted as the probability of the player  $\mu$  to choose the strategy  $i$ . Using the mixed strategies, a mixed payoff function of the players can be defined as follows:

$$\tilde{\$} = (\tilde{\$}^1, \tilde{\$}^2, \dots, \tilde{\$}^N) : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}^N, \text{ where } \tilde{\$}^\mu(\tilde{s}^1, \tilde{s}^2, \dots, \tilde{s}^N) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \dots \sum_{i_N=1}^{m_N} \$^\mu(s_{i_1}^1, s_{i_2}^2, \dots, s_{i_N}^N) \prod_{\nu=1}^N \tilde{s}_{i_\nu}^\nu$$

# The mixed Strategy Nash-Equilibrium

The following illustrates the concept of mixed extension for the case of a (2 player) - (2 strategies) game. The set of mixed strategies of the player A ( $\tilde{\mathcal{S}}^A$ ) and B ( $\tilde{\mathcal{S}}^B$ ) can be considered as a mathematical generalization of the set of pure strategies ( $\mathcal{S}^A$  and  $\mathcal{S}^B$ ). The individual elements of the set of mixed strategies of a player  $\mu = A, B$  ( $\tilde{s}^\mu = (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu) \in \tilde{\mathcal{S}}^\mu$ )

consists of  $\tilde{\mathcal{S}}^\mu : (\tilde{\mathcal{S}}^A \times \tilde{\mathcal{S}}^B) \rightarrow \mathbb{R}$

can be interpreted

( $\tilde{s}_1^\mu$ ) or

$$\tilde{\mathcal{S}}^\mu((\tilde{s}_1^A, \tilde{s}_2^A), (\tilde{s}_1^B, \tilde{s}_2^B)) = \$_{11}^\mu \tilde{s}_1^A \tilde{s}_1^B + \$_{12}^\mu \tilde{s}_1^A \tilde{s}_2^B + \$_{21}^\mu \tilde{s}_2^A \tilde{s}_1^B + \$_{22}^\mu \tilde{s}_2^A \tilde{s}_2^B$$

(2 × 2) game:

$$\Gamma := (\{A, B\}, \mathcal{S}^A \times \mathcal{S}^B, \hat{\mathcal{S}}_A, \hat{\mathcal{S}}_B)$$

Set of pure strategies of player A and B:

$$\mathcal{S}^A = \{A, B\}, \mathcal{S}^B = \{B, A\}$$

Player A and B:

Payoff matrix for player A and B:

$$\hat{\mathcal{S}}_A = \begin{pmatrix} \$_{11}^A & \$_{12}^A \\ \$_{21}^A & \$_{22}^A \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_B = \begin{pmatrix} \$_{11}^B & \$_{12}^B \\ \$_{21}^B & \$_{22}^B \end{pmatrix}$$

An interior (mixed strategy) NE ( $\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*}$ ) is a special case of condition (7), as the partial derivative of the mixed strategy payoff function vanishes at the value of the interior NE:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\mathcal{S}}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^A} \right|_{\tilde{s}^B = \tilde{s}^{B*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^A \in [0, 1], \tilde{s}^{B*} \in ]0, 1[ \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\mathcal{S}}^B(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^B} \right|_{\tilde{s}^A = \tilde{s}^{A*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^B \in [0, 1], \tilde{s}^{A*} \in ]0, 1[$$

# Mixed-strategy payoff function in (2x2)-games

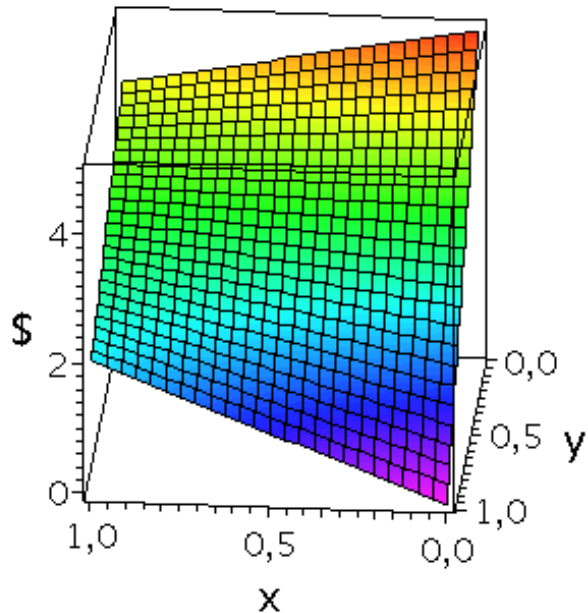
Aufgrund der Normalisierungsbedingung vereinfacht sich die gemischte Auszahlungsfunktion wie folgt:

$$\tilde{\$}^{\mu} : ([0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) = \$_{11}^{\mu} \tilde{s}^A \tilde{s}^B + \$_{12}^{\mu} \tilde{s}^A (1 - \tilde{s}^B) + \$_{21}^{\mu} (1 - \tilde{s}^A) \tilde{s}^B + \$_{22}^{\mu} (1 - \tilde{s}^A) (1 - \tilde{s}^B)$$

, wobei  $\tilde{s}^A := \tilde{s}_1^A$ ,  $\tilde{s}^B := \tilde{s}_1^B$ ,  $\tilde{s}_2^A = 1 - \tilde{s}_1^A$  und  $\tilde{s}_2^B = 1 - \tilde{s}_1^B$ .

Auszahlung an Spieler A



Payoff in the deer hunting game

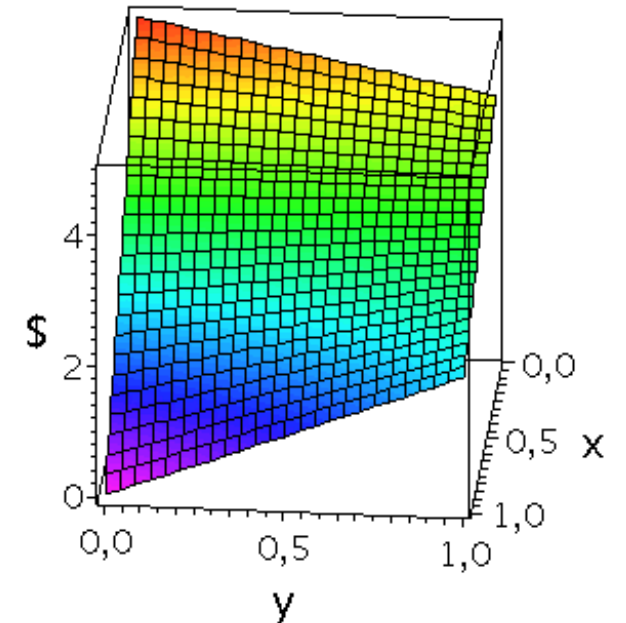
$$\tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) = \tilde{\$}^A(x, y)$$

$$\tilde{\$}^B(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) = \tilde{\$}^B(x, y)$$

$$x, y \in [0, 1]$$

	Spieler B Hasen jagen	Spieler B Hirsch jagen
Spieler A Hasen jagen	(2, 2)	(4, 0)
Spieler A Hirsch jagen	(0, 4)	(5, 5)

Auszahlung an Spieler B



# Mixed-strategy payoff function in the stag hunting game

Eine Strategienkombination  $(\tilde{s}^{A\dagger}, \tilde{s}^{B\dagger})$  ist ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Gleichgewicht in dominanten Strategien:

$$\tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^{A\dagger}, \tilde{s}^{B}) \geq \tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) \quad \forall \mu = A, B \text{ und } \tilde{s}^A, \tilde{s}^B \in [0, 1]$$

Eine Strategienkombination  $(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*})$  nennt man ein Nash-Gleichgewicht, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Nash-Gleichgewicht:

$$\tilde{\$}^A(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*}) \geq \tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^{B*}) \quad \forall \tilde{s}^A \in [0, 1]$$

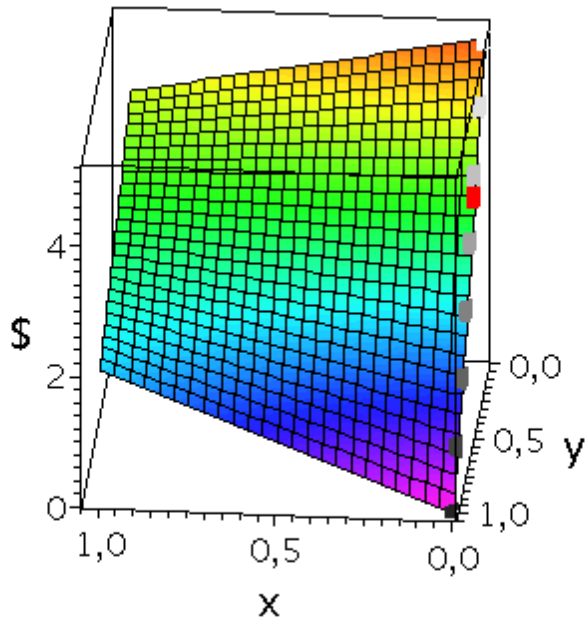
$$\tilde{\$}^B(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*}) \geq \tilde{\$}^B(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^B) \quad \forall \tilde{s}^B \in [0, 1]$$

Auszahlungsfunktion des Spielers A im Hirschjagd-Spiel

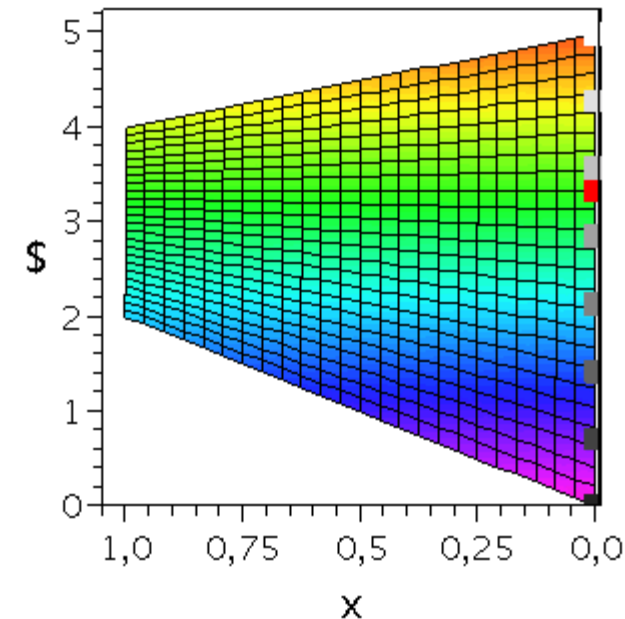
$$\tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) = \tilde{\$}^A(x, y)$$

$$x, y \in [0, 1]$$

x = 0.



x = 0.



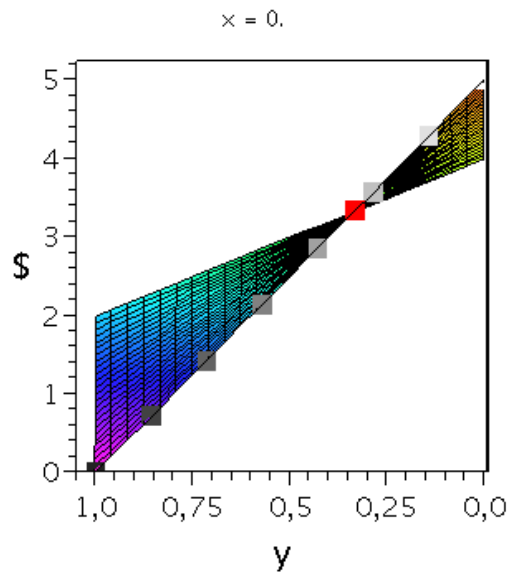
# The mixed Strategy Nash-Equilibrium in the stag hunting game

Ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichts besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfläche verschwindet. Man nennt dann ein solches Nash-Gleichgewicht  $(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*})$  ein internes Nash-Gleichgewicht bzw. ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

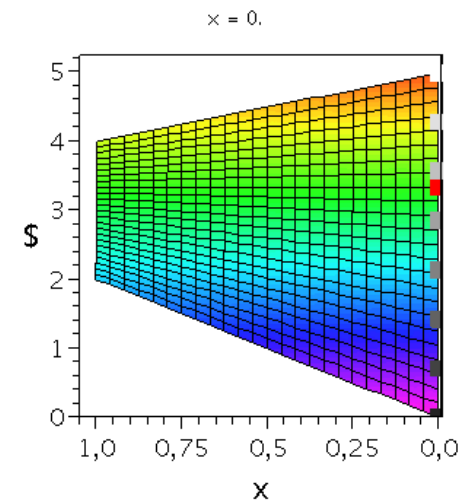
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^A} \right|_{\tilde{s}^B = \tilde{s}^{B*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^A \in [0, 1] , \tilde{s}^{B*} \in ]0, 1[$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^B(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^B} \right|_{\tilde{s}^A = \tilde{s}^{A*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^B \in [0, 1] , \tilde{s}^{A*} \in ]0, 1[$$



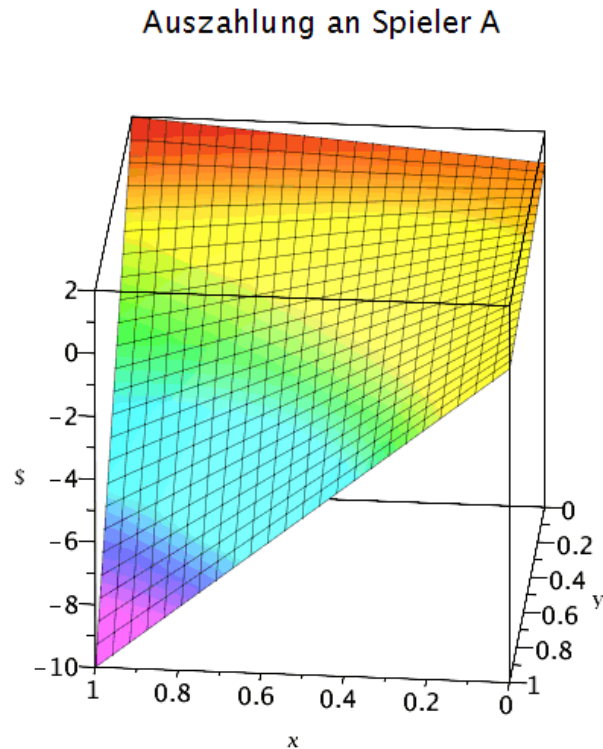
Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd-Spiel liegt bei der Strategienkombination  $(x=1/3, y=1/3)$ .



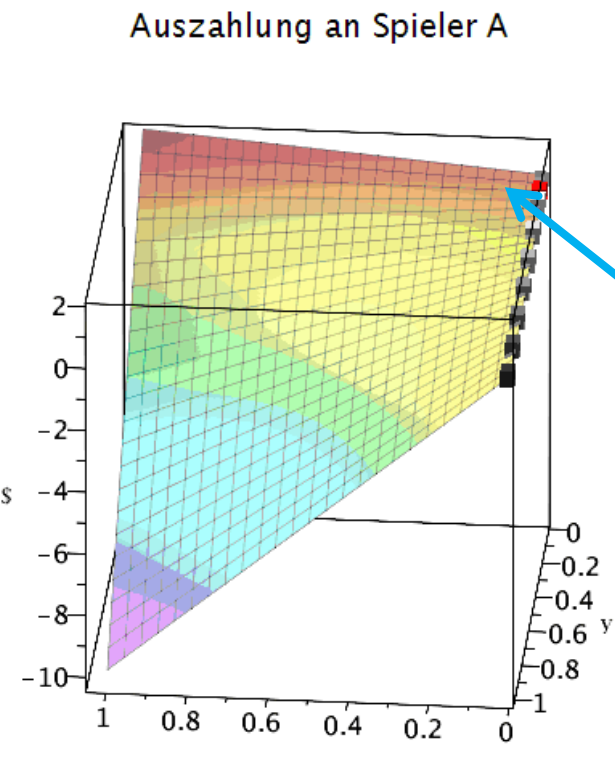
# Nash equilibria in the chicken game

Mixed payoff of player A

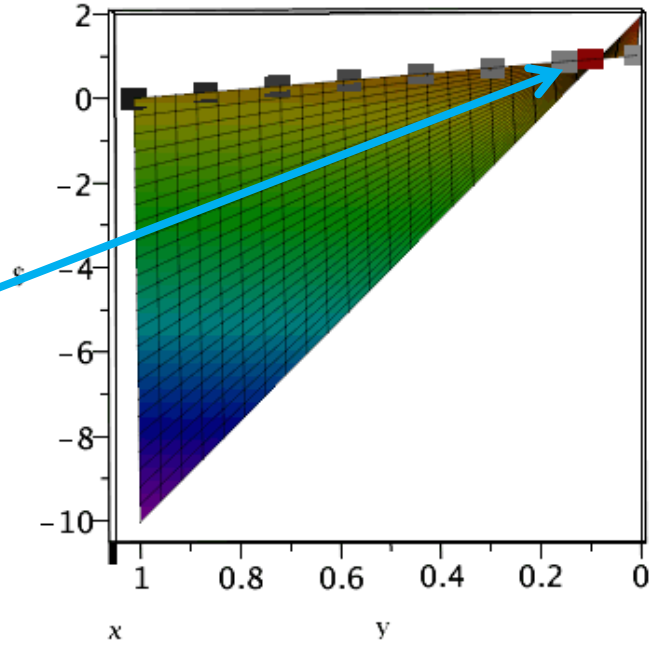
	don't jump	jump
don't jump	$(-10, -10)$	$(2, 0)$
jump	$(0, 2)$	$(1, 1)$



Auszahlung an Spieler A



Mixed strategy Nash equilibrium  
 $(x,y)=(1/11, 1/11)$

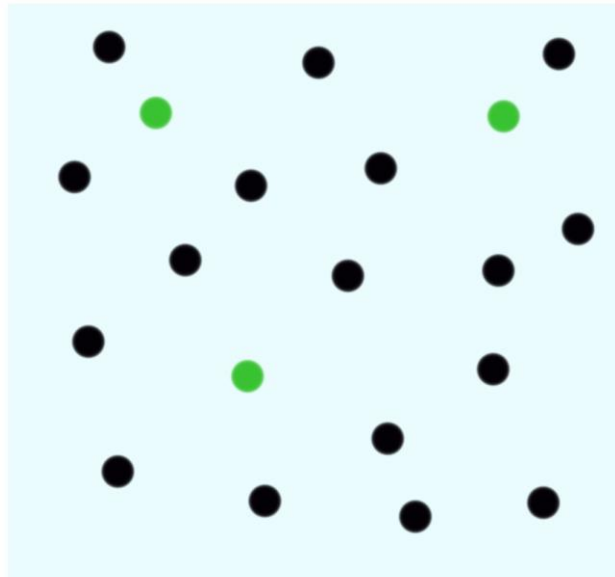


# Origins of evolutionary game theory

- The article published by Maynard Smith in 1972 (J. Maynard Smith “Game theory and the evolution of fighting”, In "On Evolution", pp. 8-28. Edingburgh University Press, Edinburgh, 1972) is generally considered to be the first game theory approach of Evolutionary Game theory. Smith describes in the article how one can extract the biological, dynamic evolution of organisms from the Nash equilibria of symmetrical (2x2) games. He shows how the dynamic evolution of the frequency distribution of organisms ends in a stable state - the so-called *evolutionarily stable strategy*.

# Evolutionary game theory (I)

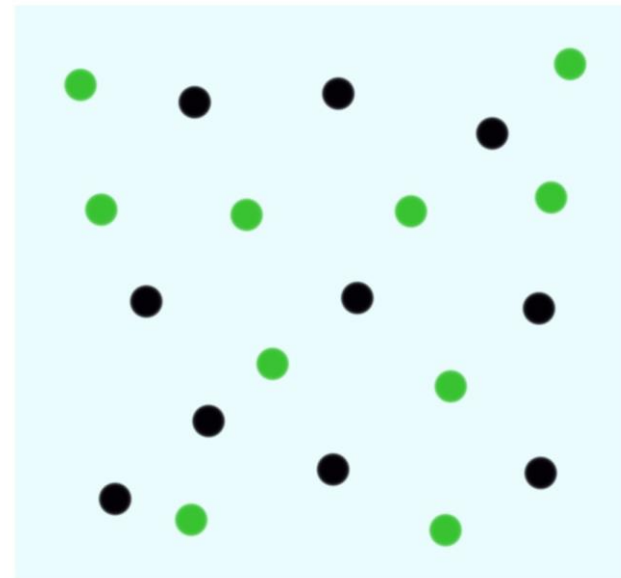
Evolutionary game theory deals with the temporal development of the strategic behavior of an entire player population over time.



$$x(0)=0.15$$



temporal  
development  
of the  
population



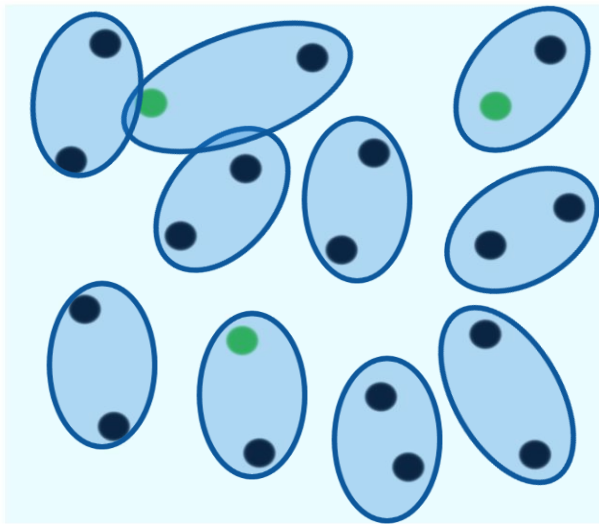
$$x(10)=0.5$$

Possible strategies: (green, black), parameter  $t$  represents the "time"  
 $x(t)$ : Fraction of players who play the "green" strategy at time  $t$ .



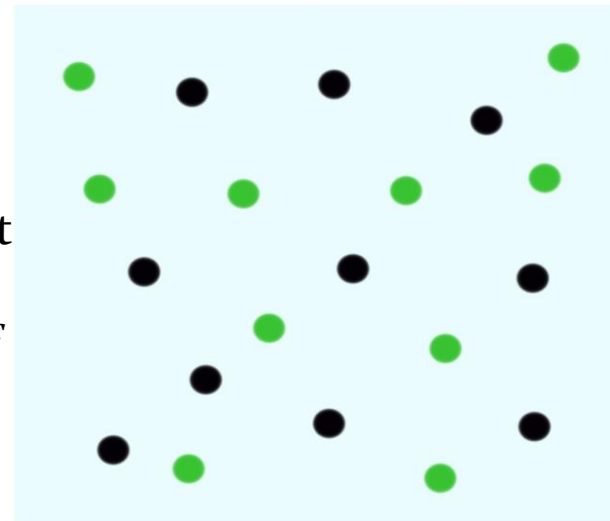
# Evolutionary game theory (II)

The individual actors within the population under consideration play a continuously repetitive game with each other, with two players meeting at random, playing the game and then switching to the next game partner.



$$x(0)=0.15$$

The initial population of players plays the game for the first time at time  $t = 0$ . On average, 15% of the players choose the **green** strategy.



$$x(10)=0.5$$

As time goes on, the **green** strategy is becoming increasingly attractive to players. At time  $t = 10$ , 50% are already playing **green**.

# Klassen symmetrischer (2x2)-Spiele

	Spieler B Strategie 1 $y=1$	Spieler B Strategie 1 $y=0$
Spieler A Strategie 1 $x=1$	$(a, a)$	$(b, c)$
Spieler A Strategie 2 $x=0$	$(c, b)$	$(d, d)$

Symmetrisches  
(2x2)-Spiel

Symmetrische (2x2)-Spiele lassen sich in drei unterschiedliche Klassen gliedern:

1. Dominante Spiele
2. Koordinationsspiele
3. Anti-Koordinationsspiele

# Replicator dynamics

We limit ourselves to symmetrical (2xM) games, i.e. two person - M strategy games. Since these are symmetrical games, all players have equal payoffs and one can assume a homogeneous population. The differential equation of the replicator dynamics describes how the individual fractions of the strategies within the population  $x_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  develop over time.

$$\dot{x}_j(t) := \frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[ \underbrace{\sum_{k=1}^M \$_{jk} \cdot x_k(t)}_{\text{Fitness of strategy } j} - \underbrace{\sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^M \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t)}_{\text{Average fitness (payoff) of the entire population}} \right]$$

with the payoff matrix  $\$_{kl}$

$$\hat{\$} = \hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$_{11} & \$_{12} & \$_{13} & \dots & \$_{1M} \\ \$_{21} & \$_{22} & \$_{23} & \dots & \$_{2M} \\ \$_{31} & \$_{32} & \$_{33} & \dots & \$_{3M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \$_{M1} & \$_{M2} & \$_{M3} & \dots & \$_{MM} \end{pmatrix}$$

**Fitness of strategy j**  
Average success of strategy j

**Average fitness (payoff) of the entire population**

# Replicator dynamics

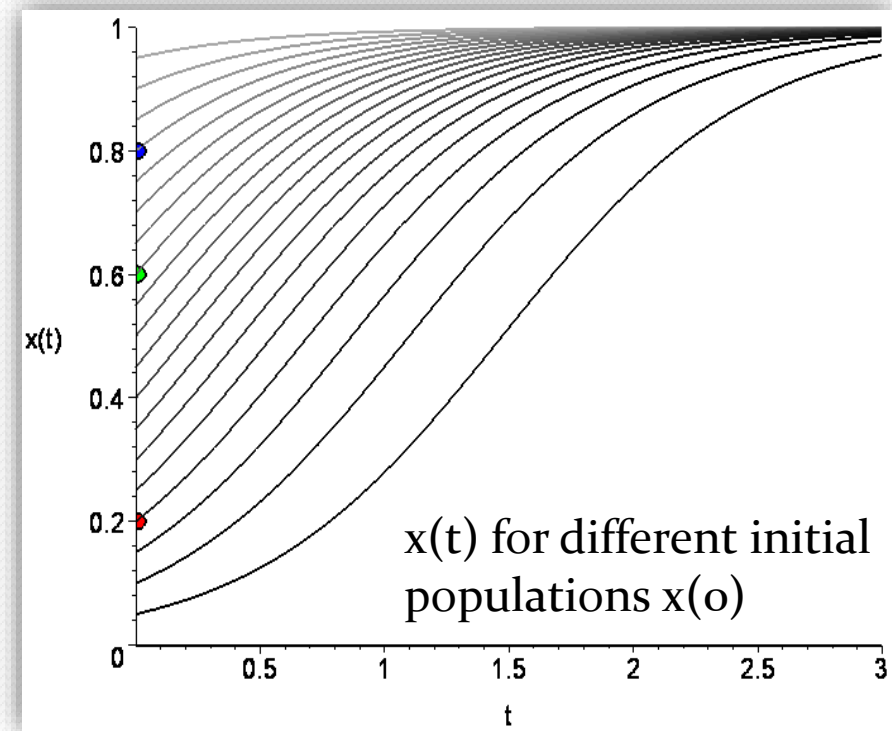
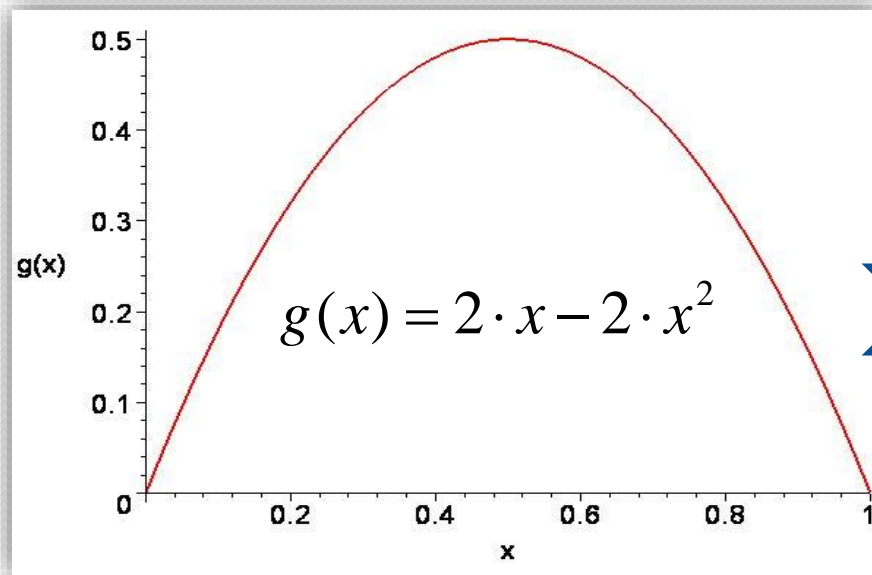
(for the prisoner's dilemma)

The differential equation of replicator dynamics for the prisoner's dilemma reads:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot (x(t))^2 = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left( (-7 - (-9)) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (-3 - (-1)) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

	B	S
B	(-7, -7)	(-1, -9)
S	(-9, -1)	(-3, -3)



Example: Prisoner's Dilemma  
 $g(x) = g(x(t))$  in the range  $[0,1]$

# Evolutionary stable strategies (ESS)

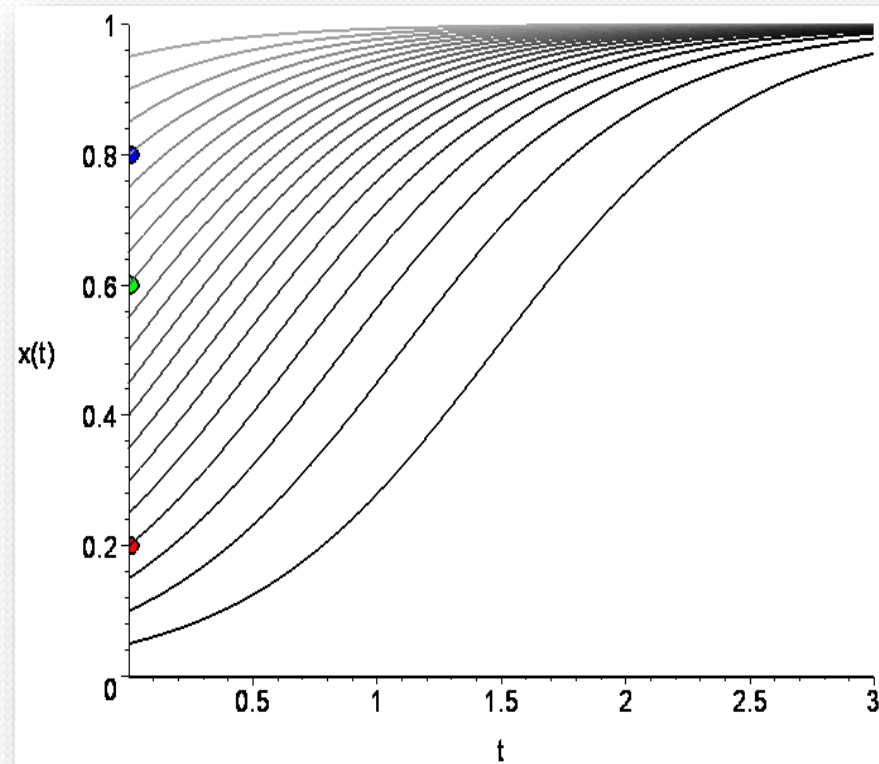
- Evolutionarily stable strategies are the stable final states of the population vector  $x(t)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

A necessary (but not sufficient) condition for the existence of an ESS is that it is a Nash equilibrium of the underlying game.

