Neue Entwicklungen in der Evolutionären Spieltheorie

(Vorlesungsteil 5)

Vorlesung im Rahmen des
Deutsch-Französischen Dozenten-Austauschprogramms „*Minerve*“

Dr. Matthias Hanauske
Institut für Wirtschaftsinformatik
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt am Main

Lyon, 18.November 2009

Inhaltsübersicht der gesamten Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
2. Grundlagen der evolutionären Spieltheorie
3. Neue Entwicklungen in der evolutionären Spieltheorie

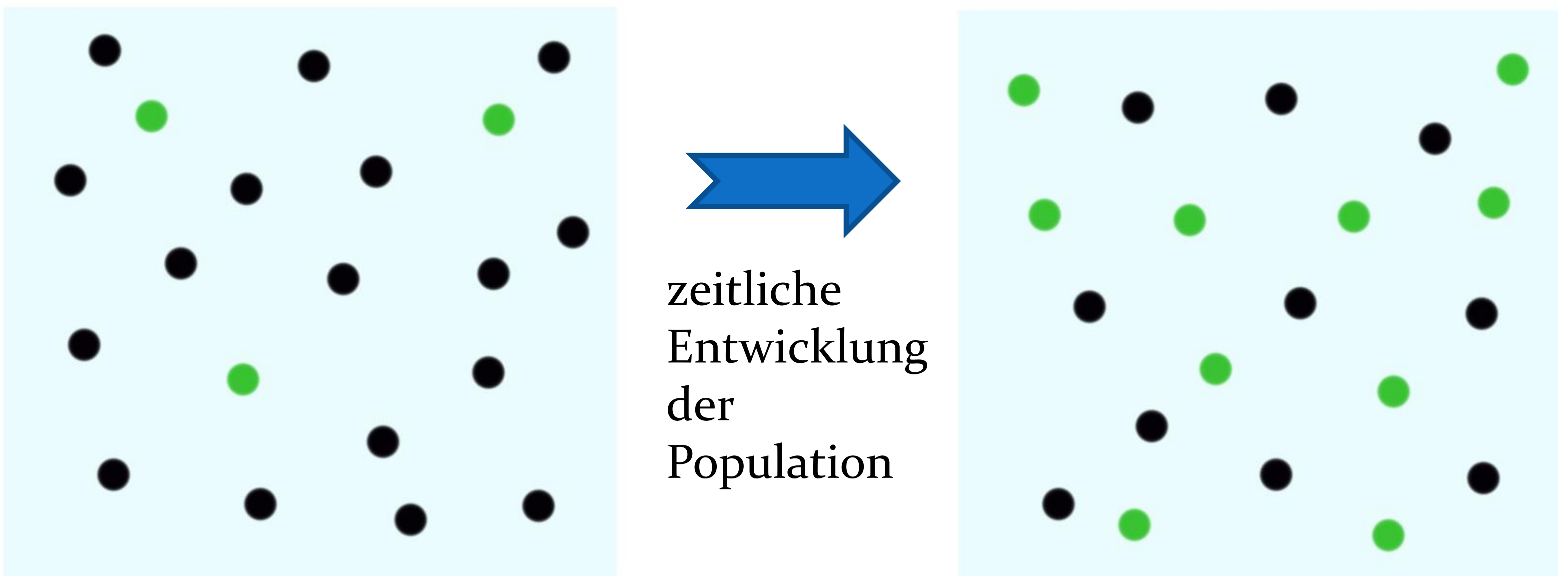
Inhaltsübersicht der vorigen vier Teile der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie
2. Evolutionäre Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 4)
   c) Evolutionär stabile Strategien
   d) Die Replikatordynamik
   e) Beispiel: Symmetrische (2x2)-Spiele

+ **Hausaufgabe:** „Evolutionär stabile Strategien von den drei in der Vorlesung gespielten evolutionären Beispiel-Spielen “

Wiederholung: Evolutionäre Spieltheorie

Die evolutionäre Spieltheorie betrachtet die zeitliche Entwicklung des strategischen Verhaltens einer gesamten Spielerpopulation.