Prisoner's Dilemma related games  
For the ESS of the evolutionary prisoner's dilemma game, we get:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1 \Rightarrow \text{all "betray"}$$



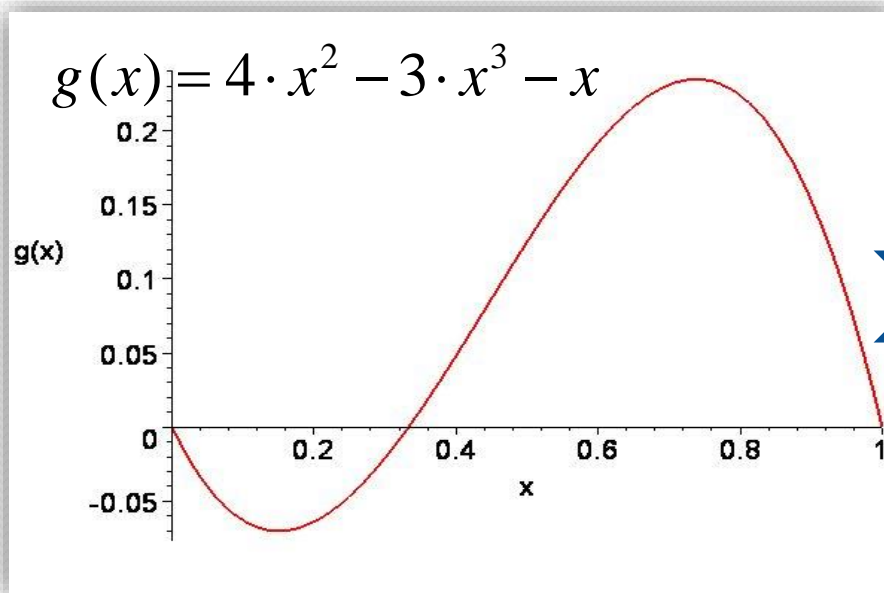
# Replicator dynamics (for the stag hunting game)

	Hares	Stag
Hares	(2, 2)	(4, 0)
Stag	(0, 4)	(5, 5)

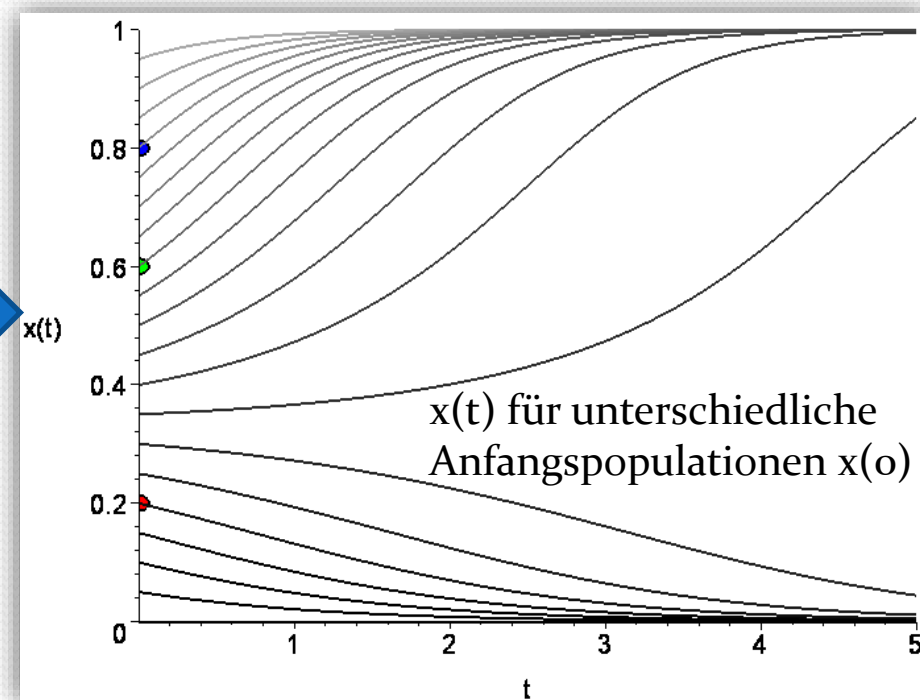
Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Hirschjagt-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 4 \cdot (x(t))^2 - 3 \cdot (x(t))^3 - x(t) =: g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left( (2 - 0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (5 - 4) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$



Beispiel: Hirschjagt-Spiel  
 $g(x) = g(x(t))$  im Bereich  $[0,1]$  dargestellt



# Replicator dynamics

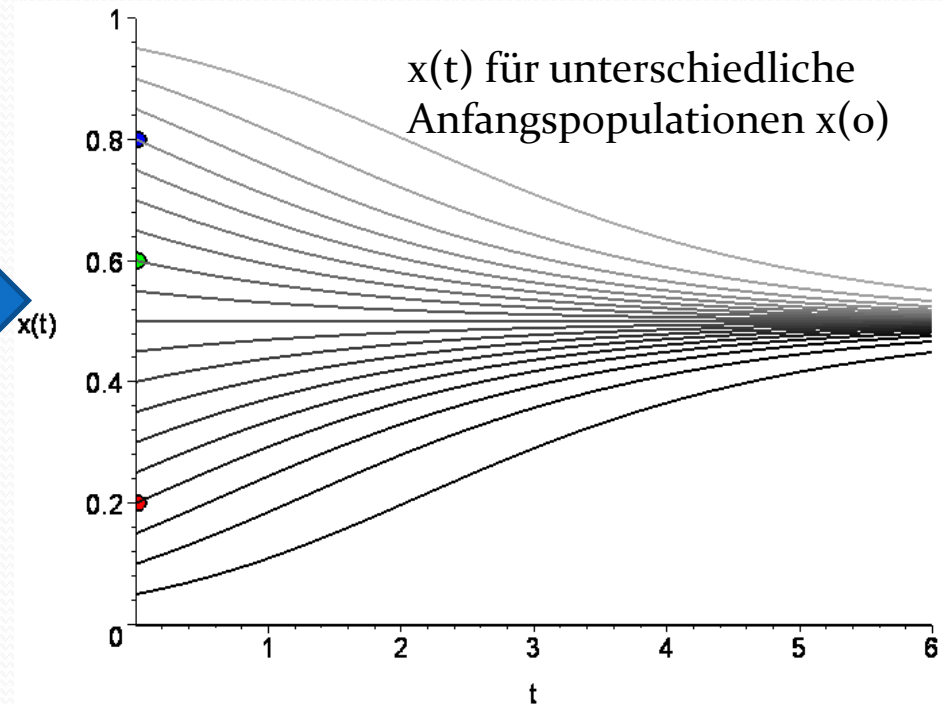
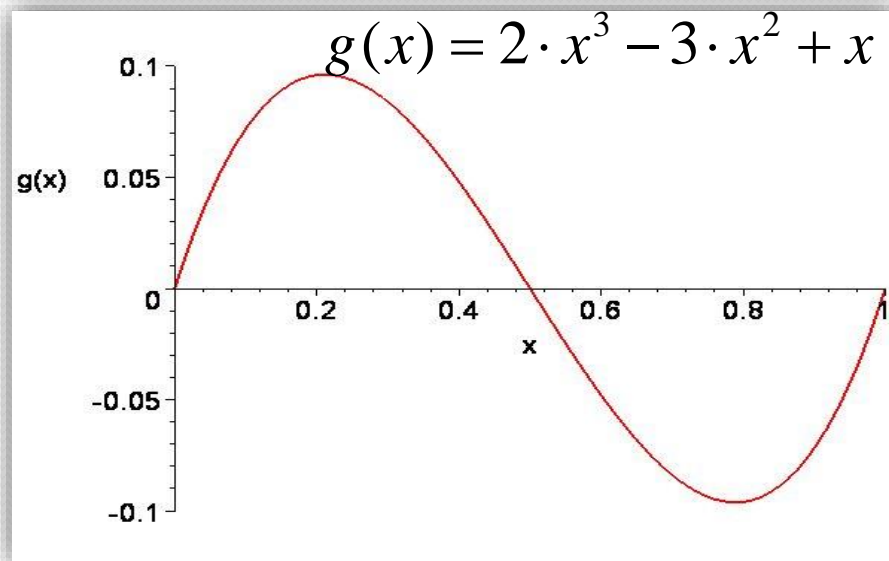
(for the chicken game)

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Angsthasen-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot (x(t))^3 - 3 \cdot (x(t))^2 + x(t) = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left( (-1 - 0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (1 - 2) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

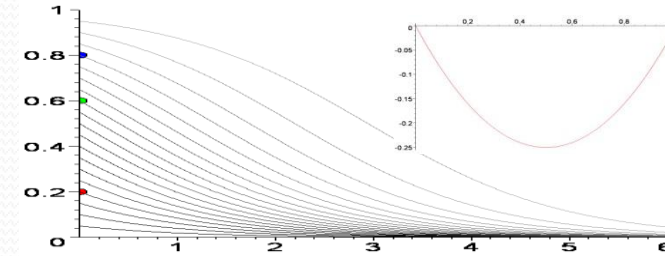
	don't jump	jump
don't jump	$(-1, -1)$	$(2, 0)$
jump	$(0, 2)$	$(1, 1)$



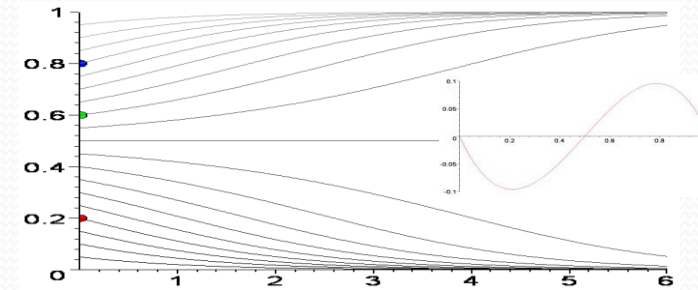
Beispiel: Angsthasen-Spiel  
 $g(x)=g(x(t))$  im Bereich  $[0,1]$  dargestellt

# Klassifizierung von evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spielen

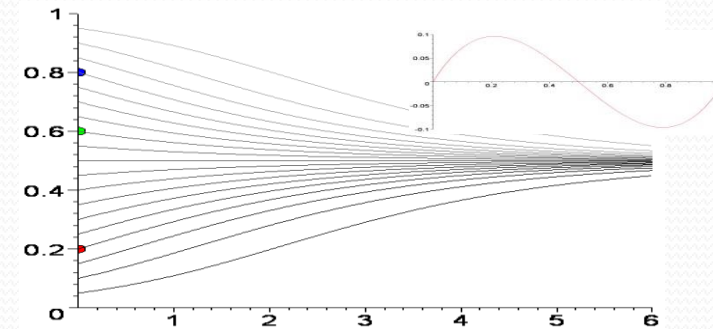
- **Dominante Spiele**  
(2. Strategie dominiert 1.Strategie)  
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei  $x=0$ .



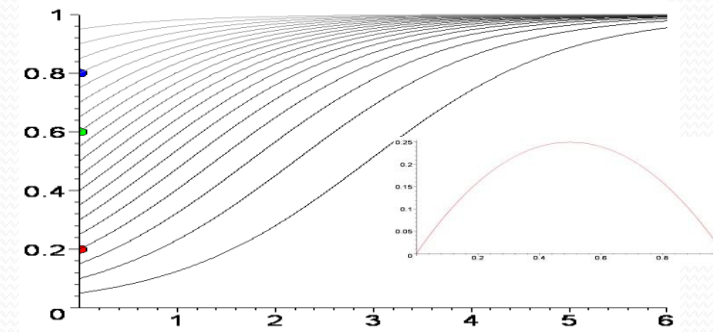
- **Koordinationsspiele**  
Es existieren drei Nash - Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.



- **Anti - Koordinationsspiele**  
Es existieren drei Nash - Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.



- **Dominante Spiele**  
(1. Strategie dominiert 2.Strategie)  
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei  $x=1$ .

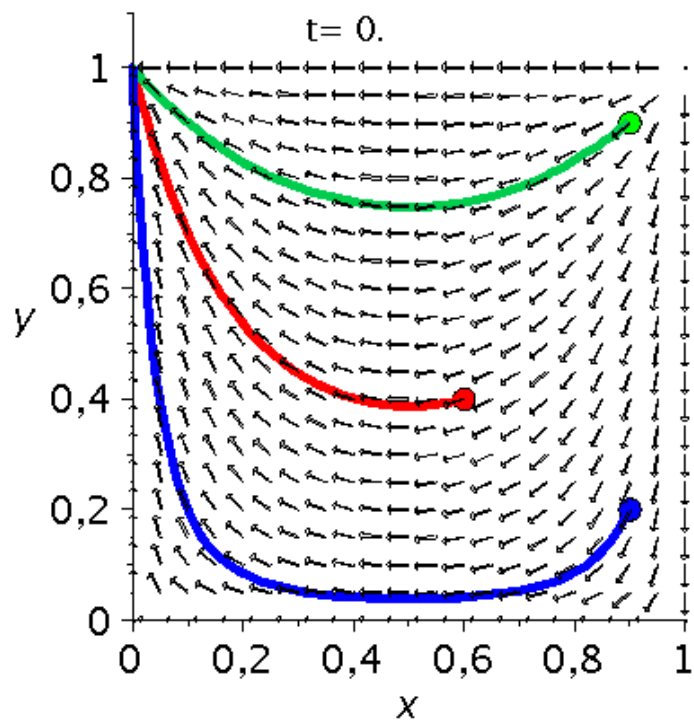




# Klassifizierung von Bi-Matrix Spielen

## Eckspiele

Die Spielklasse der Gruppe A  
oder der Gruppe B ist ein  
Dominantes Spiel



## Sattelspiele

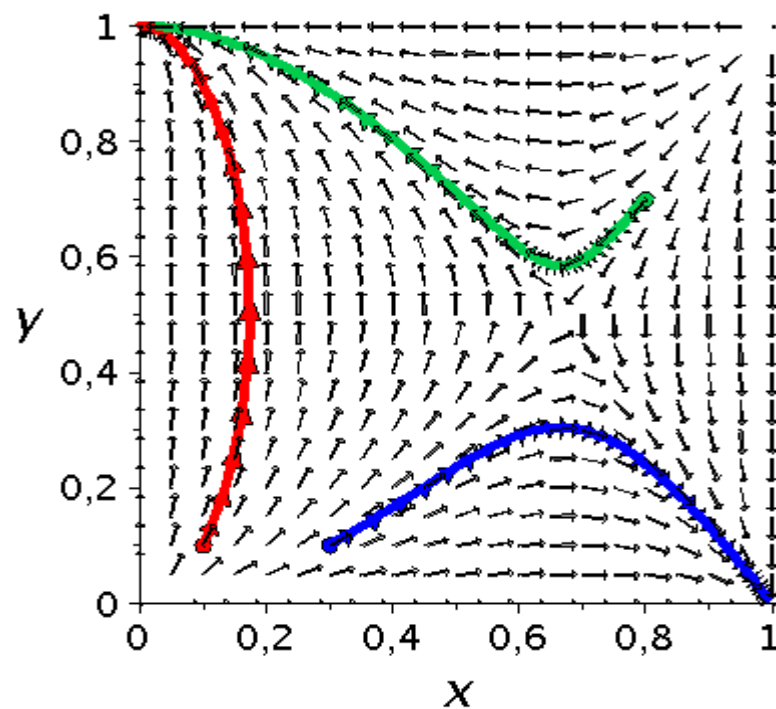
Spiel A: Koordinationsspiel

Spiel B: Koordinationsspiel

oder

Spiel A: Anti-Koordinationsspiel

Spiel B: Anti-Koordinationsspiel



## Zentrumsspiele

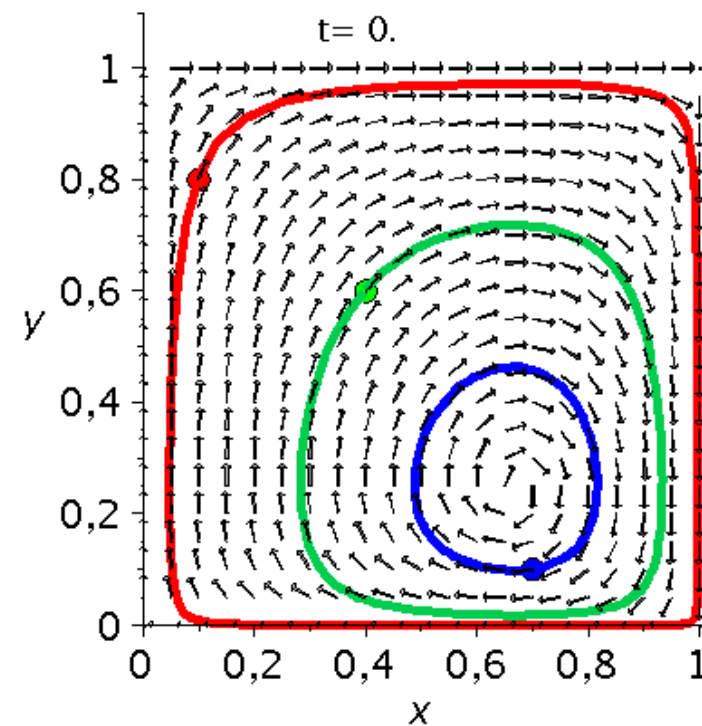
Spiel A: Koordinationsspiel

Spiel B: Anti-Koordinationsspiel

oder

Spiel A: Anti-Koordinationsspiel

Spiel B: Koordinationsspiel



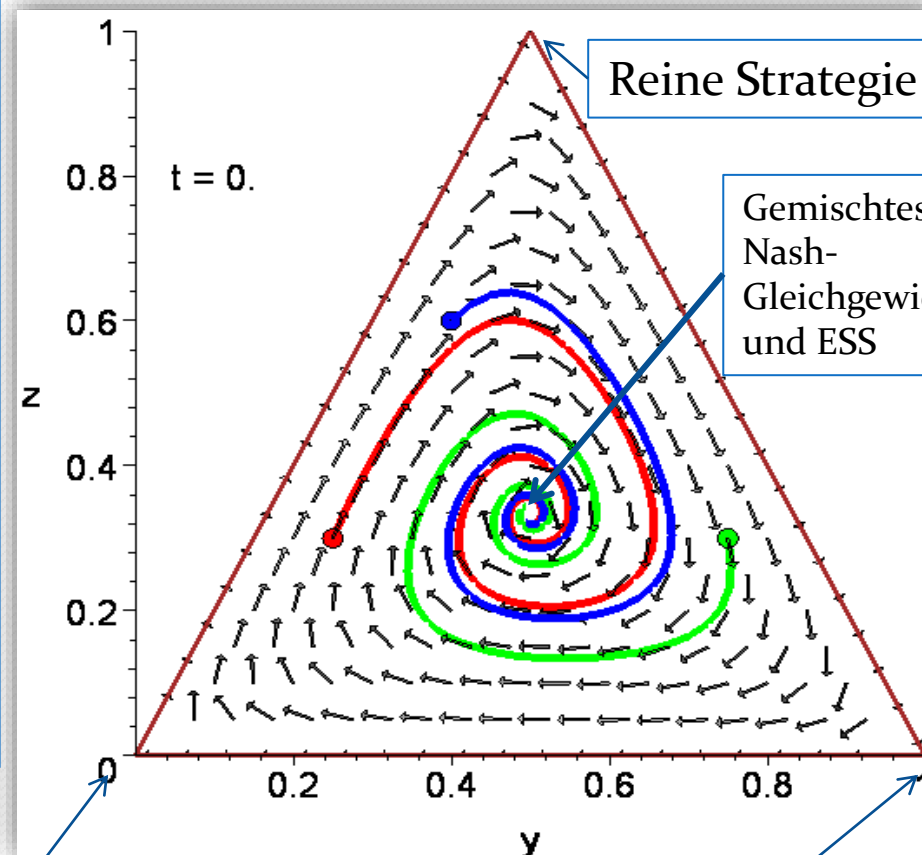
# Replikatorodynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 1**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(2, -1)	(-1, 2)
Strategie 2	(-1, 2)	(0, 0)	(2, -1)
Strategie 3	(2, -1)	(-1, 2)	(0, 0)

Die rechte Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der relativen Populationsanteile der gewählten Strategien für drei mögliche Anfangsbedingungen. Die einzige evolutionär stabile Strategie dieses Beispiels befindet sich beim gemischten Nash-Gleichgewicht  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ . Die einzelnen Pfeile im Dreieck veranschaulichen den durch die Spielmatrix bestimmten Strategien-„Richtungswind“, dem die Population zeitlich folgen wird.



Zur Visualisierung der evolutionären Entwicklung benutzt man oft die sogen. barycentric coordinates:

$$y := x_2 + \frac{x_3}{2}$$

$$z := x_3$$

Reine Strategie 1

Reine Strategie 2

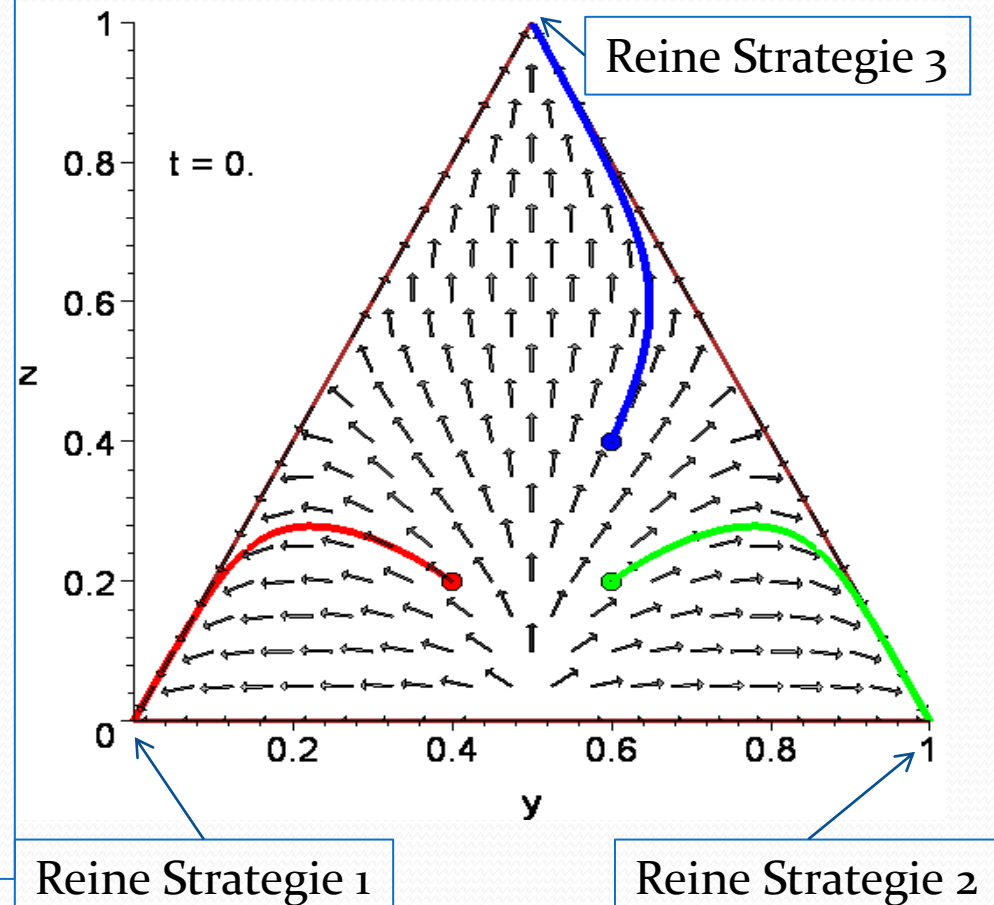
# Replikatorodynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 2**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(-3, -3)	(-1, -1)
Strategie 2	(-3, -3)	(0, 0)	(-1, -1)
Strategie 3	(-1, -1)	(-1, -1)	(0, 0)

Die rechte Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der relativen Populationsanteile der gewählten Strategien für drei mögliche Anfangsbedingungen. Das Spiel besitzt drei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, die ebenfalls evolutionär stabile Strategien darstellen. Welche der drei ESS die Population realisiert hängt von dem Anfangswert der Populationsanteile ab. Die zeitliche Entwicklung folgt wieder dem Strategien-„Richtungswind“ der zugrundeliegenden Auszahlungsmatrix.

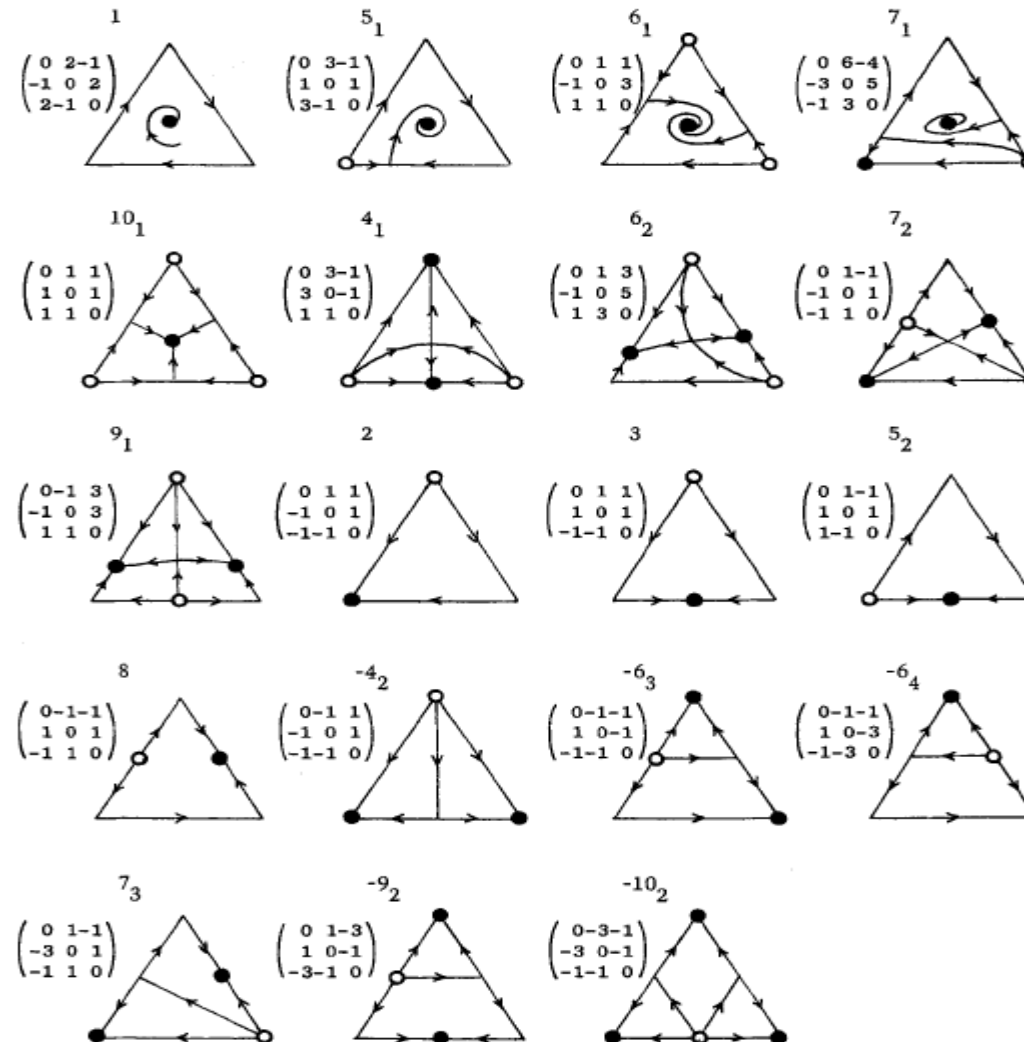


# Replikatorodynamik

(Klassifizierung symmetrische (2x3)-Spiele)

E. C. Zeeman, *POPULATION DYNAMICS FROM GAME THEORY*,  
In: *Global Theory of Dynamical Systems*, Springer 1980

E. C. Zeeman zeigt in seinem im Jahre 1980 veröffentlichten Artikel, dass man evolutionäre, symmetrische (2x3)-Spiele in 19 Klassen einteilen kann. Die Abbildung rechts zeigt das evolutionäre Verhalten dieser 19 Spieltypen. Die ausgefüllten schwarzen Punkte markieren die evolutionär stabilen Strategien der jeweiligen Spiele. Es gibt Spielklassen, die besitzen lediglich eine ESS und Klassen die sogar drei ESS besitzen.



# Jupyter Notebook Evolutionenspiel4.py

## Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauke

Frankfurt am Main 01.12.2020

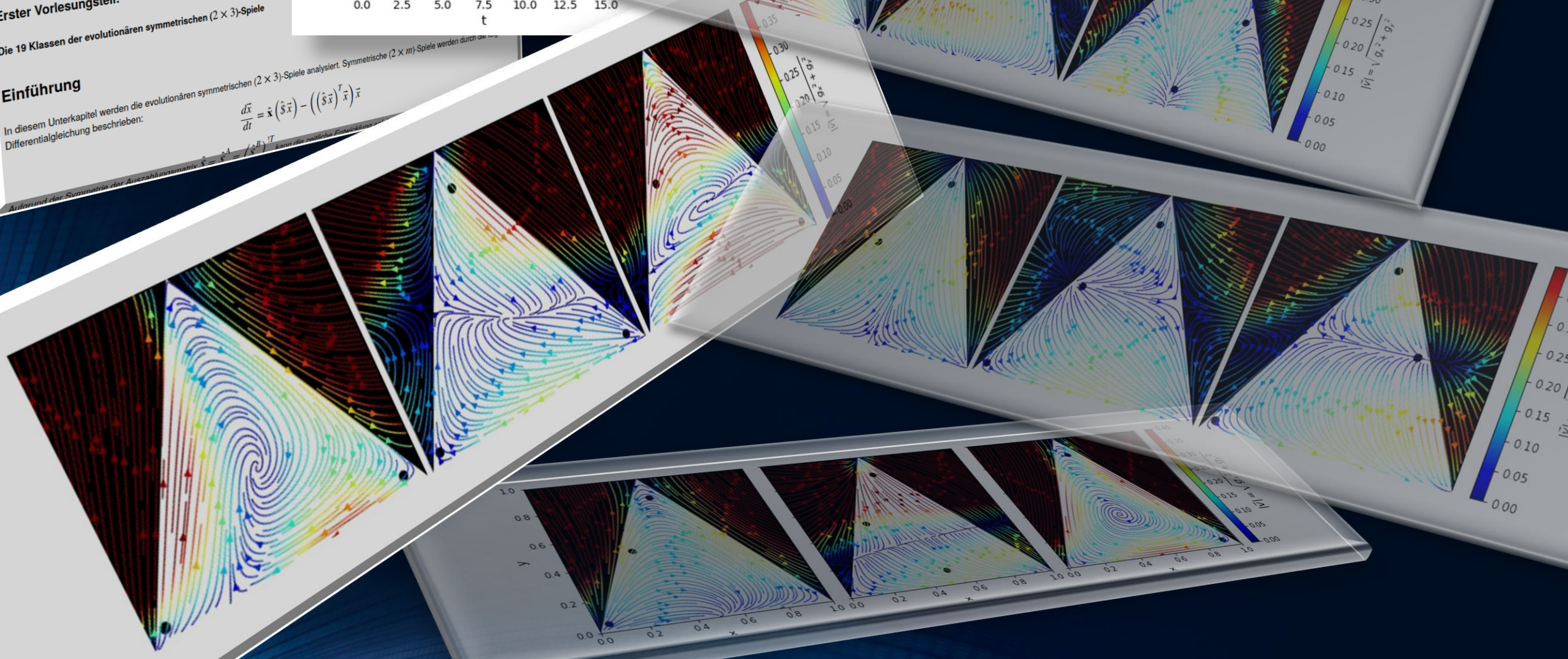
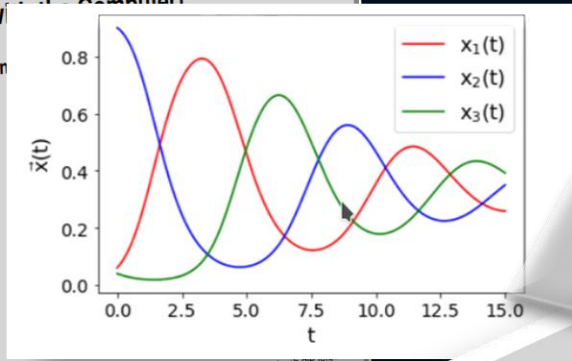
Erster Vorlesungsteil:

Die 19 Klassen der evolutionären symmetrischen  $(2 \times 3)$ -Spiele

### Einführung

In diesem Unterkapitel werden die evolutionären symmetrischen  $(2 \times 3)$ -Spiele analysiert. Symmetrische  $(2 \times m)$ -Spiele werden durch die Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{x}(\hat{s}\vec{x}) - \left( (\hat{s}\vec{x})^T \vec{x} \right) \vec{x}$$



# Application fields of game theory (I)

- **Biologie**

- **Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock–paper–scissors**

Siehe z.B.: Kerr, Feldmann, Nature 2002

- **Prisoner's dilemma in an RNA virus**

Siehe z.B.: Turner, Chao, Nature 1999

- **Mating strategies of lizards**

Siehe z.B.: Sinervo, Hazard, Nature 1996

- **Natural self-organisation of macromolecules**

Siehe z.B.: Eigen, Schuster, Naturwissenschaften 64, 1977

# Application fields of game theory (II)

- **Economics**

- **„Public Goods“- games**

- **Trust in Private and Common Property Experiments**, Elinor Ostrom, et al.
- **Evolutionary Dynamics in Public Good Games**, CHRISTIANE CLEMENS and THOMAS RIECHMANN, Computational Economics (2006) 28: 399–420
- **Institution Formation in Public Goods Games**, Michael Kosfeld, Akira Okada, and Arno Riedl, American Economic Review 2009, 99:4, 1335–1355

- **Experimental economics**

- **Cooperation in PD games: Fear, greed, and history of play**, T.K. AHN, ELINOR OSTROM, DAVID SCHMIDT, ROBERT SHUPP, Public Choice 106: 137–155, 2001.

- **„Behavioral economics (altruism, empathy, ...)“** z.B.: Fehr et al.

- **Evolution of information networks**

# Application fields of game theory (III)

- **Social science**

- **Cultural and moral developments**

- Evolution of social learning does not explain the origin of human cumulative culture, Magnus Enquist, Stefano Ghirlanda, *Journal of Theoretical Biology* 246 (2007) 129–135
    - **EVOLUTION OF MORAL NORMS**, William Harms and Brian Skyrms, For *Oxford Handbook on the Philosophy of Biology* ed. Michael Ruse

- **Evolution of language**

- Finite populations choose an optimal language, Christina Pawlowitsch, *Journal of Theoretical Biology* 249 (2007) 606–616

- **Social learning**

- Evolution of social learning does not explain the origin of human cumulative culture, Magnus Enquist, Stefano Ghirlanda, *Journal of Theoretical Biology* 246 (2007) 129–135

- **Evolution of social norms**

- **Collective Action and the Evolution of Social Norms**, Elinor Ostrom, *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 14, No. 3 (Summer, 2000), pp. 137–158

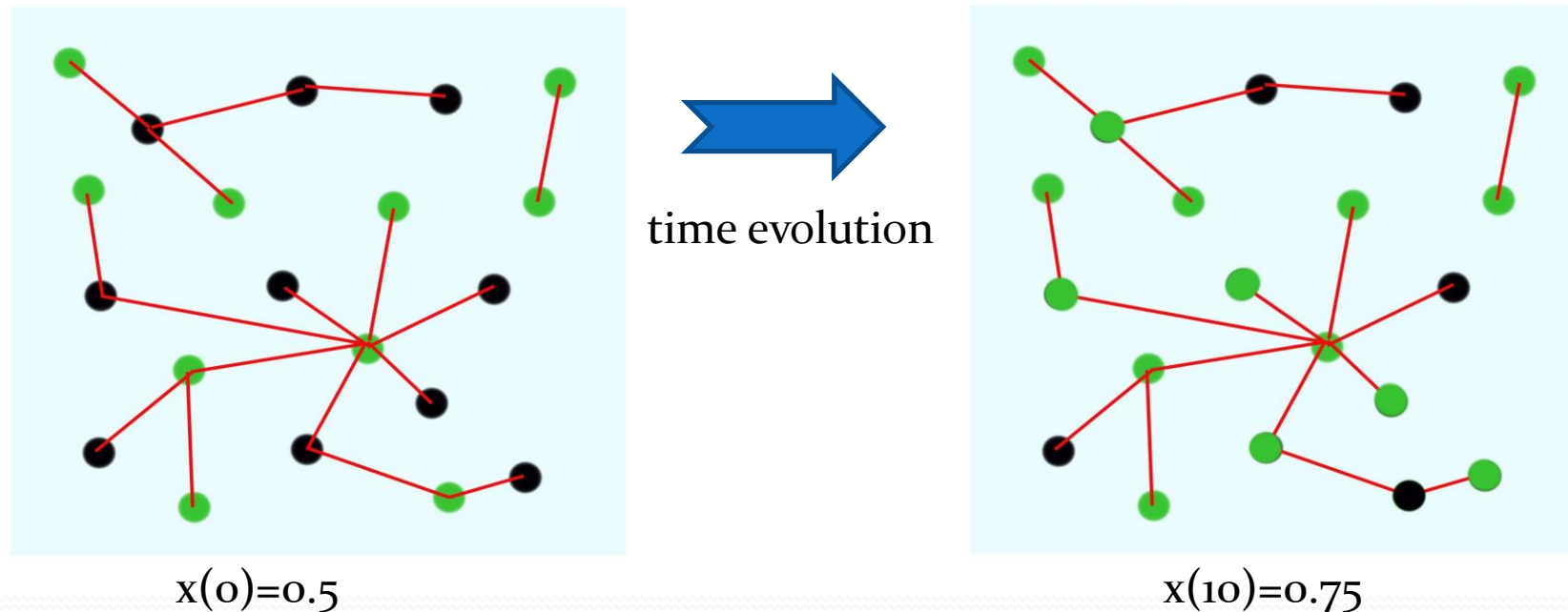
- **Evolution of social networks**

- **GOVERNING SOCIAL-ECOLOGICAL SYSTEMS**, MARCO A. JANSSEN and ELINOR OSTROM
    - **A General Framework for Analyzing Sustainability of Social-Ecological Systems**, Elinor Ostrom, et al., *Science* 325, 419 (2009)



# Evolutionary game theory on complex networks

Many evolutionary games that occur in reality are played on a defined network structure (topology). The players of the population under consideration are not equal here, but only select partners linked to them through the network as playing partners.



Possible strategies: (green, black), parameter  $t$  represents the "time"  
 $x(t)$ : Fraction of players who play the "green" strategy at time  $t$ .  
The red connecting lines describe the player's possible playing partners

# Network Science

by Albert-László Barabási

Personal Introduction

1. Introduction

2. Graph Theory

3. Random Networks

4. The Scale-Free Property

5. The Barabási-Albert Model

6. Evolving Networks

7. Degree Correlations

8. Network Robustness

9. Communities

10. Spreading Phenomena

Preface

<http://networksciencebook.com/>

Start Reading

English

Русский

Magyar

فارسی

日本語

# Network Classes

Due to their different properties, a distinction is made between the following network classes:

**i. Random networks**

The individual edges in random networks are selected by the nodes (players) according to a purely random pattern.

**ii. Small-world networks**

i. “Small world” networks are characterized by a small value for the average shortest connection between the nodes of the network and a large value for the cluster coefficient.

**iii. Exponential Networks**

**iv. Scale-free networks**

# Formation von „Communities“

<http://networksciencebook.com/chapter/9>

## Defining Communities

Our sense of communities rests on a second hypothesis (Image 9.4):

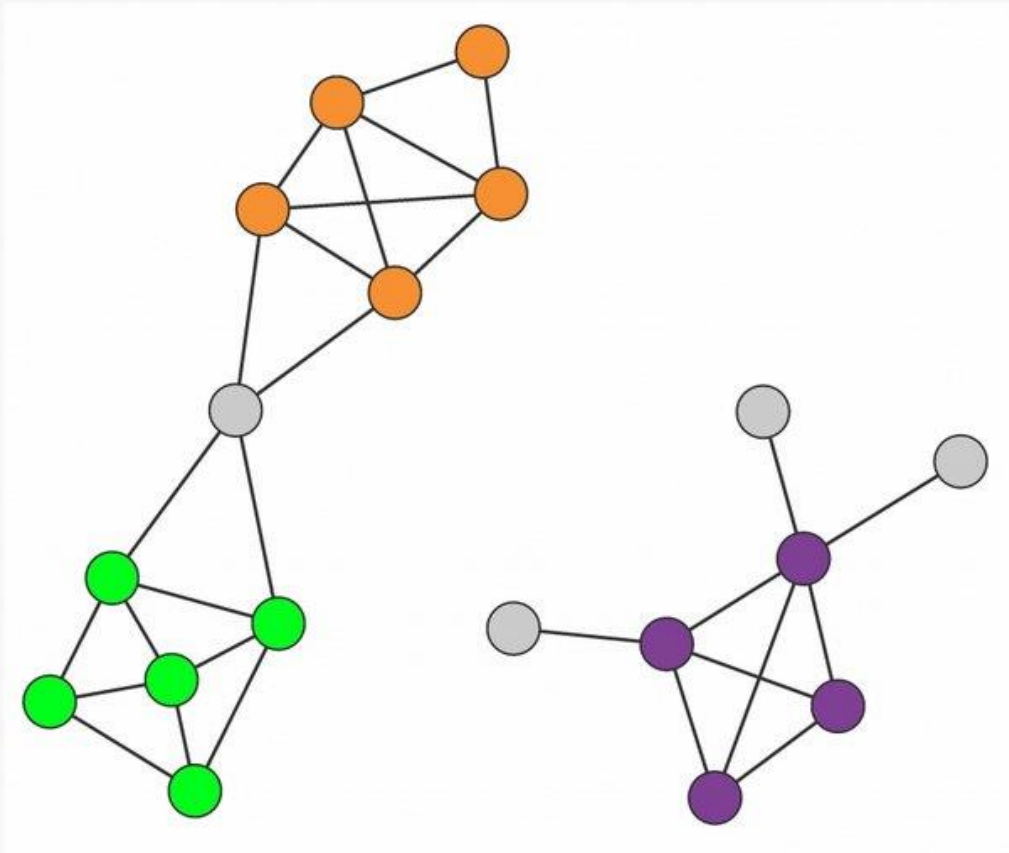


Image 9.4

### Connectedness and Density Hypothesis

Communities are locally dense connected subgraphs in a network. This expectation relies on two distinct hypotheses:

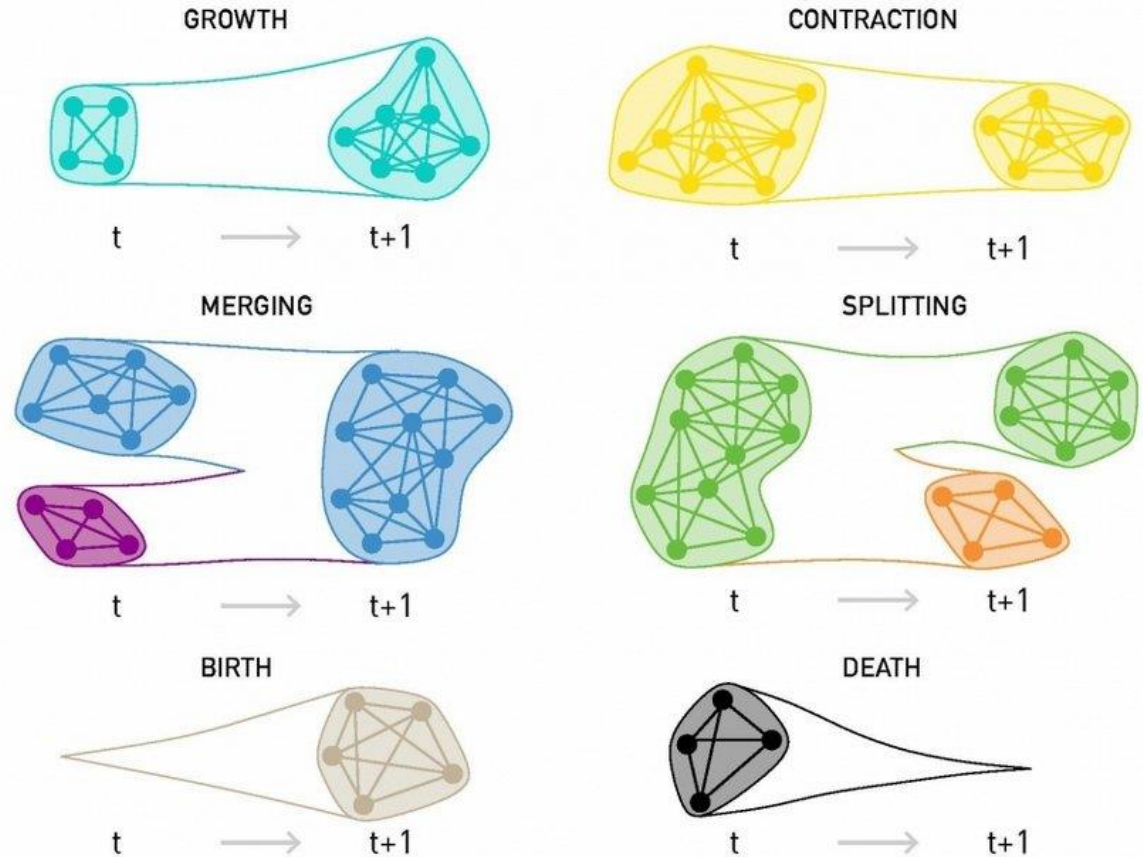
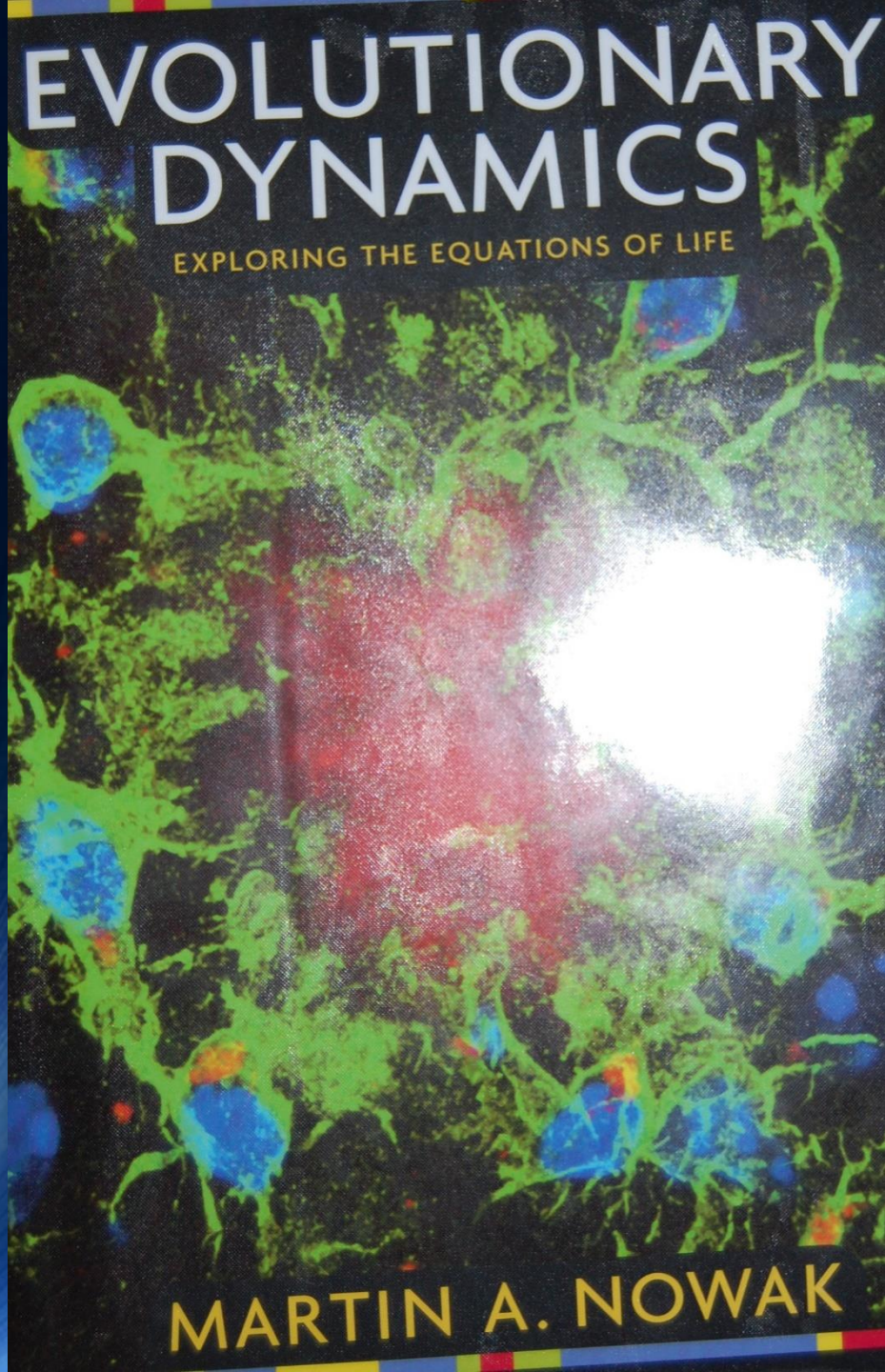


Image 9.31

### Evolving Communities

When networks evolve in time, so does the underlying community structure. All changes in community structure are the result of six elementary events in the life of a community, illustrated in the figure: a community can grow or contract; communities can merge or may split; new communities are born while others may disappear. After [50].

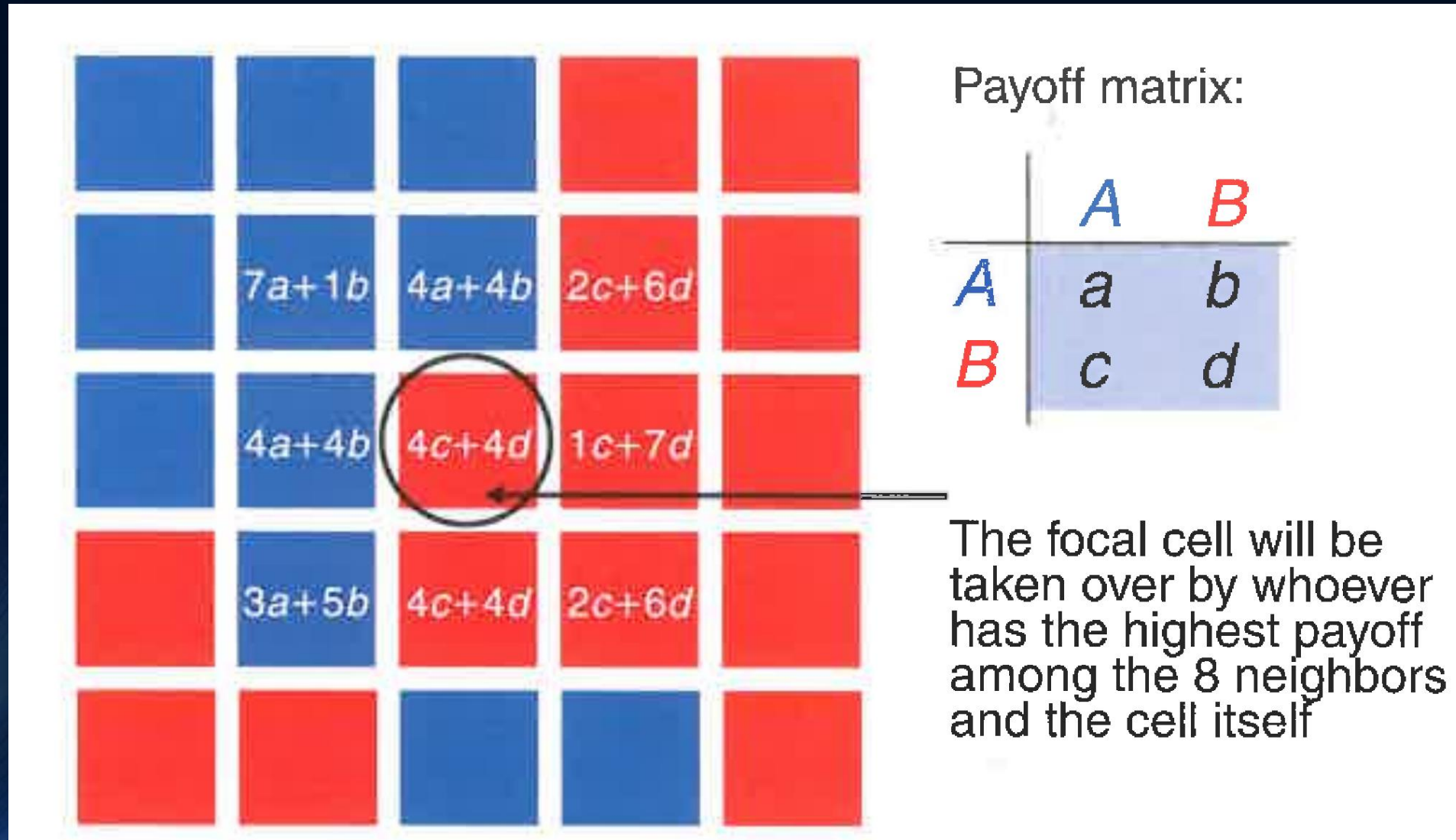


# Evolutionary game theory on complex networks

M.A. Nowak „Evolutionary Dynamics“  
Chapter 9: Spatial Games

# Spatial Games

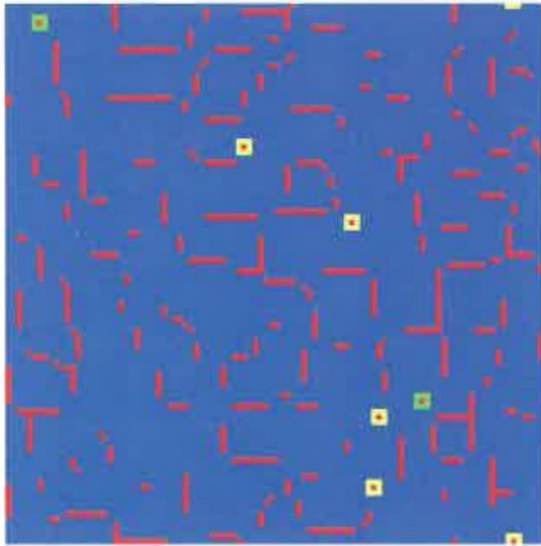
Das Kapitel 9 in dem Buch M.A. Nowak „Evolutionary Dynamics“ handelt über Spatial Games



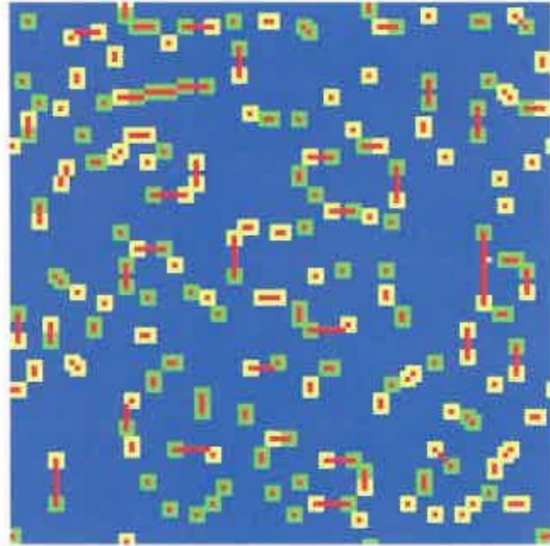
Die folgenden Abbildungen sind dem Buch M.A. Nowak „Evolutionary Dynamics“ entnommen.

# Spatial Games

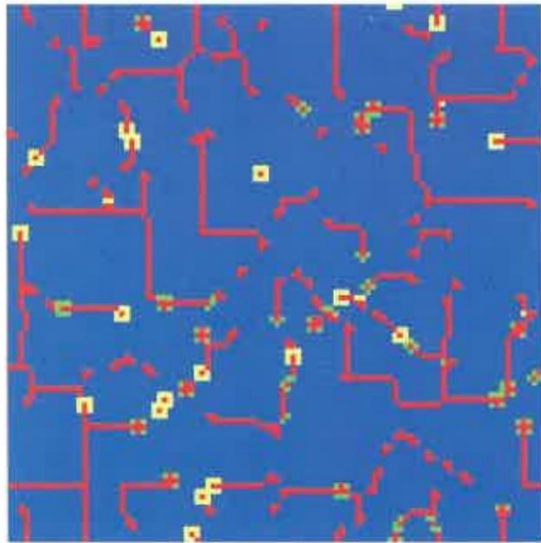
$b=1.10$



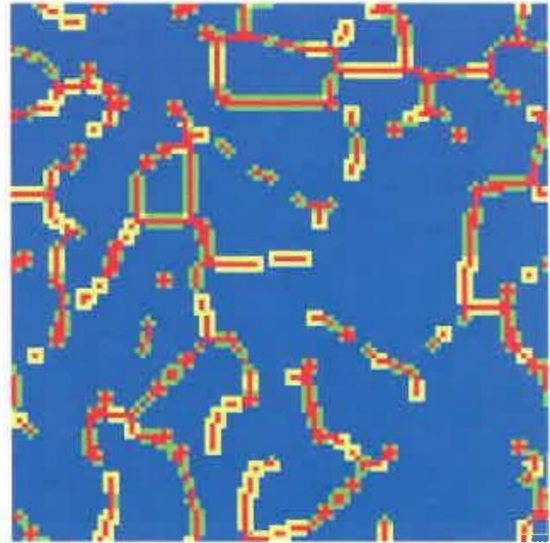
$b=1.15$



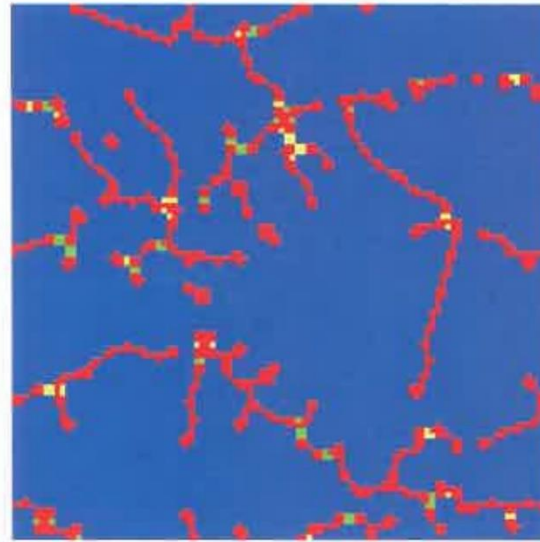
$b=1.24$



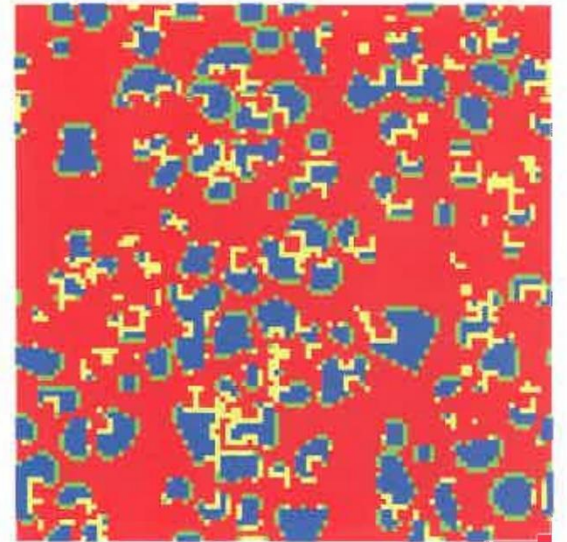
$b=1.35$



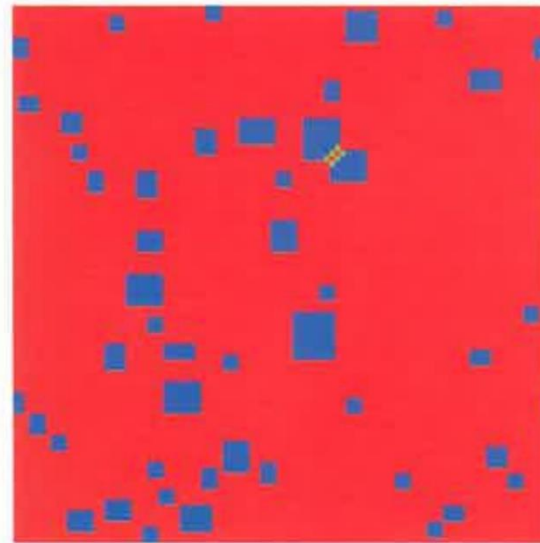
$b=1.55$



$b=1.65$



$b=1.70$



$$\begin{matrix} C & D \\ C & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & \epsilon \end{pmatrix} \\ D & \end{matrix}$$

# Betrachtetes Gefangenendilemma-ähnliches (2x2)-Spiel

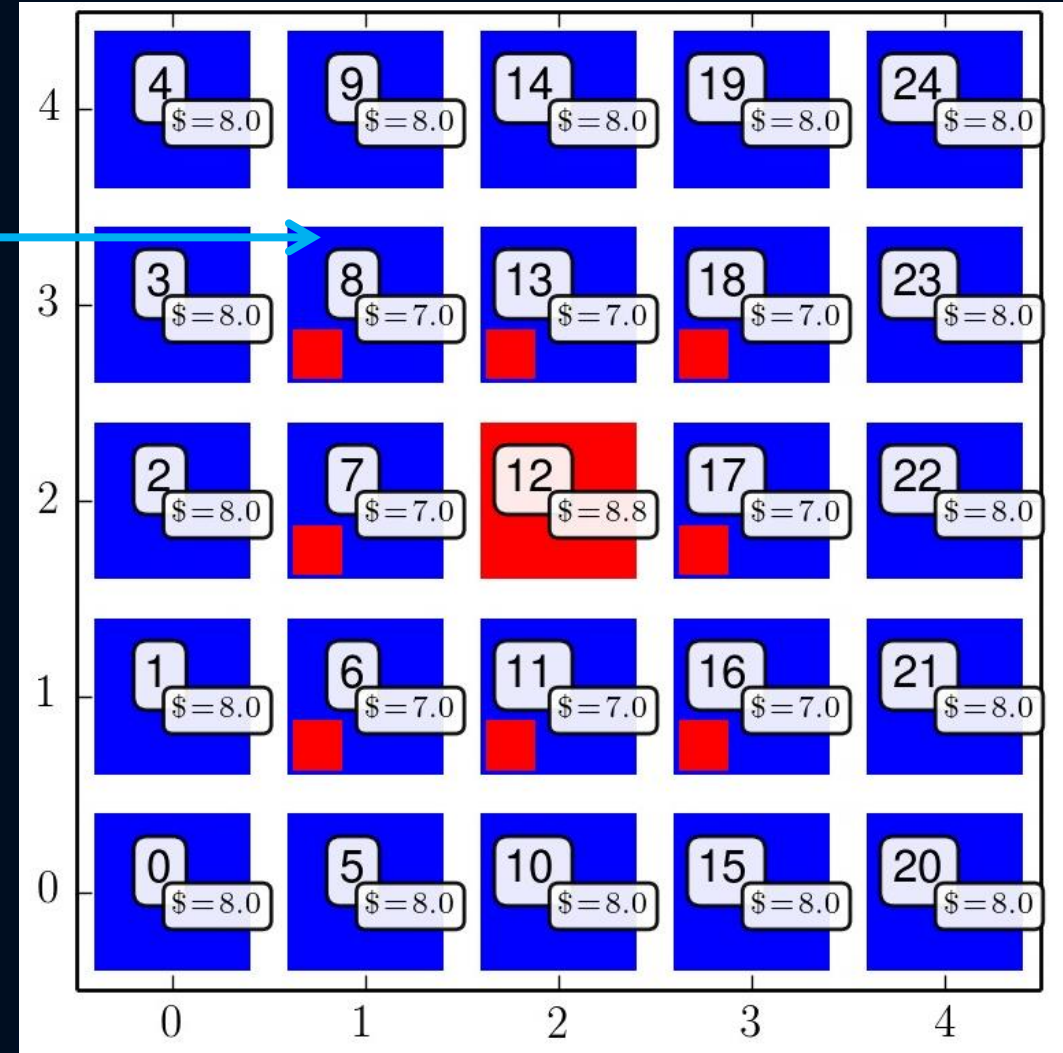
	Spieler B Strategie 1	Spieler B Strategie 2
Spieler A Strategie 1	$(1, 1)$	$(0, c)$
Spieler A Strategie 2	$(c, 0)$	$(0.01, 0.01)$

The diagram shows a 2x2 game matrix with four strategy combinations. The top-left cell (1,1) is light gray, the top-right cell (0,c) is light gray, the bottom-left cell (c,0) is light gray, and the bottom-right cell (0.01,0.01) is dark gray. Four blue curved arrows form a clockwise cycle: from (1,1) to (0,c), from (0,c) to (0.01,0.01), from (0.01,0.01) to (c,0), and from (c,0) to (1,1).



# Python Programm Spatial Games

In diesem Python Programm wird die Menge der Spieler (hier  $N=24$ ) auf einem 2D-Gitter mit Moorschen Nachbarschaftsbedingungen angeordnet (siehe S:147 in M.A.Nowak, „Evolutionary Dynamics“). In jeder Iterationsperiode spielt jeder Spieler mit seinen nächsten Nachbarn ein symmetrisches (2x2)-Spiel. Am Ende einer Periode vergleicht jeder Spieler seinen Gesamtgewinn mit seinen Nachbarn und bestimmt in einem „Update Rule“ seine Strategie in der nächsten Spielperiode.



Die rechte Simulation benutzte die folgenden Werte der Auszahlungsmatrix (siehe linke Abb.):  $a=1$ ,  $b=0$ ,  $c=1.1$  und  $d=0.01$

Beachte!: Definition von  $b$  und  $c$  ist in M.A.Nowak, „Evolutionary Dynamics“ vertauscht.

	Spieler B Strategie 1 $y=1$	Spieler B Strategie 1 $y=0$
Spieler A Strategie 1 $x=1$	( $a$ , $a$ )	( $b$ , $c$ )
Spieler A Strategie 2 $x=0$	( $c$ , $b$ )	( $d$ , $d$ )

## Update Rules und der Entscheidungsprozess

Spieler mit Knotennummer 8 hatte in der aktuellen Periode Strategie „blau“ gespielt und eine gesamte Auszahlung von  $\$=7$  erhalten. Er wird in der nächsten Periode „rot“ spielen (siehe kleines rotes Kästchen), da einer seiner nächsten Nachbarn (Knoten 12) eine höhere Auszahlung als er hatte und dieser die Strategie „rot“ spielte.

Jupyter Notebook:  
Evolutionäre räumliche Spiele  
*Klasse der dominanten Spiele*

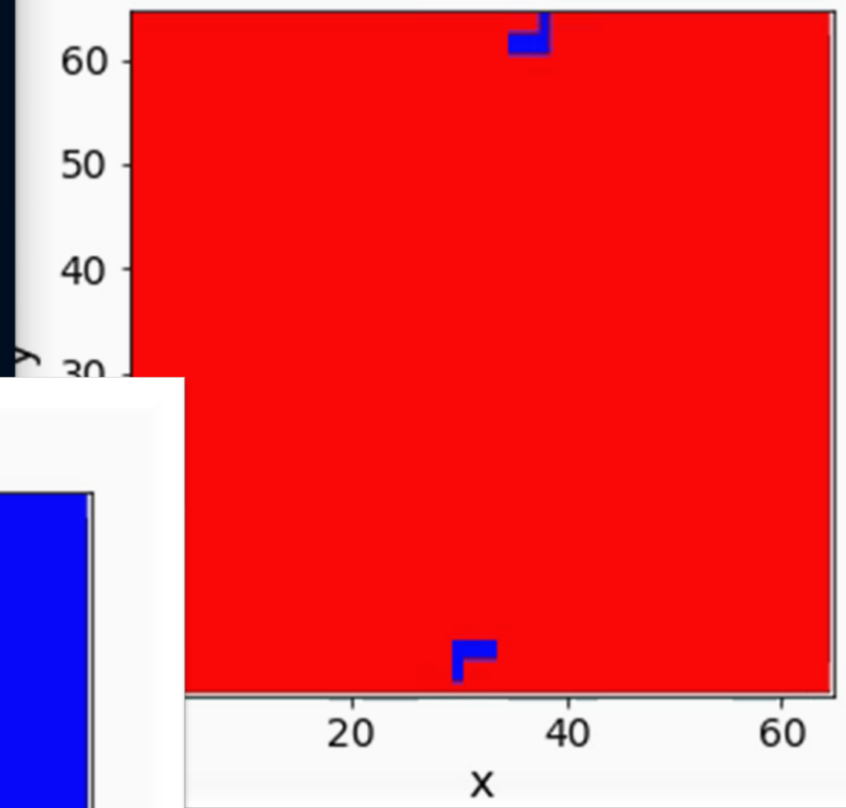
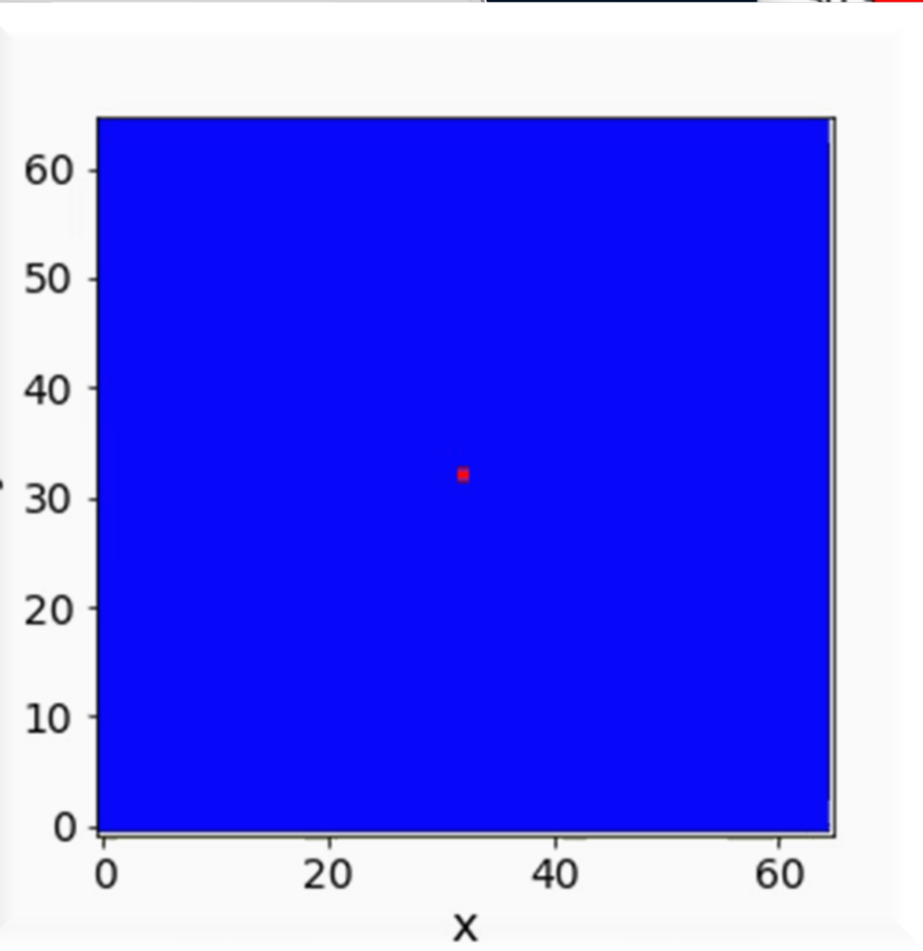
**Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer**  
**(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)**

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main  
(Wintersemester 2020/21)  
von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske  
Frankfurt am Main 02.11.2020

Dritter Vorlesungsteil:  
Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)  
Beispiel: Dominante Spiele

**Einführung**

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II  
vielversprechendes mathematisches Modell dar, welches sowohl  
Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel wird die Vo



# Jupyter Notebook: Evolutionäre räumliche Spiele Klasse der Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer  
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

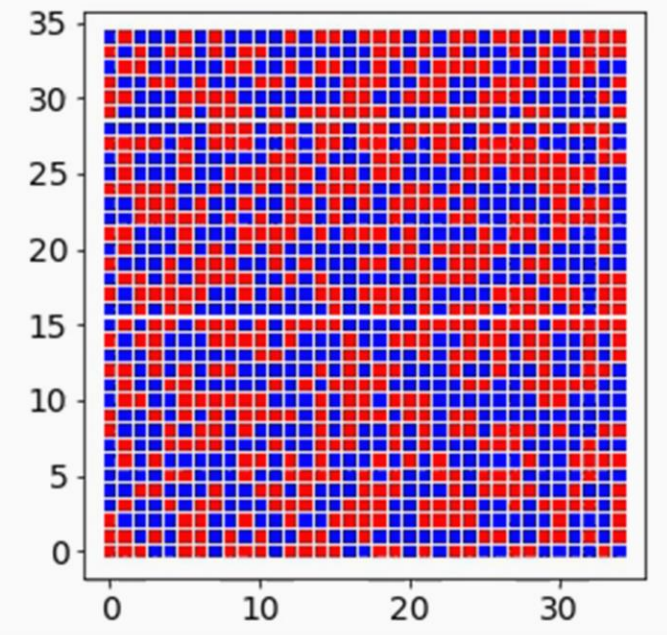
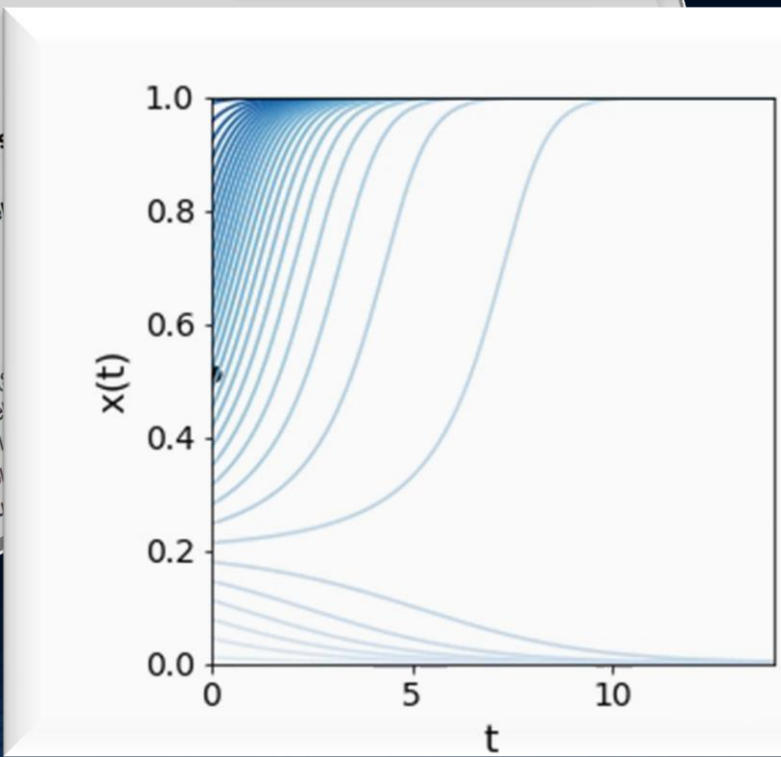
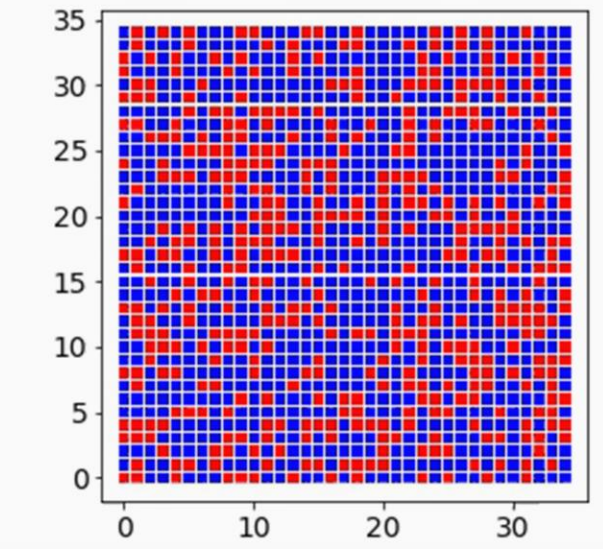
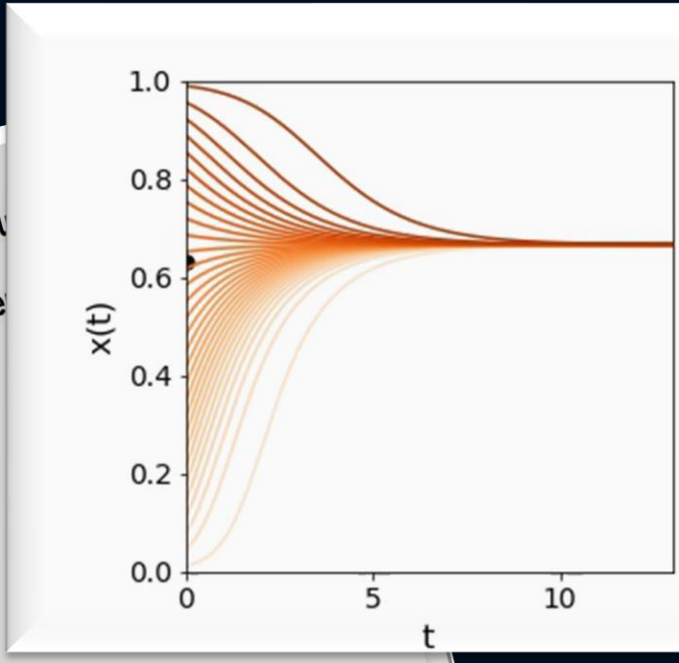
Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main  
(Wintersemester 2020/21)  
von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske  
Frankfurt am Main 02.11.2020

Dritter Vorlesungsteil:  
Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)

Beispiel: Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele

## Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (network theory) mit der Theorie komplexer Netzwerke (network theory) vielversprechendes mathematisches Modell dar, weil Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem so numerischer, agenten-basierter Computersimulationen



# Jupyter Notebook: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen komplexen Netzwerken

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer  
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main  
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske  
Frankfurt am Main 31.12.2020

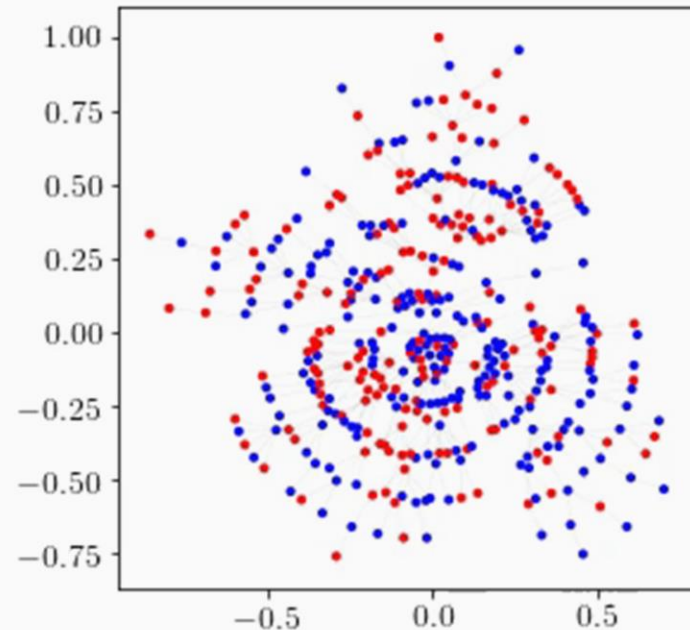
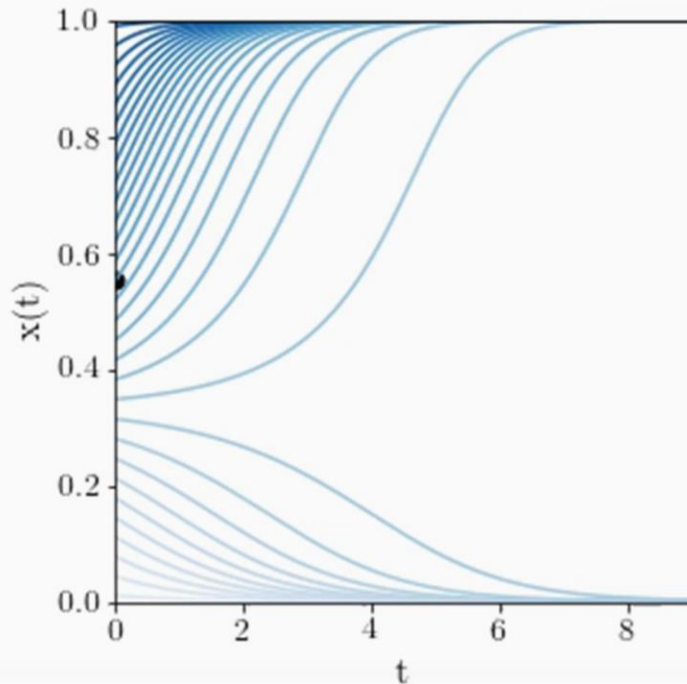
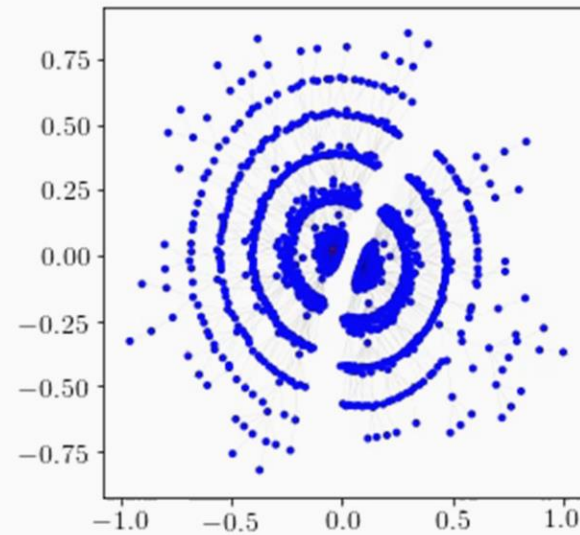
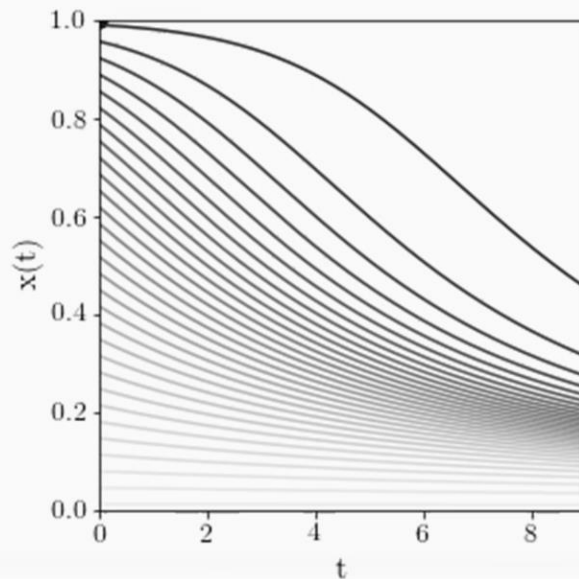
Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre Spiele auf komplexen Netzwerken

Beispiel: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-

## Einführung

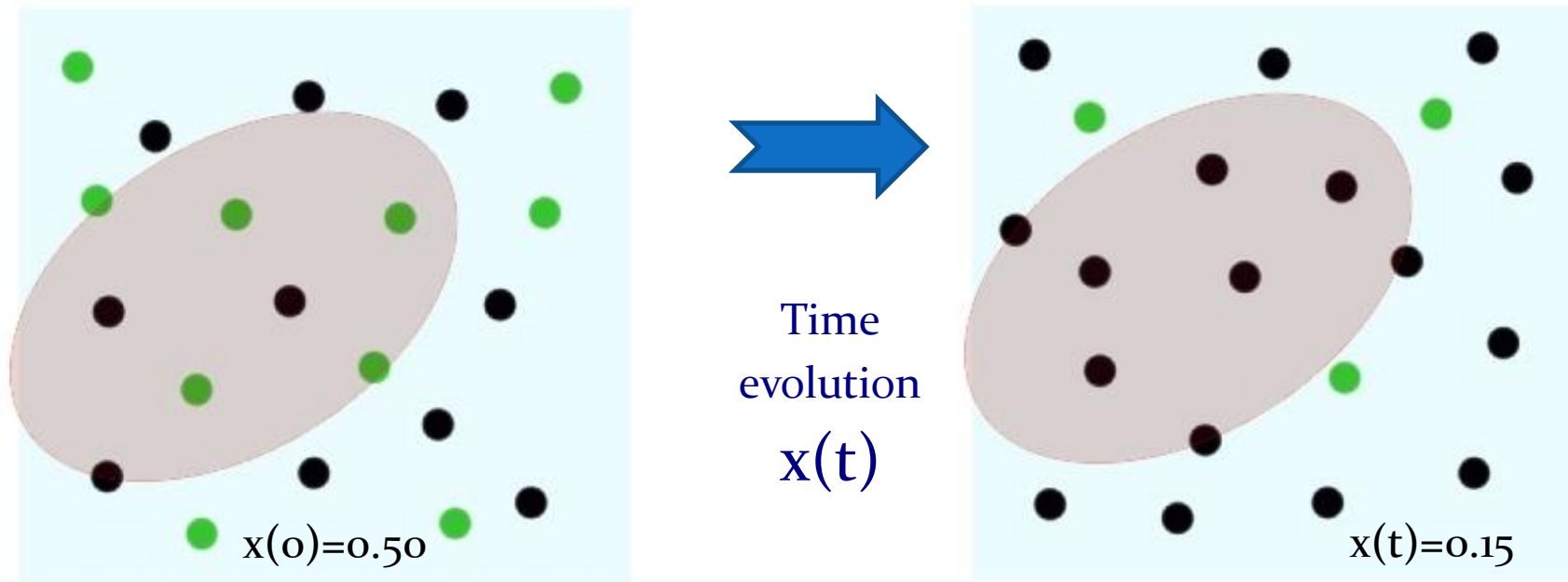
Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II  
vielfersprechendes mathematisches Modell dar, welches sowohl  
Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel wird die Vo  
Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen kompl  
numerischer, agenten-basierter Computersimulationen ver  
beiden letzten Jupyter Notebooks hatten wir die Spi  
nächsten Nachbarn spielen kann (Moore Nach  
schichten 2-dimensionalen Fall spielt



## Introduction

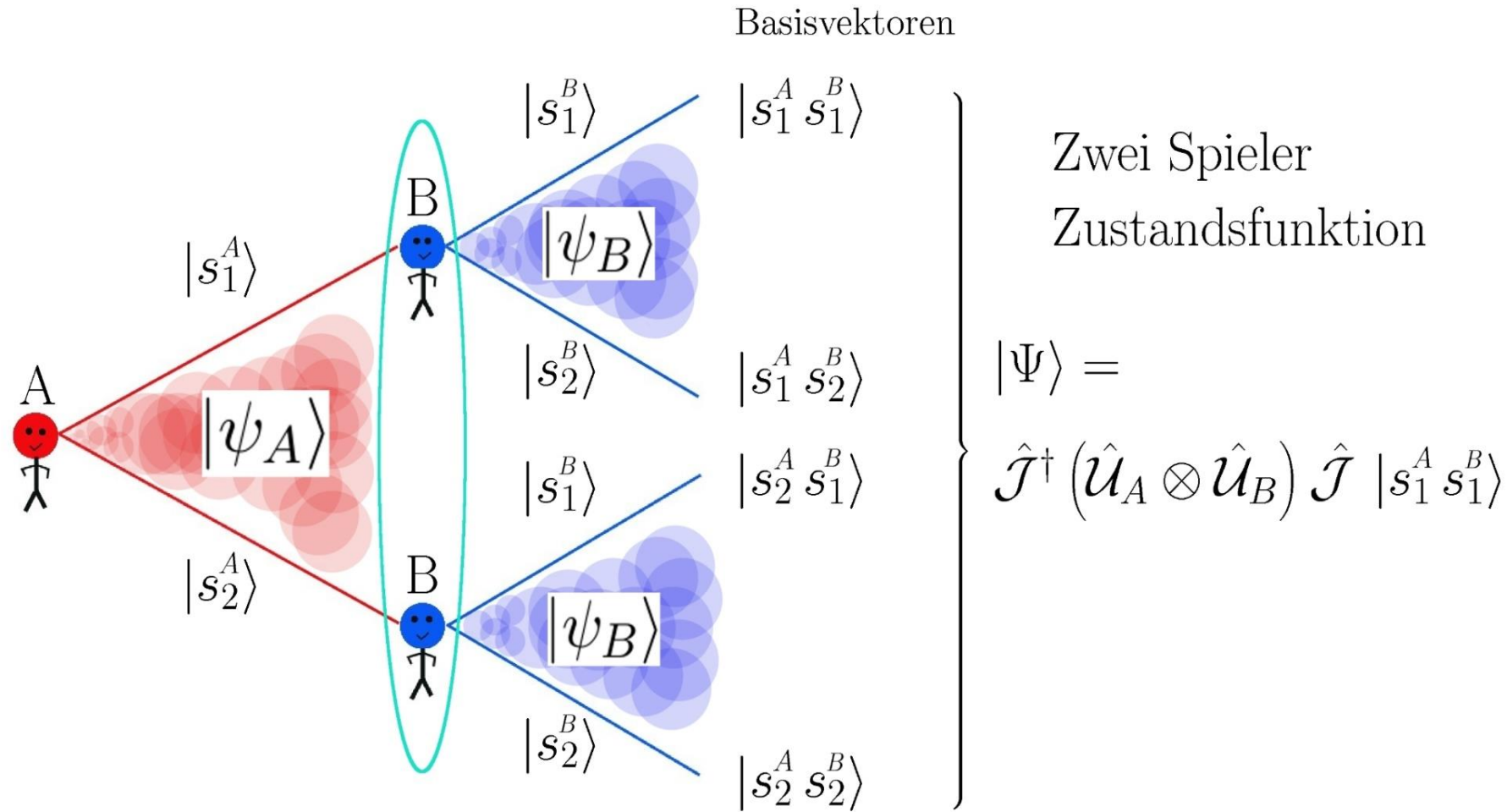
Quantum game theory represents a mathematical and conceptual extension of the classical game theory.

The space of all conceivable decision-making paths of the actors is extended from the purely real, measurable space into the space of complex numbers (real and imaginary numbers). Through the concept of possible quantum-theoretical entanglement of the decision-making paths in the imaginary space of all conceivable quantum strategies, common schools of thought that have arisen from cultural or moral norms can be included in the evolutionary dynamics.



Strategies of each node (of each player): (green, black),  $x(t)$  : Fraction of player with strategy „green“ as a function of time  $t$   
 Grey region: Group dependent collective cultural or moral standard

Through a quantum-theoretical entanglement of the imaginary decision-making paths within an actor network, a population can succeed in escaping a dilemma-like situation if the value of the entanglement exceeds a certain threshold value.



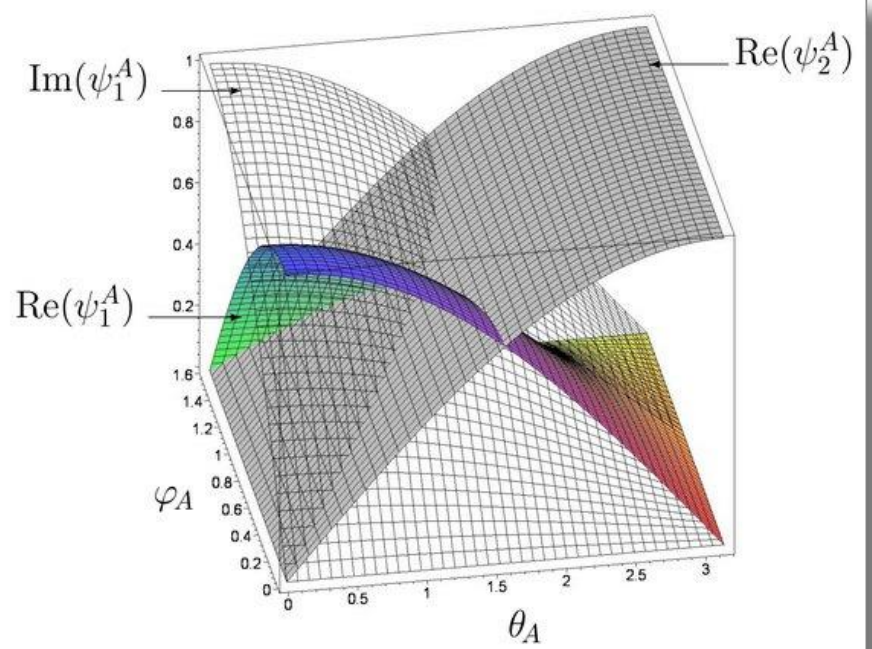
$$|\psi_A\rangle = \psi_1^A |s_1^A\rangle + \psi_2^A |s_2^A\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ -\psi_2^A \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_A$$

$$|s_1^A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_2^A\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_1^A = e^{i\varphi_A} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right), \quad \psi_2^A = \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)$$

$$|\psi_A\rangle = \hat{U}(\theta_A, \varphi_A) |s_1^A\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_A} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Die reinen Zustände  $|s_1^A\rangle$  und  $|s_2^A\rangle$  bilden die Basis des Hilbertraums  $\mathcal{H}_A$  des Spielers A und repräsentieren die reinen Strategien  $s_1^A$  und  $s_2^A$  des Spiels. Der Entscheidungsoperator des Spielers  $\mu$  hängt von den beiden Entscheidungswinkeln  $\theta_\mu$  und  $\varphi_\mu$  ab und ist explizit wie folgt definiert:

$$\hat{U}_\mu(\theta_\mu, \varphi_\mu) := \begin{pmatrix} e^{i\varphi_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) & e^{-i\varphi_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \forall \quad \theta_\mu \in [0, \pi] \wedge \varphi_\mu \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad .$$



**Reellwertige und imaginäre Komponenten des zweidimensionalen Quantenspinors  $|\psi\rangle_A = \hat{U}(\theta_A, \varphi_A) |s_1^A\rangle$  des Spielers A als Funktion der Quantenstrategien  $\theta_A$  und  $\varphi_A$ .**

Durch die Festlegung der Entscheidungswinkel  $\theta_\mu$  und  $\varphi_\mu$  wählt der Spieler seine Quantenstrategie. Die klassische, reine Strategie  $s_1$  legt der Spieler durch die Wahl  $\theta = 0$  und  $\varphi = 0$  fest:

$$\widehat{s}_1 := \hat{U}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wohingegen die reine Strategie  $s_2$  durch  $\theta = \pi$  und  $\varphi = 0$  festgelegt ist:

$$\widehat{s}_2 := \hat{U}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zusätzlich zu diesen reinen, klassischen Strategien ist die Quantenstrategie  $\widehat{Q}$  wie folgt definiert

$$\widehat{Q} := \hat{U}(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

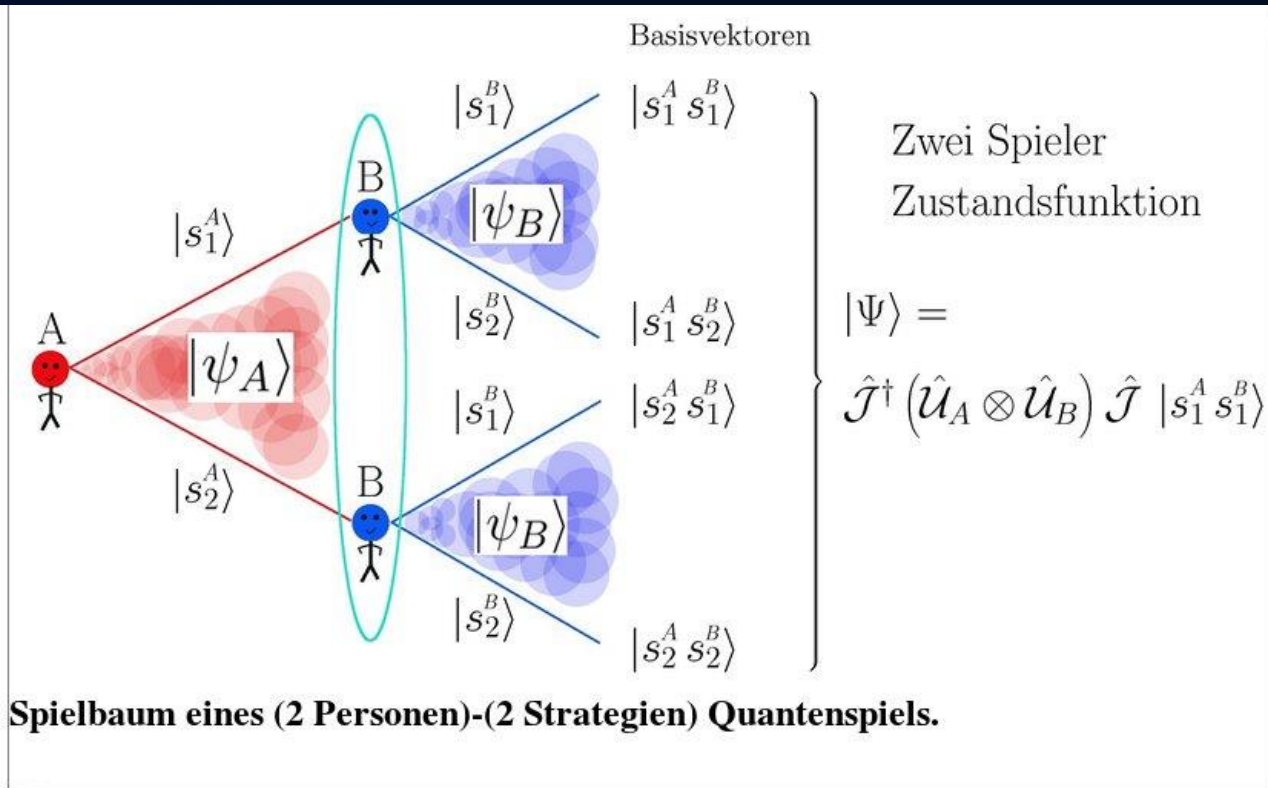
Um den Operatorformalismus der Quanten-Spieltheorie und das Konzept der Quantenstrategien besser zu verstehen, veranschaulicht die nebenstehende Abbildung die reellwertigen und imaginären Komponenten  $\psi_1^A$  und  $\psi_2^A$  des zweidimensionalen Quantenspinors  $|\psi\rangle_A$  des Spielers A. Die farbige, untransparente Fläche in der Abbildung veranschaulicht den reellwertigen Anteil der ersten Spinorkomponente ( $\text{Re}(\psi_1^A)$ ), die durchsichtige graue Fläche beschreibt dessen imaginären Anteil ( $\text{Im}(\psi_1^A)$ ) und die graue undurchsichtige Fläche zeigt den reellwertigen Teil der zweiten Spinorkomponente ( $\text{Re}(\psi_2^A)$ ) in Abhängigkeit der Winkel  $\theta_A$  und  $\varphi_A$ . Da die zweite Spinorkomponente lediglich reellwertige Anteile besitzt veranschaulicht die Abbildung lediglich drei Flächen. Die Menge der klassischen gemischten Strategien



lediglich reellwertige Anteile besitzt veranschaulicht die Abbildung lediglich drei Flächen. Die Menge der klassischen gemischten Strategien des Spielers A ( $\tilde{\mathcal{S}}^A = \{\tilde{s}_1^A, \tilde{s}_2^A\}$ ) ist eine echte Teilmenge des strategischen Hilbertraums des Spielers A ( $\mathcal{H}_A$ ) und wird formal realisiert, indem man den Winkel  $\varphi_A$  auf null setzt:

$$\tilde{\mathcal{S}}^A = \left\{ |\psi\rangle_A = \hat{U}(\theta_A, \varphi_A) |s_1^A\rangle \mid \varphi_A \equiv 0, \theta_A \in [0, \pi] \right\} \subsetneq \mathcal{H}_A \quad .$$

In diesem Fall ( $\varphi_A \equiv 0$ ) verschwinden alle imaginären Anteile des Zustandes  $|\psi\rangle_A$  und als Folge dessen können die klassischen gemischten Strategien durch Variation des Winkels  $\theta \in [0, \pi]$  realisiert werden. Für  $\varphi_A > 0$  verschwinden jedoch die imaginären Anteile nicht und diese Art von Quantenstrategien haben kein Pendant in der klassischen Spieltheorie. Da der Entscheidungsoperator auf den reinen Anfangszustand der Strategie  $s_1$  wirkt, entstehen mögliche imaginäre Anteile im Zustand  $|\psi\rangle_A$  lediglich in der ersten Spinorkomponente und man nennt deshalb diese Teilmenge von Quantenstrategien die sogenannten  $s_1$ -Quantenstrategien. Die quantentheoretische Beschreibung des Entscheidungszustandes des Spielers A kurz vor der definitiven Auswahl und Bekundung der reinen Strategie besitzt demnach im Allgemeinen neben den reellwertigen auch imaginäre Anteile. Bei  $s_1$ -Quantenstrategien kann sich der Spieler nur im imaginären Raum der ersten Strategie gedanklich bewegen. Eine grundlegende Eigenschaft der gesamten Quantentheorie ist die prinzipielle Unbeobachtbarkeit des Quantenzustandes. Diese Eigenschaft spiegelt sich in der Quanten-Spieltheorie in der Unbeobachtbarkeit des Gedankenprozesses wider. Die einzelnen Inhalte, Gedankenwege und gefühlsauslösende Überlegungen, die während des Entscheidungsprozesses im Gehirn des Spielers (bewusst oder unterbewusst) ablaufenden, können nicht direkt gemessen werden.  $s_1$ -Quantenstrategien können als der gedankliche Weg während des Entscheidungsprozesses interpretiert werden, welcher vom gedanklichen Ursprung her von der klassischen Strategie  $s_1$  startet und hypothetisch, gebunden an die Wünsche und Ängste des Spielers, den Gedankenweg weiterbildet. Aus diesem Grund besitzen die  $s_1$ -Quantenstrategien (bzw.  $s_2$ -Quantenstrategien), die speziell bei einer der reinen klassischen Strategien starten ( $\{(\theta_A \equiv 0, \varphi_A) \mid \varphi_A \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ ), eine besondere Bedeutung.



Die quantenspieltheoretische Erweiterung beschreibt somit den Entscheidungszustand eines Spielers A als einen im komplexen Hilbertraum definierten Zustandsvektor. Der Spielbaum eines (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiels ist in der nebenstehenden Abbildung visualisiert. Der Zwei-Spielerzustand  $|\Psi\rangle$  ist ein vierkomponentiger Spinor, welcher auf dem gemeinsamen Hilbertraum der Spieler ( $\mathcal{H} := \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ) definiert ist. Die Basisvektoren dieses vierdimensionalen komplexwertigen Raumes werden durch die vier möglichen, klassischen Strategienkombinationen (messbaren Eigenzustände des Quantensystems) gebildet ( $|s_1^A s_1^B\rangle := (1, 0, 0, 0)$ ,  $|s_1^A s_2^B\rangle := (0, -1, 0, 0)$ ,  $|s_2^A s_1^B\rangle := (0, 0, -1, 0)$  und  $|s_2^A s_2^B\rangle := (0, 0, 0, 1)$ ). Der Zwei-Spieler-Anfangszustand  $|s_1^A s_1^B\rangle$  bildet sich durch das äußere Produkt der Ein-Spieler Zustände  $|s_1^A\rangle$  und  $|s_1^B\rangle$ . Die vektorielle Repräsentation der allgemeinen Ein-

Spieler Zustände  $|\psi_A\rangle$ , bzw.  $|\psi_B\rangle$  ist wie folgt durch die Basen der reinen Zustände definiert:

$$|\psi_A\rangle := \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ -\psi_2^A \end{pmatrix} = \psi_1^A |s_1^A\rangle + \psi_2^A |s_2^A\rangle, \quad |\psi_B\rangle := \begin{pmatrix} \psi_1^B \\ -\psi_2^B \end{pmatrix} = \psi_1^B |s_1^B\rangle + \psi_2^B |s_2^B\rangle$$

$$\text{wobei: } |s_1^\mu\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_2^\mu\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |s_1^A s_1^B\rangle := |s_1^A\rangle \otimes |s_1^B\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der finale Zwei-Spielerzustand eines simultanen Zwei-Strategien-'One Shot'- Quantenspiels wird somit durch den vierkomponentigen Quantenzustand  $|\Psi\rangle$  beschrieben, welcher sich in der Eisert'schen Repräsentation wie folgt aus dem Anfangszustand  $|\Psi_0\rangle = \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle$  entwickelt

$$|\Psi\rangle = \widehat{\mathcal{J}}^\dagger (\widehat{U}_A \otimes \widehat{U}_B) \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle, \quad |\Psi_0\rangle = \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) \\ 0 \\ 0 \\ -i \sin(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix},$$

wobei  $\widehat{\mathcal{J}} := (J_{\alpha\beta})$ ,  $\alpha, \beta = 1 \dots 4$  die von dem Parameter  $\gamma$  abhängige Verschränkungsmatrix (bzw. den Verschränkungsoperator) beschreibt

$$\widehat{\mathcal{J}} := e^{-i \frac{\gamma}{2} (\widehat{s}_2 \otimes \widehat{s}_2)} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) & 0 & 0 & -i \sin(\frac{\gamma}{2}) \\ 0 & \cos(\frac{\gamma}{2}) & i \sin(\frac{\gamma}{2}) & 0 \\ 0 & i \sin(\frac{\gamma}{2}) & \cos(\frac{\gamma}{2}) & 0 \\ -i \sin(\frac{\gamma}{2}) & 0 & 0 & \cos(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix} \mathbb{I}, \quad \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$\widehat{U}_A := (U_{\alpha\beta}^A)$ ,  $\alpha, \beta = 1 \dots 2$  und  $\widehat{U}_B := (U_{\alpha\beta}^B)$ ,  $\alpha, \beta = 1 \dots 2$  stellen die von den Winkeln  $\theta_A, \varphi_A$  und  $\theta_B, \varphi_B$  abhängigen Entscheidungsmatrizen (Entscheidungsoperatoren) der Spieler A und B dar.

Der Erwartungswert der Auszahlungen der Spieler wird zusätzlich durch die Spielmatrix (siehe nebenstehende Auszahlungstabelle) mitbestimmt:

$$\$A = \$_{11}^A P_{11} + \$_{12}^A P_{12} + \$_{21}^A P_{21} + \$_{22}^A P_{22}$$

$$\$B = \$_{11}^B P_{11} + \$_{21}^B P_{12} + \$_{12}^B P_{21} + \$_{22}^B P_{22}$$

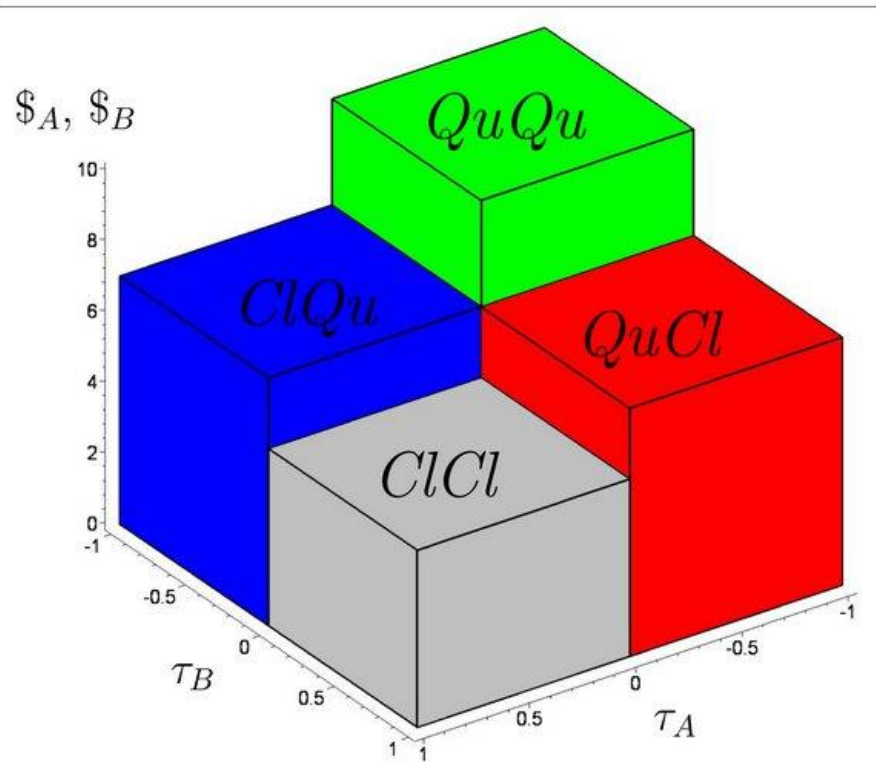
mit:  $P_{kl} = |\langle s_k^A s_l^B | \Psi \rangle|^2$ ,  $k, l = \{1, 2\}$

A \ B	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	$(\$_{11}^A, \$_{11}^B)$	$(\$_{12}^A, \$_{21}^B)$
$s_2^A$	$(\$_{21}^A, \$_{12}^B)$	$(\$_{22}^A, \$_{22}^B)$

**Allgemeine Auszahlungsmatrix eines (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels.**

Dieser Erwartungswert der Auszahlungen stellt eine Erweiterung des aus der klassischen Spieltheorie bekannten Konzepts der Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien dar.

Um die Auswirkungen des quantenspieltheoretischen Konzepts auf die dem Spieler ratsame Wahl der Entscheidung zu untersuchen, wird im Folgenden die Struktur der quantenspieltheoretisch erweiterten gemischten Auszahlungsfunktion untersucht. Im Unterschied zur klassischen Auszahlungsfunktion ( $\tilde{\$}^\mu(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)$ ), die lediglich von den gemischten Strategien des Spielers A ( $\tilde{s}^A$ ) und des Spielers B ( $\tilde{s}^B$ ) abhängt, hängt die quantentheoretische Erweiterung der Auszahlungsfunktion im Allgemeinen von fünf Parametern ab: Die vier Winkel der Entscheidungsoperatoren ( $\theta_A, \varphi_A, \theta_B$  und  $\varphi_B$ ) und der Parameter  $\gamma$ , welcher die Stärke der Strategienverschränkung quantifiziert.



**Visualisierungsraum der quantentheoretisch erweiterten Auszahlung  $\$$  als Funktion der reduzierten  $s_1$ -Quantenstrategien  $\tau_A$  des Spielers A und  $\tau_B$  des Spielers B.**

Um die Auszahlungsfunktion dennoch als Fläche in einem dreidimensionalen Raum zu visualisieren, reduziert man deren Abhängigkeiten, indem man einerseits den Verschränkungsparameter  $\gamma$  fixiert und die Menge der Quantenstrategien auf diejenigen beschränkt, die vom Ursprung der reinen, klassischen  $s_1$ -Strategie starten. Die Abhängigkeiten des vierkomponentigen Zwei-Spieler Quantenzustand  $|\Psi\rangle$  werden durch die Einführung zweier neuer Parameter ( $\tau_A$  und  $\tau_B$ ) reduziert:

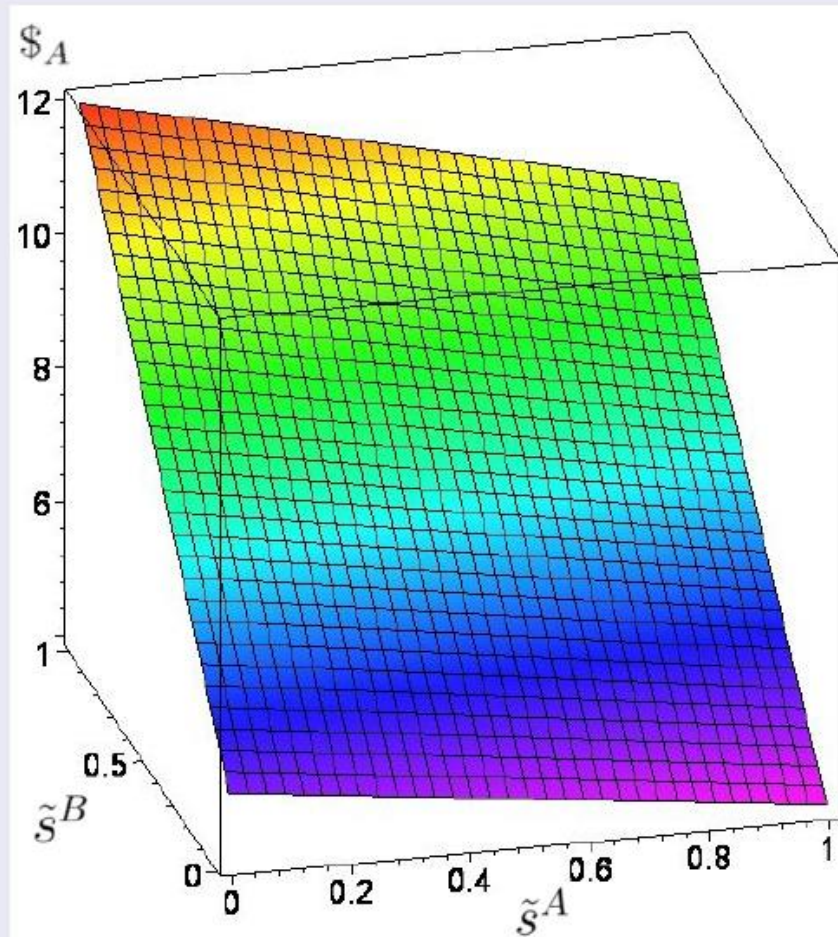
$|\Psi\rangle = |\Psi(\theta_A, \varphi_A, \theta_B, \varphi_B)\rangle \rightarrow |\Psi(\tau_A, \tau_B)\rangle$ . Die für jeden Spieler wählbaren Entscheidungswinkel  $\theta$  und  $\varphi$  werden dadurch auf einen einzigen Parameter  $\tau \in [-1, 1]$  reduziert. Positive  $\tau$ -Werte entsprechen den klassischen gemischten Strategien, wohingegen negative  $\tau$ -Werte Quantenstrategien mit  $\theta = 0$  und  $\varphi > 0$  repräsentieren. Der gesamte quantentheoretische Strategienraum wird dadurch in vier separate Regionen unterteilt: in den absolut klassischen Bereich (ClCl:  $\tau_A, \tau_B \geq 0$ ), den absoluten Quantenbereich (QuQu:  $\tau_A, \tau_B < 0$ ) und in die beiden semi-klassischen Quantenbereiche (ClQu:  $\tau_A \geq 0 \wedge \tau_B < 0$  und QuCl:  $\tau_A < 0 \wedge \tau_B \geq 0$ ). Durch diese  $(\tau_A, \tau_B)$ -Repräsentation wird die Menge der möglichen Quantenstrategien auf die folgende Untermenge reduziert:

$$\underbrace{\{(\tau, 0) \mid \tau \in [0, 1]\}}_{\text{klassischer Bereich Cl}} \quad \wedge \quad \underbrace{\{(0, \tau \frac{\pi}{2}) \mid \tau \in [-1, 0]\}}_{\text{Quantenbereich Ql}}$$

Die nebenstehende Abbildung stellt die vier Regionen des Visualisierungsraums der quantentheoretischen Auszahlungsfunktion dar. Die absolut klassische Region (ClCl,  $\varphi_A, \varphi_B \equiv 0$ ) befindet sich im vorderen Bereich, die Region in welchem beide Spieler eine Quantenstrategie

# Quantum extension of dominant class games

## Classical payoff for player A



A \ B	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	(10,10)	(4,12)
$s_2^A$	(12,4)	(5,5)

**Table:** Payoffmatrix of a dominant, prisoners dilemma like game.

This dominant, prisoners dilemma like game has only one pure, symmetric Nash equilibrium  $(s_2^A, s_2^B)$  which is the only ESS of the evolutionary game.

## Teil III.2.3 Symmetrische (2x2)-Quantenspiele

Parametersätze	Spielklasse	$\$_{11}$	$\$_{12}$	$\$_{21}$	$\$_{22}$	Nash-Gleichgewichte
$Set_A$	Dominantes Spiel	10	4	12	5	Ein reines Nash-Gleichgewicht $(s_2^A, s_2^B)$
$Set_B$	Koordinations-spiel	10	4	9	5	Zwei reine NEs, ein internes NE $(s^* = \frac{1}{2})$
$Set_C$	Anti-Koordinations-spiel	10	7	12	5	Zwei reine NEs, ein internes NE $(s^* = \frac{1}{2})$

Parameterwerte der drei symmetrischen Beispielspiele.

Die auf der rechten Seite dargestellte Abbildung stellt die quantentheoretisch erweiterte Auszahlung  $\$A$  des Spielers A (untransparente Fläche) und  $\$B$  des Spielers B (transparente Fläche) als Funktion der reduzierten  $s_1$ -Quantenstrategien  $\tau_A$  des Spielers A und  $\tau_B$  des Spielers B dar. Als zugrundeliegender Parametersatz wurde  $Set_A$  verwendet und die Stärke der Quantenverschränkung der Spielerstrategien wurde auf null gesetzt ( $\gamma = 0$ ). Als Visualisierungsraum wurde der in der oberen Abbildung beschriebene reduzierte Raum verwendet, wobei der absolute Quantenbereich QuQu, bei dem beide Spieler eine Quantenstrategie benutzen,

im hinteren Teil des Diagramms zu finden ist und die rein klassische Region ClCl nach vorne projiziert wurde. Die Abbildung zeigt deutlich, dass das unverschränkte Quantenspiel identisch mit der klassischen Version des Spiels ist. Im Bereich, in dem beide Spieler eine Quantenstrategie wählen ( $\tau_A < 0 \wedge \tau_B < 0$ ),

ist die Auszahlung der Spieler gleich der Auszahlung, als wenn die Spieler die klassische Strategie  $s_1$  gewählt hätten ( $\$A(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10, \$B(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$ ). Das Nash-Gleichgewicht des klassischen Spiels ( $(s_2^A, s_2^B)$ , die dominante Strategie) entspricht den folgenden  $\tau$ -Werten:

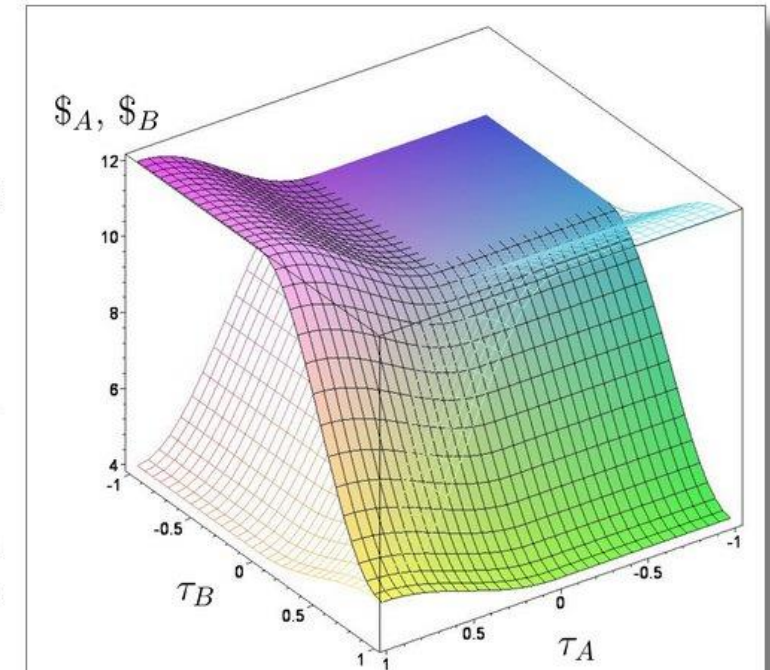
$(s_2^A, s_2^B) \hat{=} (\tau_A = 1, \tau_B = 1)$  und bleibt auch im unverschränkten Quantenspiel bestehen.

Die beiden Diagramme in der linken unteren Abbildung stellen die quantentheoretisch erweiterte Auszahlungsfunktion bei einem mittleren und dem maximalen Verschränkungswert dar. Die Struktur der Auszahlungsflächen innerhalb der vollständig klassischen Region ClCl verändert ihr Erscheinungsbild bei

Symmetrische (2 Personen)-(2 Strategien) Spiele lassen sich formal in drei unterschiedliche Spielklassen separieren (siehe Teil I).

### Dominante Spiele ( $Set_A$ )

Das durch Parametersatz  $Set_A$  definierte Spiel gehört der Klasse der dominanten Spiele an. Das Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien befindet sich bei der Strategienkombination, bei welcher beide Spieler die Strategie  $s_2$  spielen ( $s_2^A, s_2^B$ ).

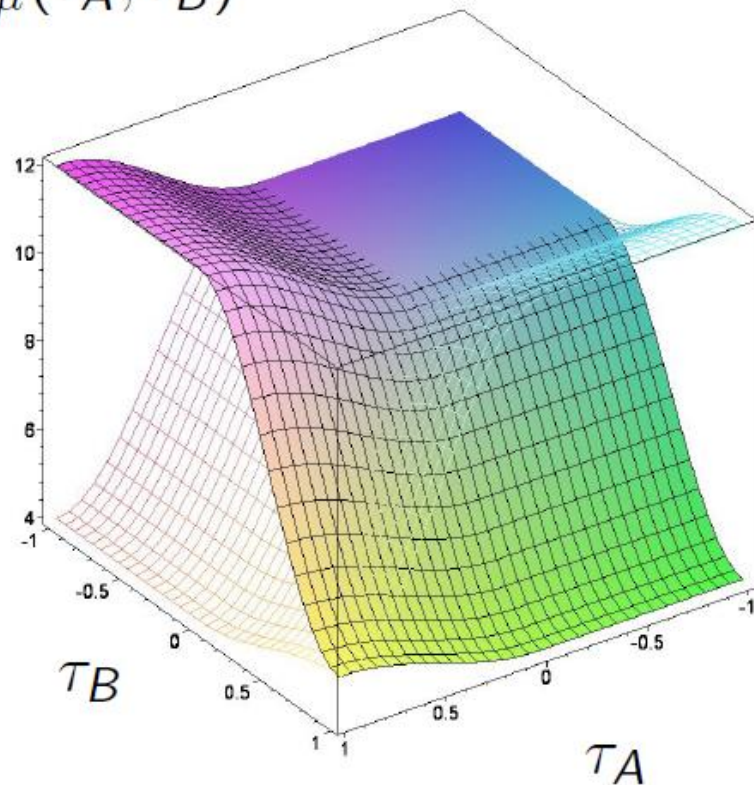


Quantentheoretisch erweiterte Auszahlung  $\$A$  des Spielers A (untransparente Fläche) und  $\$B$  des Spielers B (transparente Fläche) als Funktion der reduzierten  $s_1$ -Quantenstrategien  $\tau_A$  des Spielers A und  $\tau_B$  des Spielers B in einem unverschränkten Quantenspiel ( $\gamma = 0$ ) unter Verwendung des Parametersatzes  $Set_A$ .

# Quantum extension of dominant class games

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = 0$  (no entanglement)

$$\$_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$

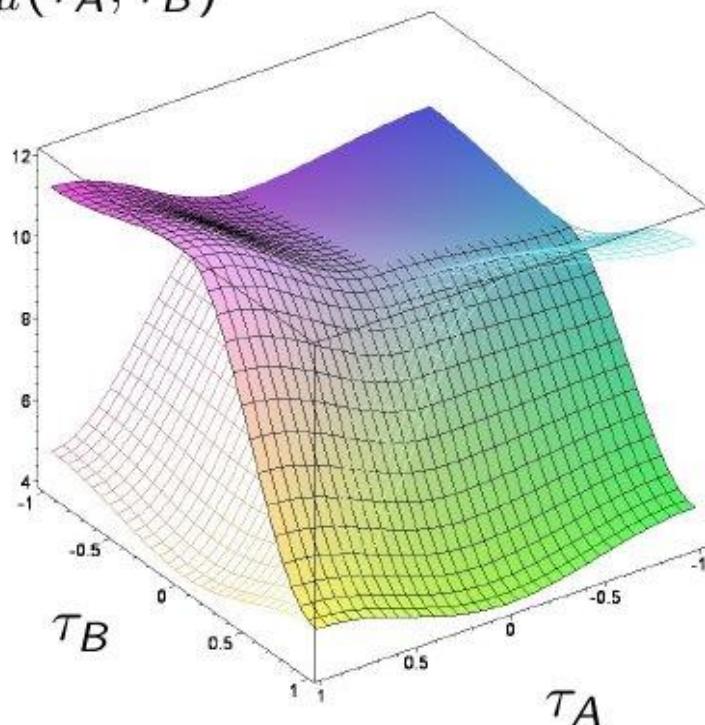


The diagram clearly exhibits that the non-entangled quantum game simply describes the classical version of the prisoner's dilemma game. For the case, that both players decide to play a quantum strategy ( $\tau_A < 0 \wedge \tau_B < 0$ ) their payoff is equal to the case where both players choose the classical pure strategy  $s_1$  ( $\$A(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$ ). The classical Nash equilibrium  $((s_2^A, s_2^B)$ , the dominant strategy) corresponds to the following  $\tau$ -values:  $(s_2^A, s_2^B) \hat{=} (\tau_A = 1, \tau_B = 1)$ .



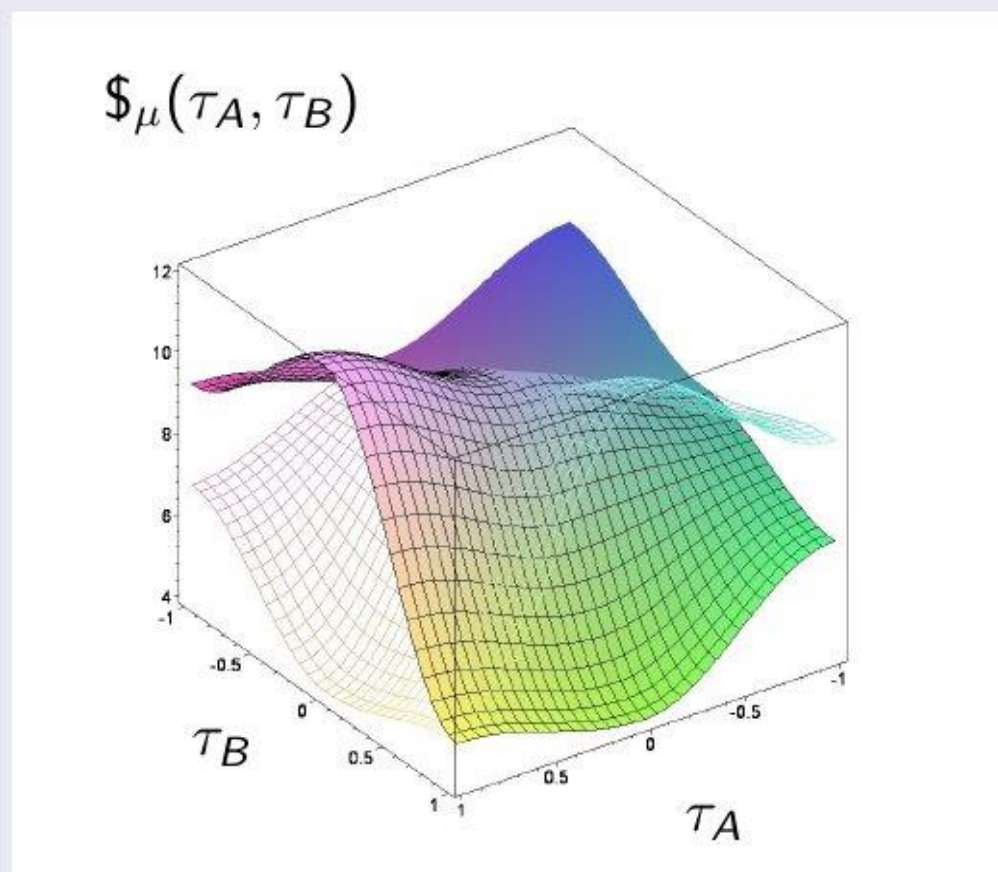
Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{10} \approx 0.31$

$$\mathcal{S}_\mu(\tau_A, \tau_B)$$



For the absolute classical region  $CICI$  the shape of the surfaces does not change, whereas for the partially classical-quantum ( $CIQu$  and  $QuCI$ ) and absolute quantum region regions  $QuQu$  the payoff structure changes due to a possible interference of quantum strategies within Hilbertspace. The structure of Nash-equilibria does not change for the left picture, whereas for the following pictures the previously present dominant strategy of the prisoner's dilemma game has disappeared and a new, advisable quantum Nash-equilibrium will appear at  $(\hat{Q}, \hat{Q} \hat{=} (\tau_A = -1, \tau_B = -1))$ . During the transition from this figure to the next picture two separate phenomena occur. At first, for an entanglement value  $\gamma_1 \approx 0.37$ , the best response for player A to the strategy  $s_2^B \hat{=} \tau_B = 1$  is no longer the strategy  $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$ , as  $\mathcal{S}_A(\tau_A = -1, \tau_B = 1) \approx 5.05$  is now higher than  $\mathcal{S}_A(\tau_A = 1, \tau_B = 1) = 5$ . Secondly, for an entanglement value  $\gamma_2 \approx 0.53$ , the best response for player A to the strategy  $\hat{Q}_B \hat{=} \tau_B = -1$  is no longer the strategy  $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$ , as  $\mathcal{S}_A(\tau_A = 1, \tau_B = -1) \approx 9.96$  is for  $\gamma_2 = 0.53$  lower than  $\mathcal{S}_A(\tau_A = -1, \tau_B = -1) = 10$ .

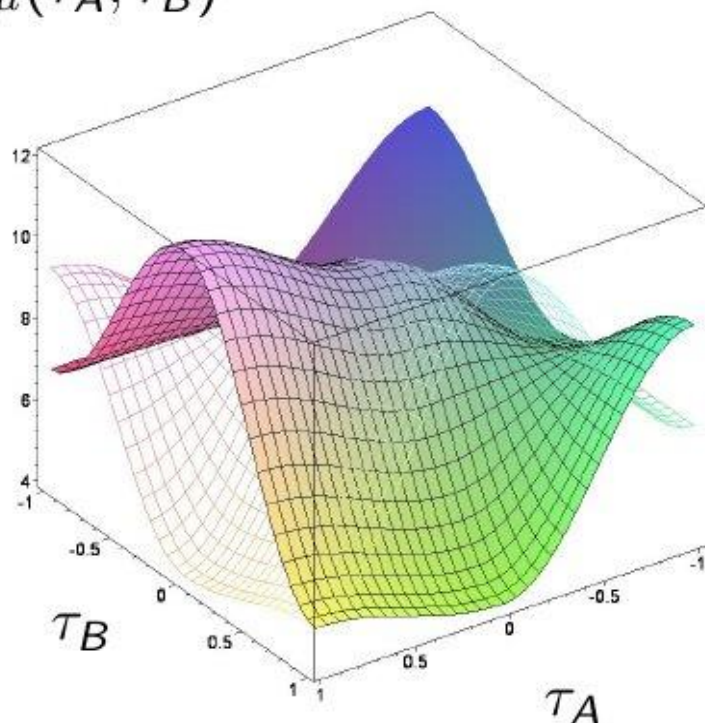
Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{8} \approx 0.52$



For the absolute classical region  $CICI$  the shape of the surfaces does not change, whereas for the partially classical-quantum ( $CIQu$  and  $QuCI$ ) and absolute quantum region regions  $QuQu$  the payoff structure changes due to a possible interference of quantum strategies within Hilbertspace. The structure of Nash-equilibria did not change for the last figure, whereas for this and the following pictures the previously present dominant strategy of the prisoner's dilemma game has disappeared and a new, advisable quantum Nash-equilibrium has appeared ( $\hat{Q}, \hat{Q} \hat{=} (\tau_A = -1, \tau_B = -1)$ ). During the transition from the last picture to this figure two separate phenomena occurred. At first, for an entanglement value  $\gamma_1 \approx 0.37$ , the best response for player A to the strategy  $s_2^B \hat{=} \tau_B = 1$  is no longer the strategy  $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$ , as  $S_A(\tau_A = -1, \tau_B = 1) \approx 5.05$  is now higher than  $S_A(\tau_A = 1, \tau_B = 1) = 5$ . Secondly, for an entanglement value  $\gamma_2 \approx 0.53$ , the best response for player A to the strategy  $\hat{Q}_B \hat{=} \tau_B = -1$  is no longer the strategy  $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$ , as  $S_A(\tau_A = 1, \tau_B = -1) \approx 9.96$  is for  $\gamma_2 = 0.53$  lower than  $S_A(\tau_A = -1, \tau_B = -1) = 10$ .

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{6} \approx 0.94$

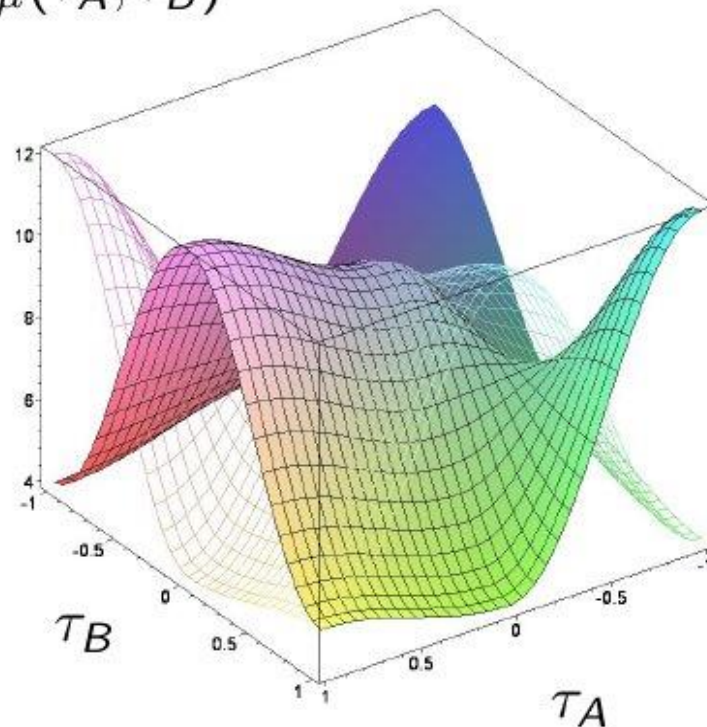
$$S_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The results show, that a quantum extension of a classical prisoner's dilemma game is able to change the structure of Nash-equilibria, and even previously present dominant strategies could become nonexistent, if the value of entanglement increases further than a defined  $\gamma$ -threshold. Players with a higher strategic entanglement value  $\gamma$  escape the dilemma as they see the advantage of the quantum strategy combination  $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$ , which is measured as if both are playing the classical strategy  $s_2$ .

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for  $\gamma = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$

$$S_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The results show, that a quantum extension of a classical prisoner's dilemma game is able to change the structure of Nash-equilibria, and even previously present dominant strategies could become nonexistent, if the value of entanglement increases further than a defined  $\gamma$ -threshold. Players with a higher strategic entanglement value  $\gamma$  escape the dilemma as they see the advantage of the quantum strategy combination  $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$ , which is measured as if both are playing the classical strategy  $s_2$ .

# Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

## Physics of Socio-Economic Systems with the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Wintersemester 2017/18)  
 von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske  
 Frankfurt am Main 10.01.2018

### Dritter Vorlesungsteil: Symmetrische (2 x 2) Quantenspiele

#### Die Quanten Spieltheorie und der verschränkte Zwei-Spieler Zustand

Dieses Maple-Worksheet illustriert das Konzept der Quanten-Spieltheorie an mehreren Beispielen.

```

> restart:
with(linalg):
with(LinearAlgebra):
with(plots):
with(RandomTools):
with(networks):
with(stats[statplots]):
with(plottools):
with(ColorTools):
    
```

Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungsraum eines Spielers, bevor dieser die endgültige Zustandsraum, dem sogenannten Hilbertraum. Die in diesem Worksheet verwendete mathematische Repräsentation wirkt. Die Entscheidungsoperatoren der Spieler A und B sind wie folgt definiert:

```

> UA:=subs({theta=ta,phi=pa},matrix(2,2,[exp(I*phi)*cos(theta/2),sin(theta/2),-sin(theta/2),exp(I*phi)*cos(theta/2)]);
UB:=subs({theta=tb,phi=pb},matrix(2,2,[exp(I*phi)*cos(theta/2),sin(theta/2),-sin(theta/2),exp(I*phi)*cos(theta/2)]);
    
```

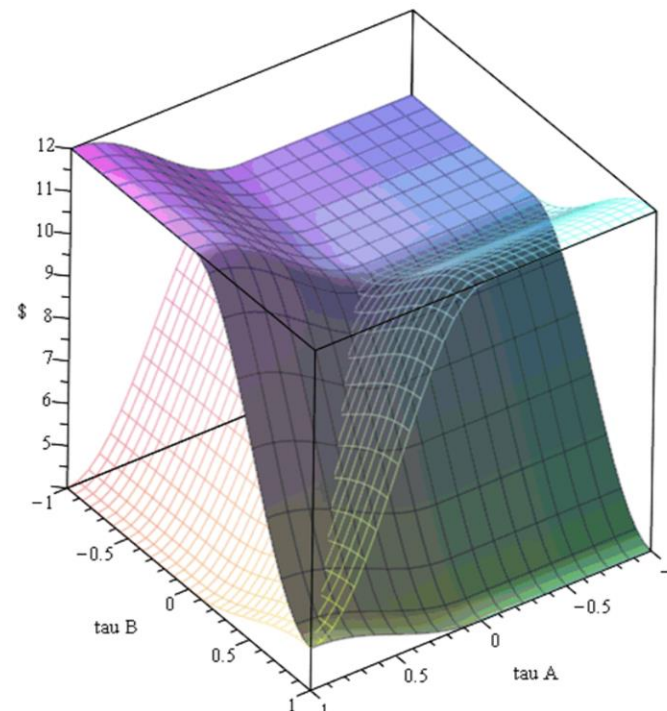
$$UA := \begin{bmatrix} e^{i p a} \cos\left(\frac{1}{2} t a\right) & \sin\left(\frac{1}{2} t a\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{2} t a\right) & e^{i p a} \cos\left(\frac{1}{2} t a\right) \end{bmatrix}$$

$$UB := \begin{bmatrix} e^{i p b} \cos\left(\frac{1}{2} t b\right) & \sin\left(\frac{1}{2} t b\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{2} t b\right) & e^{i p b} \cos\left(\frac{1}{2} t b\right) \end{bmatrix}$$

Mittels des äusseren Produktes erhält man den gemeinsamen (4x4)-Entscheidungsoperator:

```

> UA_T_UB:=matrix(4,4,[
UA[1,1]*UB[1,1],UA[1,1]*UB[1,2],UA[1,2]*UB[1,1],UA[1,2]*UB[1,2],
    
```



# Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

## (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 26.01.2021

**Ditter Vorlesungsteil: Quanten Spieltheorie**

Jupyter Notebook:  
Quanten Spieltheorie

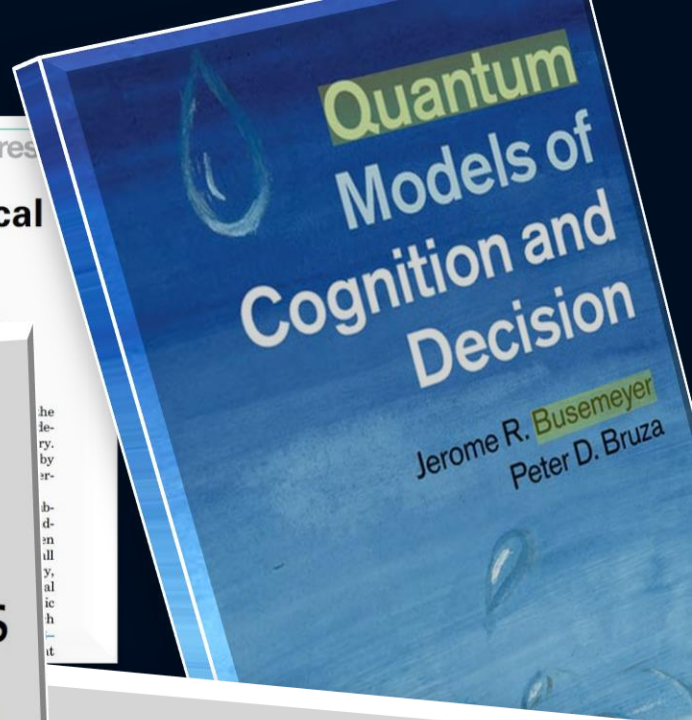
### Einführung

Die Annahme des vollständig verbundenen, zufälligen Netzwerks, welches die Grundlage der deterministischen evolutionären Spieltheorie bildet, ist in realen sozialen Netzwerken oft nicht erfüllt. In realen sozialen Netzwerken bilden sich oft weitgehend abgeschlossene Cluster von miteinander verbundenen Spielern, die zu anderen Clustern nur bedingt bzw. selten Kontakt haben. Diese Art von Cluster- bzw. Cliquenbildung kann zu einer unterschiedlichen Ausprägung von sozialen Normen innerhalb der einzelnen Teilgruppen führen. Soziale Normen können sich somit herausbilden, die den einzelnen Spielern neben ihrem *homo ökonomischen* Interesse auch den Blick auf das Wohl der eigenen Gruppe nahelegen. Eine solche Art von induziertem Gruppeninteresse wird im folgenden mittels des Ansatzes der Quanten-Spieltheorie mathematisch in die deterministischen Gleichungen der evolutionären Spieltheorie eingearbeitet. Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.

Die erste formale Beschreibung der Quanten-Spieltheorie wurde im Jahre 1999 von Eisert et al. vorgestellt. Diese oft zitierte Arbeit betrachtet die

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)  
**SCIENCE @ DIRECT®**  
 Journal of Mathematical Psychology 50 (2006) 220–241  
[www.elsevier.com/locate/jmp](http://www.elsevier.com/locate/jmp)  
**Journal of Mathematical Psychology**  
**Quantum dynamics of human decision-making**  
 Jerome R. Busemeyer<sup>\*</sup>, Zheng Wang, James T. Townsend  
 Indiana University, USA  
 December 2004; received in revised form 11 January 2006  
 available online 15 March 2006

**Feature Review**  
**Quantum cognition: a new theoretical approach to psychology**  
 Peter D. Bruza<sup>1</sup>, Zheng Wang<sup>2</sup>, and Jerome R. Busemeyer<sup>3</sup>  
<sup>1</sup>Information Systems School, GPO Box 2434, Queensland University of Technology, Brisbane  
<sup>2</sup>School of Communication, 3145 Derby Hall, Indiana University, USA  
<sup>3</sup>Department of Psychology, Indiana University, USA



Emmanuel Haven • Andrei Khrennikov  
 Editors  
**The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science**  
 Applications and Grand Challenges

- The *Quantum Penny Flip Game*  
 1999, D. A. Meyer, *Quantum strategies*, PRL 82 (1052)
- The *Quantum Prisoner's Dilemma*  
 1999, J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, *Quantum Games and Quantum Strategies*, PRL 83 (3077)
- The *Quantum Battle of Sexes*  
 2001, L. Marinatto and T. Weber, *A Quantum Approach To Static Games Of Complete Information*, Physics Letters A 272
- The *Quantum Coordination Game*  
 2003, B. A. Huberman and T. Hogg, *Quantum Solution of Coordination Problems*, Quantum Information Processing 2(6)
- The *Quantum Ultimatum Game*  
 2005, R. Vilela Mendes, *The Quantum Ultimatum Game*, Quantum Information Processing 4(1)

Journal of Mathematical Psychology 53 (2009) 303–305  
 Contents lists available at ScienceDirect  
**Journal of Mathematical Psychology**  
 journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jmp](http://www.elsevier.com/locate/jmp)  
**ELSEVIER**

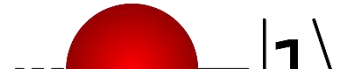
Editorial  
**Introduction to the special issue on quantum cognition**  
 Peter Bruza<sup>a</sup>, Jerome R. Busemeyer<sup>b,\*</sup>, Liane Gabora<sup>c</sup>  
<sup>a</sup> Queensland University of Technology, Faculty of Information Technology, GPO Box 2434, Brisbane, Australia  
<sup>b</sup> Indiana University, Department of Psychology, Bloomington, IN, United States  
<sup>c</sup> Columbia University, Department of Psychology, Kelowna, Canada

# Anwendungen der Quantenverschränkung

## Quantencomputer

Ein Quantencomputer basiert auf einem Prozessor, dessen Funktion auf den Gesetzen der Quantenmechanik beruht. In einem klassischen Computer werden sämtliche Informationen in „Bits“ (entweder Null oder Eins)

Qubit durch Verschränkung der Eigenzustände

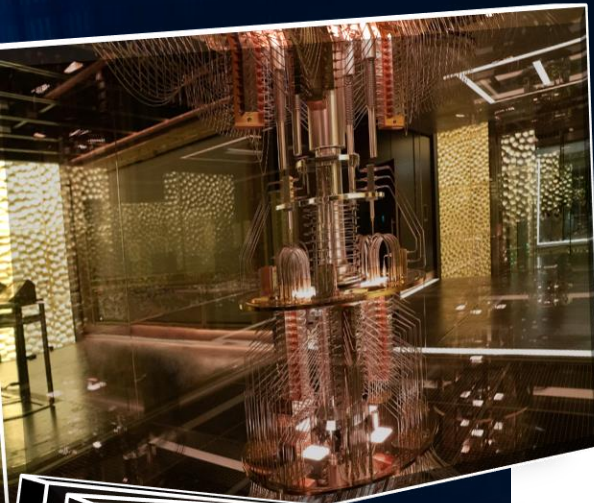


### Quantum Computer and Quantum Game Theory

2002, J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou and R. Han  
*Experimental realization of quantum games on a quantum computer*, PRL 88 (137902)

2007, R. Prevedel, A. Stefanov, P. Walther and A. Zeilinger  
*Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer*, New Journal of Physics 9 (205)

2008, P. Benicio, Melo de Sousa, R. V. Ramos  
*Multiplayer Quantum Games and its Application as Access Controller in Architecture of Quantum Computers*, arXiv:0802.3684v2



Science-Fiction Miniserie

DEVS

Raum aller denkbaren komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Teile) durch Verschränkung der Eigenzustände durch kulturelle oder andere Faktoren werden.



# Superpositionen von Eigenzuständen

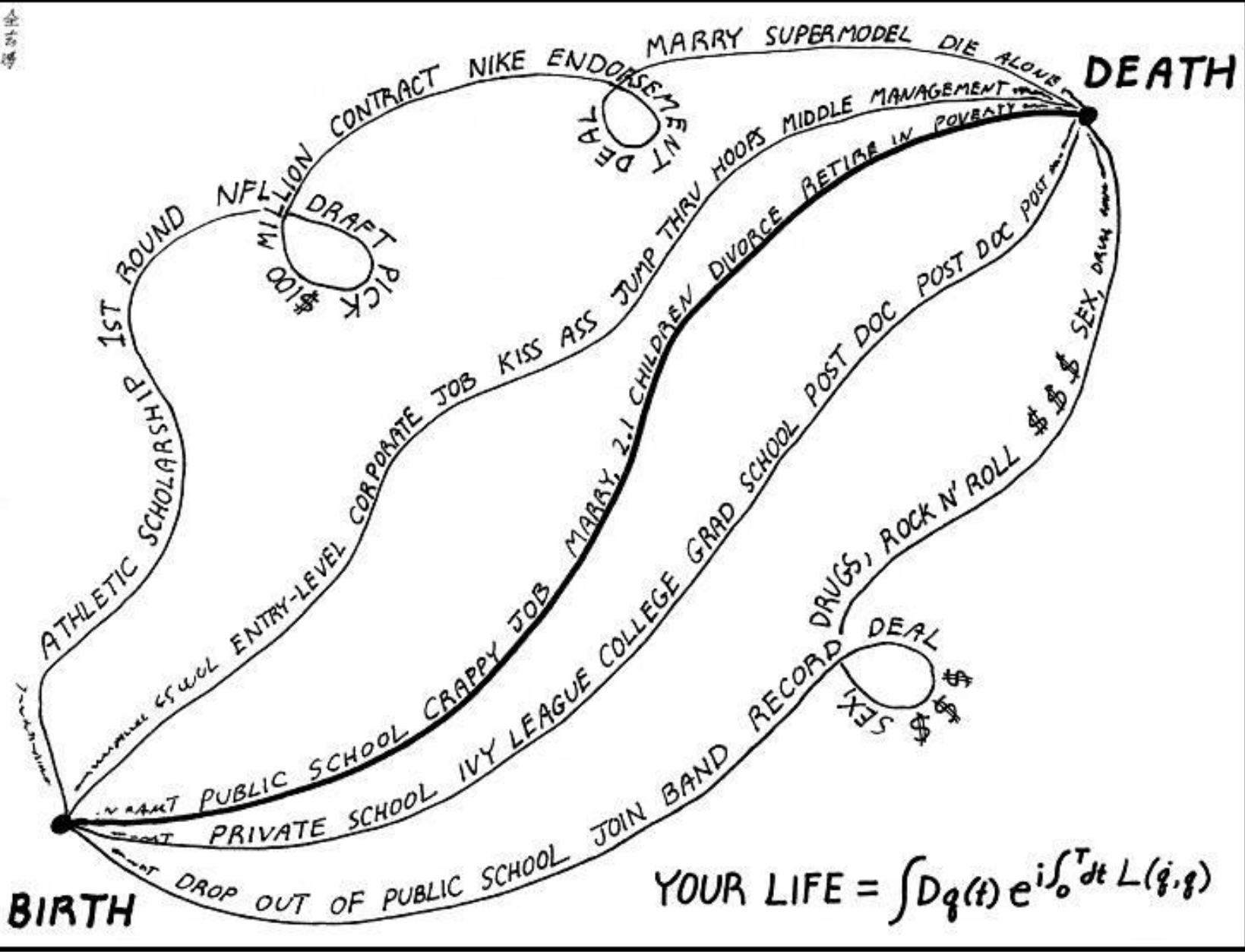
## Schrödingers Katze



Figure: Theoretische Versuchsanordnung des Gedankenexperiments.



The quantum-mechanical "[Schrödinger's cat](#)" paradox according to the Many-Worlds interpretation. In this interpretation, every quantum event is a branch point; the cat is both alive and dead, even before the box is opened, but the "alive" and "dead" cats are in different branches of the universe, both of which are equally real, but which do not interact with each other.<sup>[a]</sup>



Parallelwelten Interpretation (H.Everett)

$|s_1^A s_1^B\rangle$



Universum 1

$|s_1^A s_2^B\rangle$



Universum 2

$|s_2^A s_1^B\rangle$



Universum 3

$|s_2^A s_2^B\rangle$



Universum 4

# The Path Integral Formulation of Your Life



- The *Quantum* Penny Flip Game  
1999, D. A. Meyer, *Quantum strategies*, PRL 82 (1052)
- The *Quantum* Prisoner's Dilemma  
1999, J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, *Quantum Games and Quantum Strategies*, PRL 83 (3077)
- The *Quantum* Battle of Sexes  
2001, L. Marinatto and T. Weber, *A Quantum Approach To Static Games Of Complete Information*, Physics Letters A 272
- The *Quantum* Coordination Game  
2003, B. A. Huberman and T. Hogg, *Quantum Solution of Coordination Problems*, Quantum Information Processing 2(6)
- The *Quantum* Ultimatum Game  
2005, R. Vilela Mendes, *The Quantum Ultimatum Game*, Quantum Information Processing 4(1)



- Economics and Quantum Game Theory  
2002, E. W. Piotrowski and J. Sladkowski, *Quantum Market Games*, Physica A (312) 208  
2002, Kay-Yut Chen, T. Hogg and R. Beaulsoleil *A Quantum Treatment of Public Goods Economics*, Quantum Information Processing 1(6)  
2004, E. W. Piotrowski and J. Sladkowski *Quantum Game Theory in Finance*, Quantitative Finance 4 (1-7)  
2007, T. Hogg, P. Harsha and Kay-Yut Chen *Quantum Auctions*, Int. J. of Quantum Information 5:751-780  
2007, M. Hanauske, S. Bernius and B. Dugall, *Quantum Game Theory and Open Access Publishing*, Physica A, Vol.382 (2007), p.650-664 (physics/0612234)



- Quantum Computer and Quantum Game Theory  
2002, J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou and R. Han  
*Experimental realization of quantum games on a quantum computer*, PRL 88 (137902)  
2007, R. Prevedel, A. Stefanov, P. Walther and A. Zeilinger  
*Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer*, New Journal of Physics 9 (205)  
2008, P. Benicio, Melo de Sousa, R. V. Ramos *Multiplayer Quantum Games and its Application as Access Controller in Architecture of Quantum Computers*, arXiv:0802.3684v2
- Extensions of Quantum Game Theory  
2001, S. C. Benjamin and P. M. Hayden, *Multi-Player Quantum Games*, PRA 64 (030301) ...

## Quantum Game Theory and Scientific Communication

M. Hanauske, S. Bernius und B. Dugall “Quantum Game Theory and Open Access Publishing” (in *Physica A* 382 (2007) 650-664)

Matthias Hanauske, Wolfgang König und Berndt Dugall “Evolutionary Quantum Game Theory and Scientific Communication” (Beitrag auf der Konferenz “Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society” (2010))

Matthias Hanauske “Evolutionary Game Theory and Complex Networks of Scientific Information” (Chapter in the Springer Book “Models of science dynamics—Encounters between complexity theory and information science” (2011))

## Quantum Game Theory and Financial Crises

M. Hanauske, J. Kunz, S. Bernius und W. König “Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory-based analysis of financial crises” (in *Physica A* 389 (2010) 5084 – 5102)

## Quantum Game Theory and Experimental Economics

M. Hanauske, S. Bernius, W. König und B. Dugall “Experimental Validation of Quantum Game Theory” (Beitrag auf der Konferenz “Logic and the Foundations of Game and Decision Theory” (2008))

## Quantum Game Theory and Networks of Software Firms

## Quantum Game Theory and Social Norms in Firms



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

Journal of Mathematical Psychology 50 (2006) 220–241

Journal of  
Mathematical  
Psychology

[www.elsevier.com/locate/jmp](http://www.elsevier.com/locate/jmp)

# Quantum dynamics of human decision-making

Jerome R. Busemeyer\*, Zheng Wang, James T. Townsend

*Indiana University, USA*

Received 10 December 2004; received in revised form 11 January 2006

Available online 15 March 2006

---

## Abstract

A quantum dynamic model of decision-making is presented, and it is compared with a previously established Markov model. Both the quantum and the Markov models are formulated as random walk decision processes, but the probabilistic principles differ between the two approaches. Quantum dynamics describe the evolution of complex valued probability amplitudes over time, whereas Markov models describe the evolution of real valued probabilities over time. Quantum dynamics generate interference effects, which are not possible with Markov models. An interference effect occurs when the probability of the union of two possible paths is smaller than each individual path alone. The choice probabilities and distribution of choice response time for the quantum model are derived, and the predictions are contrasted with the Markov model.

© 2006 Elsevier Inc. All rights reserved.

*Keywords:* Quantum; Markov; Dynamics; Decision-making; Random-walk; Diffusion; Choice; Response-time

---

**A Brief Introduction to Quantum Formalism**  
*Emmanuel Haven and Andrei Khrennikov*

**Quantization in Financial Economics:  
An Information-Theoretic Approach**  
*Raymond J. Hawkins and B. Roy Frieden*

**Quantum Game Theoretical Frameworks in Economics**  
*Edward W. Piotrowski and Jan Sładkowski*

**The Intrinsic Quantum Nature of Classical Game Theory**  
*Y. Pelosse*

**Decision-Making and Cognition Modeling from the  
Theory of Mental Instruments**  
*Irina Basieva and Andrei Khrennikov*

**Adaptive Dynamics and an Optical Illusion**  
*Masanori Ohya and Yoshiharu Tanaka*

**Strategic Choice in Hilbert Space**  
*Charles E. Smith Jr. and Christopher Zorn*

1 **Voters' Preferences in a Quantum Framework** 141  
*Polina Khrennikova and Emmanuel Haven*

19 **Quantum Structure in Cognition Origins, Developments,  
Successes, and Expectations** 157  
*Diederik Aerts and Sandro Sozzo*

39 **Quantum Cognition, Neural Oscillators, and Negative Probabilities** 195  
*J. Acacio de Barros and Gary Oas*

59 **Quantum-Like Type Indeterminacy: A Constructive  
Approach to Preferences à la Kahneman and Tversky** 229  
*A. Lambert-Mogiliansky*

**Quantum Models of Human Causal Reasoning** 251  
*Jennifer S. Trueblood and Percy K. Mistry*

**A Quantum Probability Model for the Constructive  
Influence of Affective Evaluation** 267  
*Lee C. White, Emmanuel M. Pothos, and Jerome R. Busemeyer*

**Is there Room in Quantum Ontology for a Genuine  
Causal Role for Consciousness?** 293  
*Paavo Pyllkkänen*

**Big Challenges Section** 319

**Why Quantum?** 321  
*Andrei Khrennikov*

**Quantum Principles and Mathematical Models  
in Physics and Beyond** 335  
*Arkady Plotnitsky*

Emmanuel Haven • Andrei Khrennikov  
Editors

# The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science

Applications and Grand Challenges



# Quantum cognition: a new theoretical approach to psychology

Peter D. Bruza<sup>1</sup>, Zheng Wang<sup>2</sup>, and Jerome R. Busemeyer<sup>3</sup>

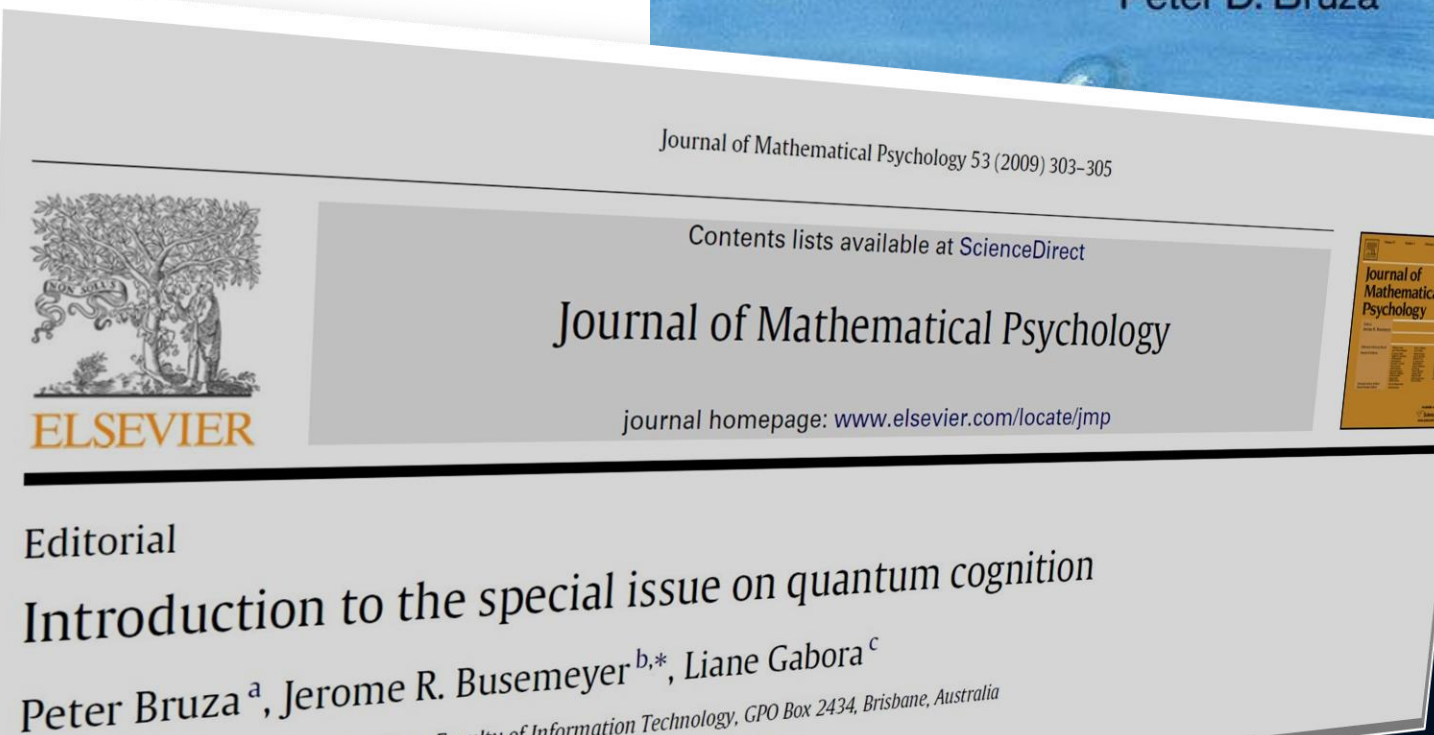
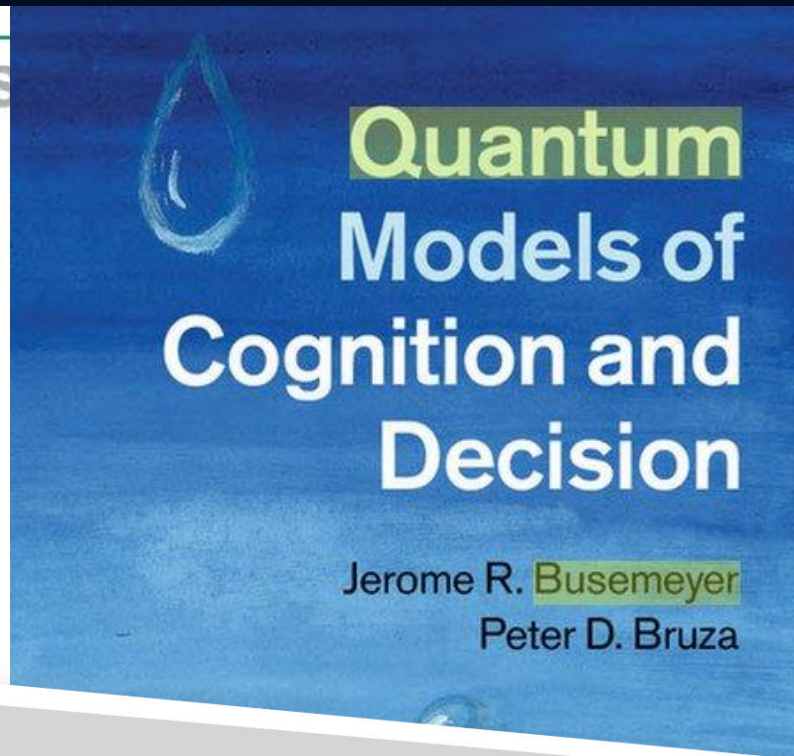
<sup>1</sup>Information Systems School, GPO Box 2434, Queensland University of Technology, Brisbane 4001, Australia

<sup>2</sup>School of Communication, 3145 Derby Hall, 154 North Oval Mall, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA

<sup>3</sup>Department of Psychological and Brain Sciences, 1101 East 10th Street, Indiana University, Bloomington, IN 48705, USA

What type of probability theory best describes the way humans make judgments under uncertainty and decisions under conflict? Although rational models of cognition have become prominent and have achieved much success, they adhere to the laws of classical probability theory despite the fact that human reasoning does not always conform to these laws. For this reason we have seen the recent emergence of models based on an alternative probabilistic framework drawn from quantum theory. These quantum models show promise in addressing cognitive phenomena that have proven recalcitrant to modeling by means of classical probability theory. This review compares and contrasts probabilistic models based on Bayesian or classical versus quantum principles, and highlights the advantages and disadvantages of each approach.

maker is rational and derived from. However, the Bayesian model does not describe the way humans make decisions. To what extent can quantum theory be used to describe human decision making? This review compares and contrasts probabilistic models based on Bayesian or classical versus quantum principles, and highlights the advantages and disadvantages of each approach.





ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

# Journal of Mathematical Psychology

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jmp](http://www.elsevier.com/locate/jmp)



## Quantum structure in cognition

Diederik Aerts\*

*Center Leo Apostel for Interdisciplinary Studies, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium  
Department of Mathematics, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium  
Department of Psychology, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium*

### ARTICLE INFO

*Article history:*

Received 27 May 2008

Received in revised form

17 April 2009

Available online 31 May 2009

*Keywords:*

Concept theories

Concept conjunction

Guppy effect

Overextension

Quantum mechanics

Interference

Superposition

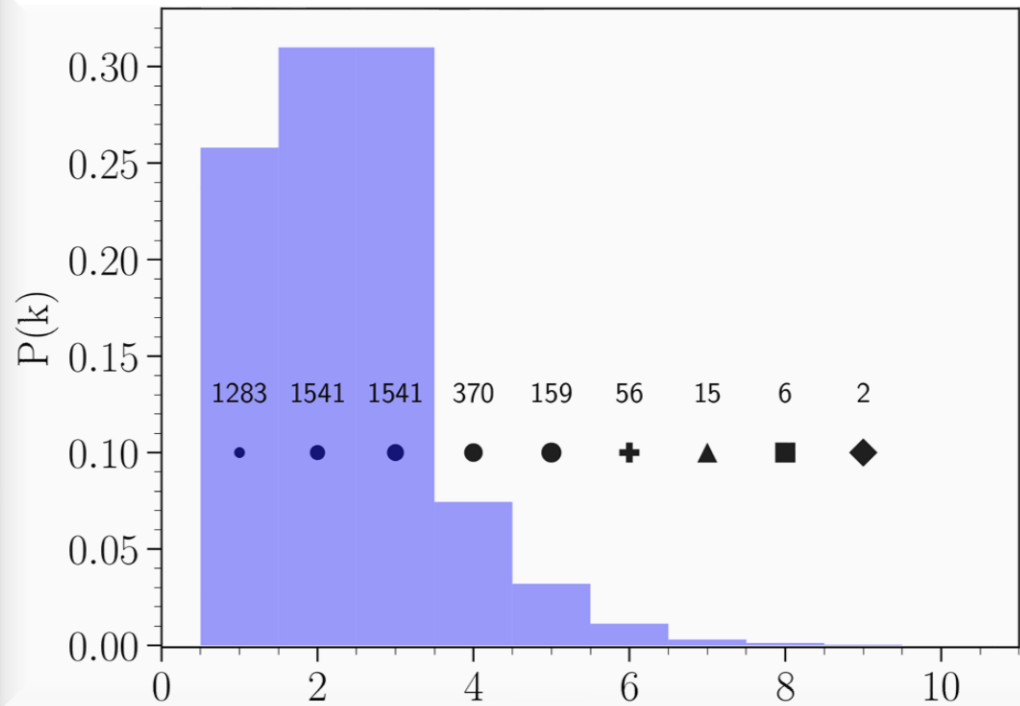
Hilbert space

Fock space

### ABSTRACT

The broader scope of our investigations is the search for the way in which concepts and their combinations carry and influence meaning and what this implies for human thought. More specifically, we examine the use of the mathematical formalism of quantum mechanics as a modeling instrument and propose a general mathematical modeling scheme for the combinations of concepts. We point out that quantum mechanical principles, such as superposition and interference, are at the origin of specific effects in cognition related to concept combinations, such as the guppy effect and the overextension and underextension of membership weights of items. We work out a concrete quantum mechanical model for a large set of experimental data of membership weights with overextension and underextension of items with respect to the conjunction and disjunction of pairs of concepts, and show that no classical model is possible for these data. We put forward an explanation by linking the presence of quantum aspects that model concept combinations to the basic process of concept formation. We investigate the implications of our quantum modeling scheme for the structure of human thought, and show the presence of a two-layer structure consisting of a classical logical layer and a quantum conceptual layer. We consider connections between our findings and phenomena such as the disjunction effect and the conjunction fallacy in decision theory, violations of the sure thing principle, and the Allais and Elsborg paradoxes in economics.

© 2009 Elsevier Inc. All rights reserved.



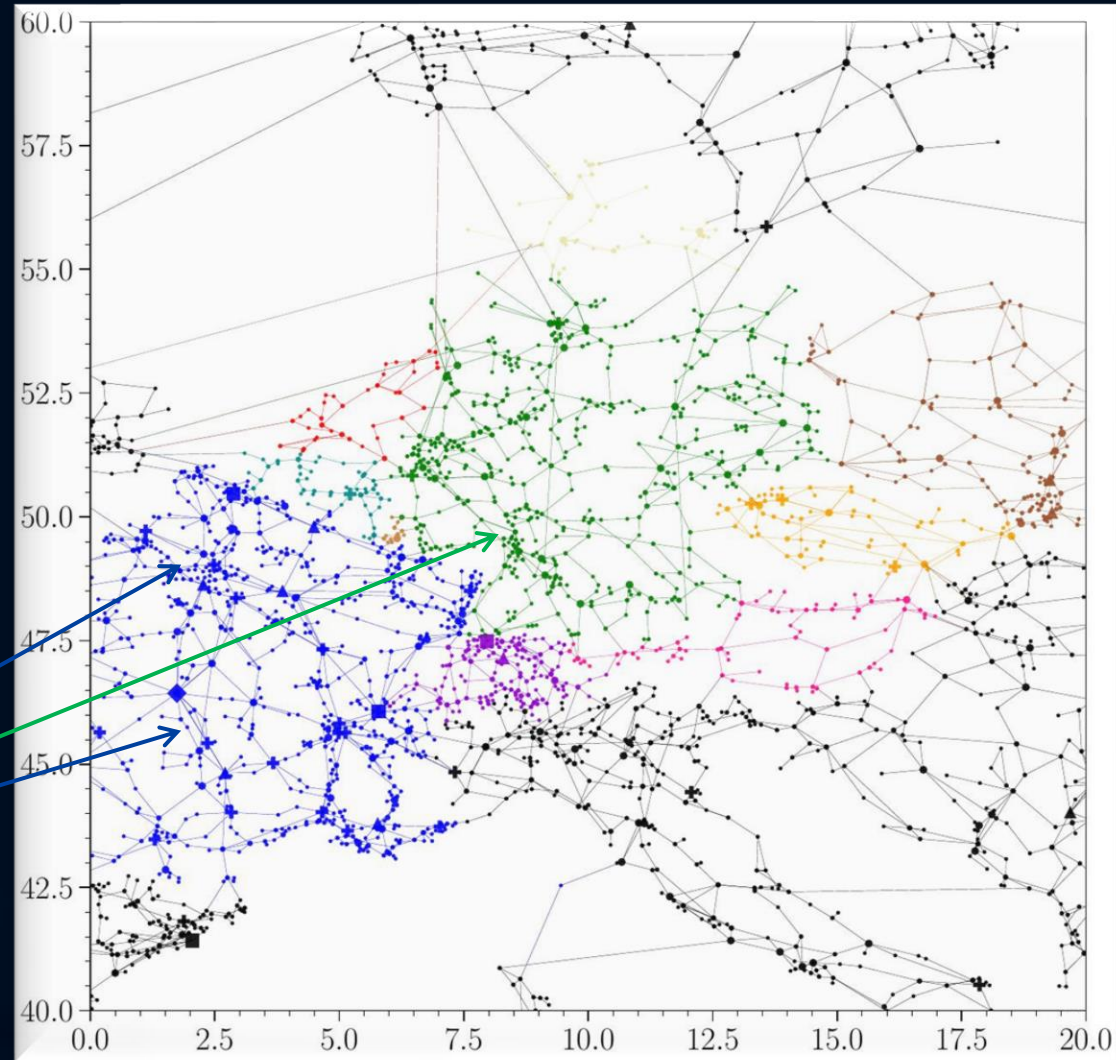
$$\mathcal{L} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$$

Set of electric bus policy makers:

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_{N_B}\}$$

Set of consumers:

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_{N_C}\}$$



$$\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^{N_B})$$

Payoff function of the consumers:

$$\mathcal{C} = (\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \dots, \mathcal{C}^{N_C})$$

uses:

$N_C$

uses:

# Defining the Game

Game:

$$\Gamma := (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \$)$$

Main groups of players:

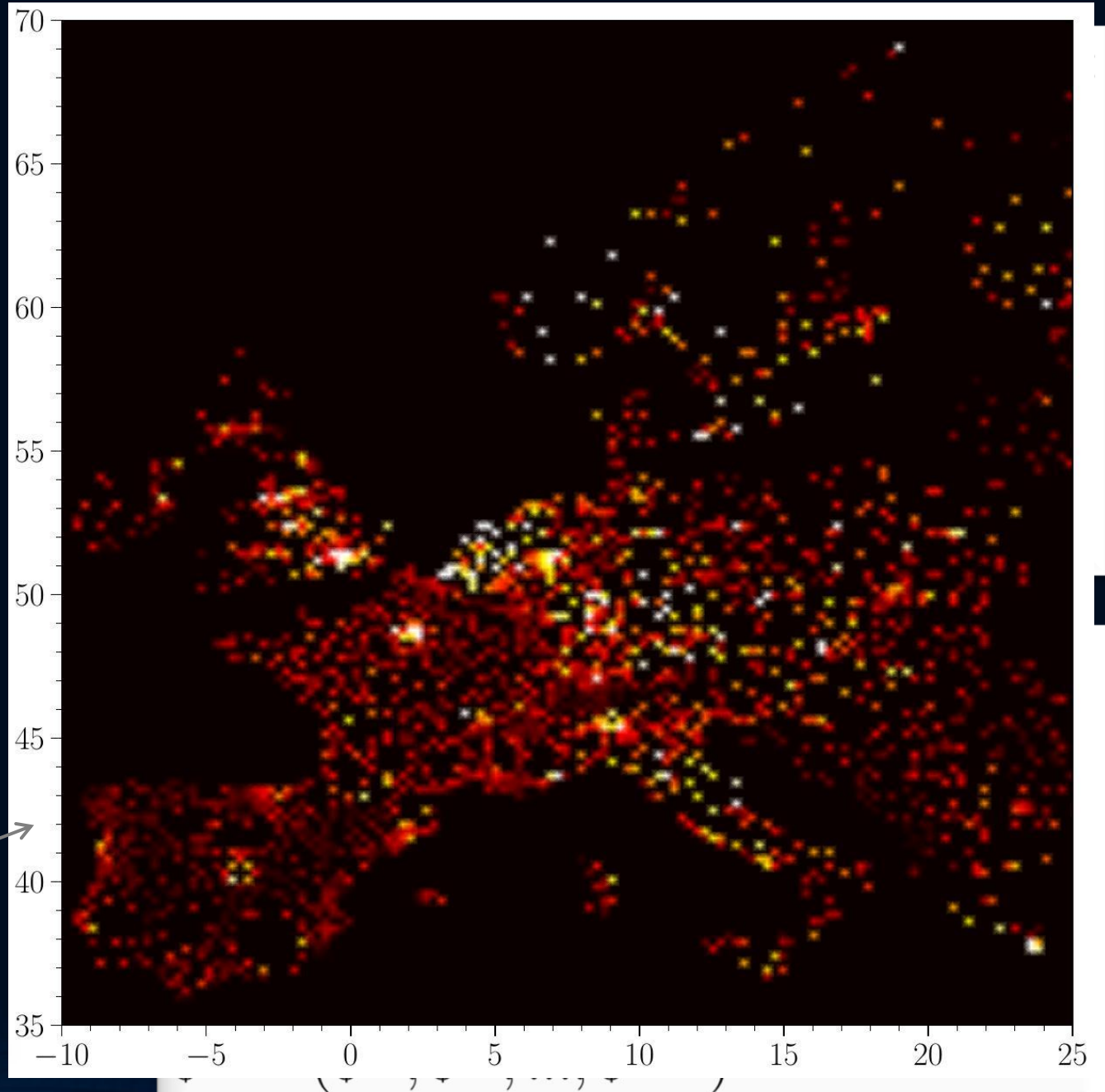
$$\mathcal{I} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$$

Set of electric bus policy makers:

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_{N_B}\}$$

Set of consumers:

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_{N_C}\}$$



# Defining the Game

Game:

$$\Gamma := (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \$)$$

Main groups of players:

$$\mathcal{I} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$$

Set of electric bus policy makers:

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_{N_B}\}$$

Set of consumers:

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_{N_C}\}$$

Set of strategies of the electric grid buses:

$$\mathcal{S}^B = \mathcal{S}^{b_1} \times \mathcal{S}^{b_2} \times \dots \times \mathcal{S}^{b_{N_B}}$$

$$\mathcal{S}^{b_i} = \left\{ s_1^{b_i}, s_2^{b_i}, \dots, s_{m_{b_i}}^{b_i} \right\}$$

Set of strategies of the consumers:

$$\mathcal{S}^C = \mathcal{S}^{c_1} \times \mathcal{S}^{c_2} \times \dots \times \mathcal{S}^{c_{N_C}}$$

$$\mathcal{S}^{c_j} = \left\{ s_1^{c_j}, s_2^{c_j}, \dots, s_{m_{c_j}}^{c_j} \right\}$$

Payoff of the Game:

$$\$ = (\$^B, \$^C) : (\mathcal{S}^B, \mathcal{S}^C) \rightarrow \mathbb{R}^{N_B + N_C}$$

Payoff function of the electric grid buses:

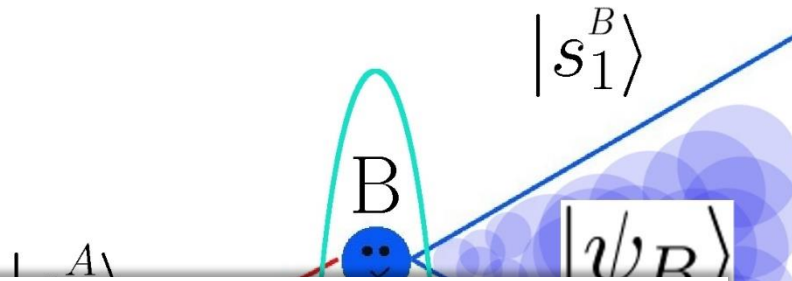
$$\$^B = (\$^{b_1}, \$^{b_2}, \dots, \$^{b_{N_B}})$$

Payoff function of the consumers:

$$\$^C = (\$^{c_1}, \$^{c_2}, \dots, \$^{c_{N_C}})$$

# Die verschränkte Spezies-Zustandsfunktion

$$|\Psi\rangle$$



the Wheeler-DeWitt equation says

$$\hat{H}(x)|\psi\rangle = 0$$

where  $\hat{H}(x)$  is the Hamiltonian constraint in quantized general relativity and  $|\psi\rangle$  stands for the wave function of the universe.

## Universal wavefunction

From Wikipedia, the free encyclopedia

The **universal wavefunction** (or **wave function**), a term introduced by Hugh Everett in his PhD thesis<sup>[1]</sup> *The Theory of the Universal Wave Function*, informs a core concept in the relative state interpretation<sup>[2][3]</sup> or many-worlds interpretation<sup>[4][5]</sup> of quantum mechanics.

$$|\psi_B\rangle$$

$$|s_2^B\rangle$$





# GAMES 2008



## THIRD WORLD CONGRESS OF THE GAME THEORY SOCIETY

JULY 13 - 17, 2008, EVANSTON, ILLINOIS, USA

Photo courtesy of © [Josh McKinnon](#)

[EDITED - Games 2008 Program - Sunday, 4 PM](#)

Founded in January 1999, the Game Theory society aims to promote the investigation, teaching, and application of game theory.

Game theory studies strategic interaction in competitive and cooperative environments. Half a century old, it has already revolutionized economics, and is spreading rapidly to a wide variety of fields.

Every four years the Society hosts its World Congress. The first was held in Bilbao, Spain in 2000. The second was held in Marseille, France in 2004. The third is to be held on the Evanston Campus of Northwestern University, in the United States.

Please send inquiries to [games2008@kellogg.northwestern.edu](mailto:games2008@kellogg.northwestern.edu)

**[SCHEDULE NOW AVAILABLE](#)**

**[Please click here](#)**

### Rhodium

Center for Game Theory  
and Economic Behavior,  
Kellogg School of  
Management

### Platinum



### Gold

Managerial Economics and  
Decision Sciences, Kellogg  
School of Management

### Silver



[HOME](#)

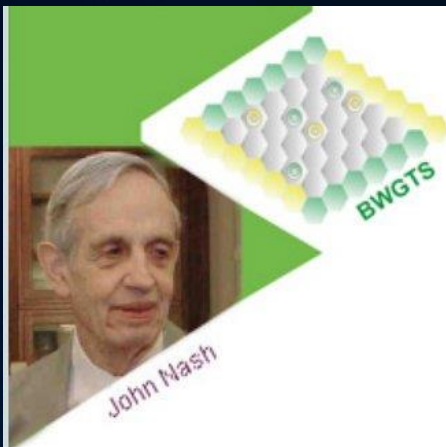
[COMMITTEE MEMBERS](#)

[PLENARY SPEAKERS](#)

[SPEAKER INFORMATION](#)



# Das Nash-Fest in Sao Paulo (Brasilien, 2010)



John Nash

## SECOND BRAZILIAN WORKSHOP OF THE GAME THEORY SOCIETY

in honor of JOHN NASH, on the occasion of the 60th anniversary of Nash equilibrium



Event

Program

Papers

Registration

Travel & Venue

[General Information](#) [Financial Support](#) [Location](#)  
[Sponsors](#) [Committee](#) [Participants](#) [Contact us](#)

### General Information

It is a great pleasure to invite you to participate in the SECOND BRAZILIAN WORKSHOP OF THE GAME THEORY SOCIETY, the 1st São Paulo School of Advanced Sciences on Game Theory of FAPESP - The State of São Paulo Research Foundation. It will be held at the University of São Paulo, from July 29 to August 4, 2010. The event will honor JOHN NASH, on the occasion of the 60th anniversary of Nash equilibrium.

The workshop will offer the participants the opportunity to interact with some of the most productive researchers in Game Theory. The week-long event will consist of conferences, contributed papers sessions and mini-courses which will start at the introductory level and will reach the frontiers of current research. All graduate students should send a recommendation letter from their supervisors to [bwgt2010@usp.br](mailto:bwgt2010@usp.br).

Videos des Workshops unter [http//..](http://..)

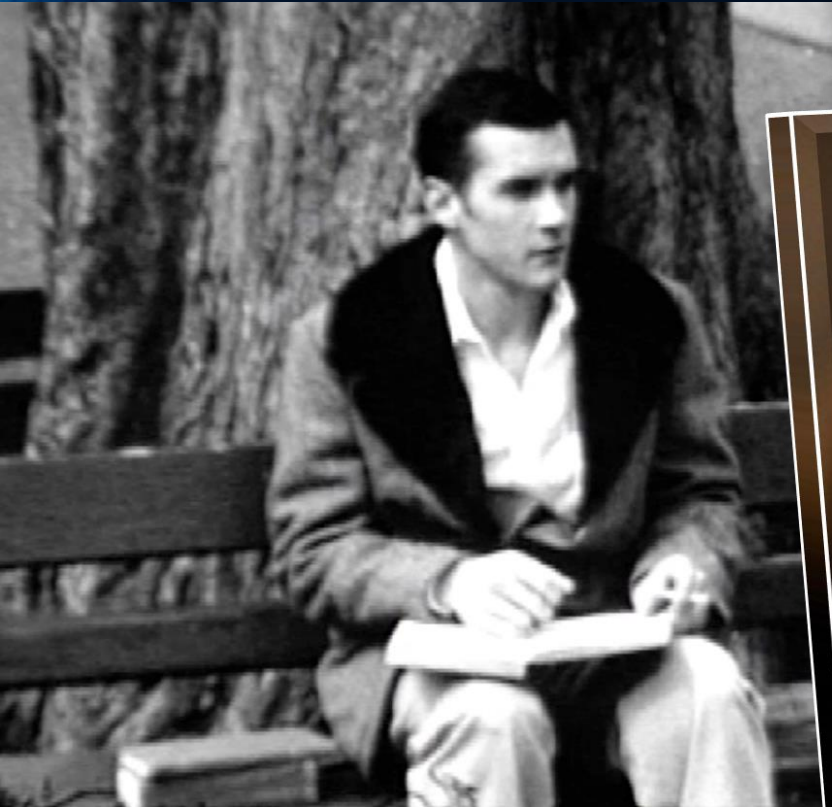
#### ORGANIZERS



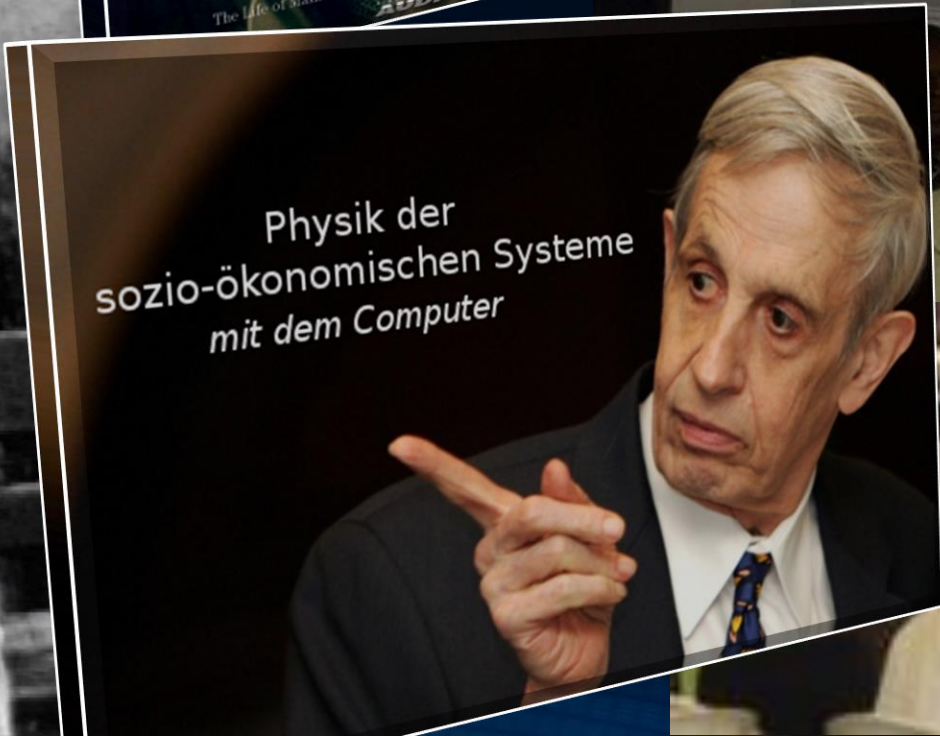


# John Forbes Nash

John Forbes Nash Jr.  
at Princeton university  
in 1949



"2nd Brazilian Workshop of the Game Theory Society" in honor of John Nash (27.7. - 04.08.2010, Sao Paulo, Brazil)





# Einführung in die Quanten-Spieltheorie

## Komplexe Zahlen

G.W. Leibniz (1702)

“...sind eine feine und wunderbare  
Zuflucht des menschlichen  
Geistes, beinahe ein Zwitterwesen  
zwischen Sein und Nichtsein”

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$



# Das Periodensystem der Elemente

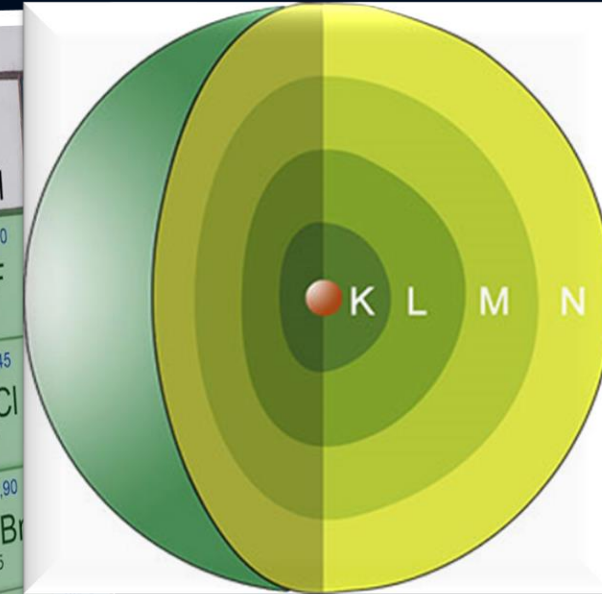
Ein Triumph der Quantentheorie

Hauptquantenzahl

$n=1,2,3,\dots$

$n=K,L,M,N,\dots$

Periode	Hauptgruppen								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
I	1 H 							2 He 	K-Schale
II	3 Li 	4 Be 	5 B 	6 C 	7 N 	8 O 	9 F 	10 Ne 	L-Schale
III	11 Na 	12 Mg 	13 Al 	14 Si 	15 P 	16 S 	17 Cl 	18 Ar 	M-Schale



39,10 K 19	40,08 Ca 20	Sc 21	Ti 22	23	92,91 Zr 40	95,94 Nb 41	97,91 Mo 42	101,07 Tc 43	101,07 Ru 44	101,07 Rh 45	101,07 Pd 46	197,0 Ag 47	200,6 Hg 80	204,4 Tl 81	207,2 Pb 82	Bi 83	Po 84
85,47 Rb 37	87,62 Sr 38	Y 39	91,22 Zr 40	92,91 Nb 41	180,9 Ta 73	183,8 W 74	186,2 Re 75	190,2 Os 76	192,2 Ir 77	195,1 Pt 78	197,0 Au 79	200,6 Hg 80	204,4 Tl 81	207,2 Pb 82	Bi 83	Po 84	
132,9 Ba 56	137,3 La 57	175,0 Lu 71	178,5 Hf 72	180,9 Ta 73	183,8 W 74	186,2 Re 75	190,2 Os 76	192,2 Ir 77	195,1 Pt 78	197,0 Au 79	200,6 Hg 80	204,4 Tl 81	207,2 Pb 82	Bi 83	Po 84		
261,1 Fr 87	262,1 Ra 88	262,1 Ac 89	262,1 Th 90	262,1 Pa 91	262,1 U 92	262,1 Np 93	262,1 Pu 94	262,1 Am 95	262,1 Cm 96	262,1 Bk 97	262,1 Cf 98	262,1 Es 99	262,1 Fm 100	262,1 Md 101	262,1 No 102	262,1 Lr 103	