$x(0)=0.15$ $x(10)=0.5$

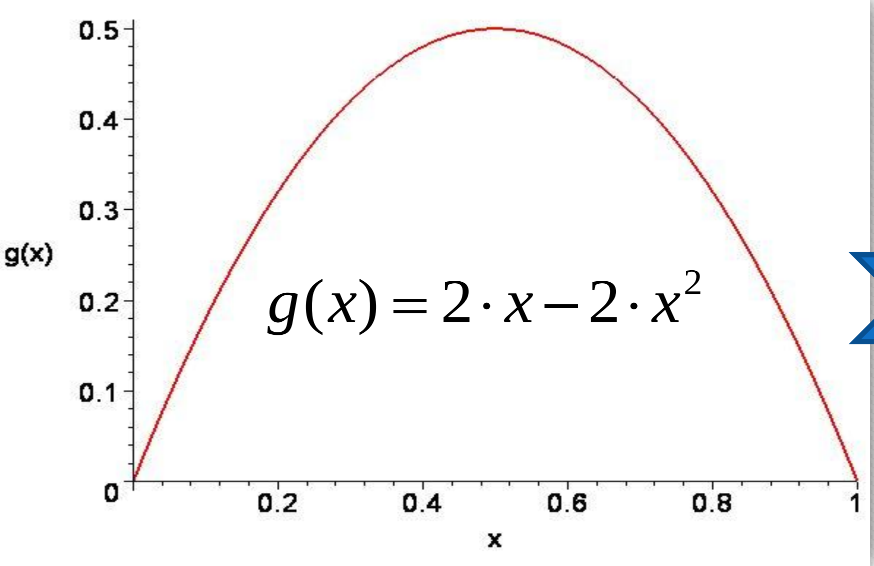
Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
x(t) : Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.

Wiederholung: Replikatordynamik
(für symmetrische (2x2)-Spiele)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für symmetrische (2x2)-Spiele lautet wie folgt:

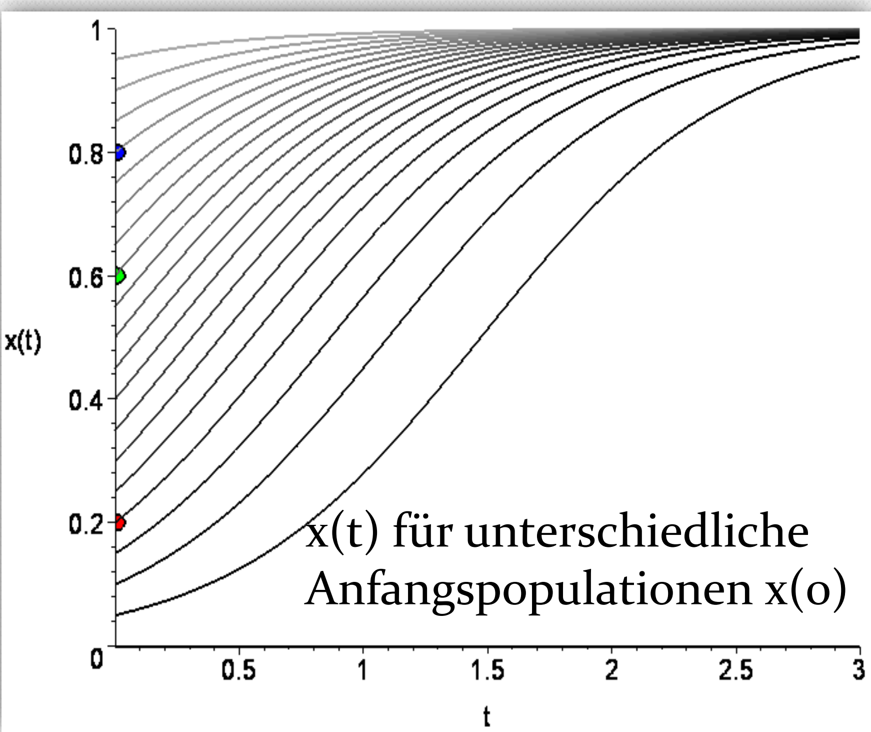
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((\$_{11} - \$_{21}) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (\$_{22} - \$_{12}) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$



$$g(x) = 2 \cdot x - 2 \cdot x^2$$

Beispiel: Gefangenendilemma
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



x(t) für unterschiedliche Anfangspopulationen x(0)

Hausaufgabe

- Betrachten Sie die drei in der Vorlesung gespielten Beispiele:

Beispiel 1:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Beispiel 2:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Beispiel 3:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

1. Geben Sie mögliche dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiele an.
2. Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion g(x) für alle drei Spiele?
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g(x) (g(x)=0).
4. Geben Sie die evolutionär stabilen Strategien der Spiele an?

Hausaufgabe

- Betrachten Sie die drei in der Vorlesung gespielten Beispiele:

Beispiel 1:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Beispiel 2:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

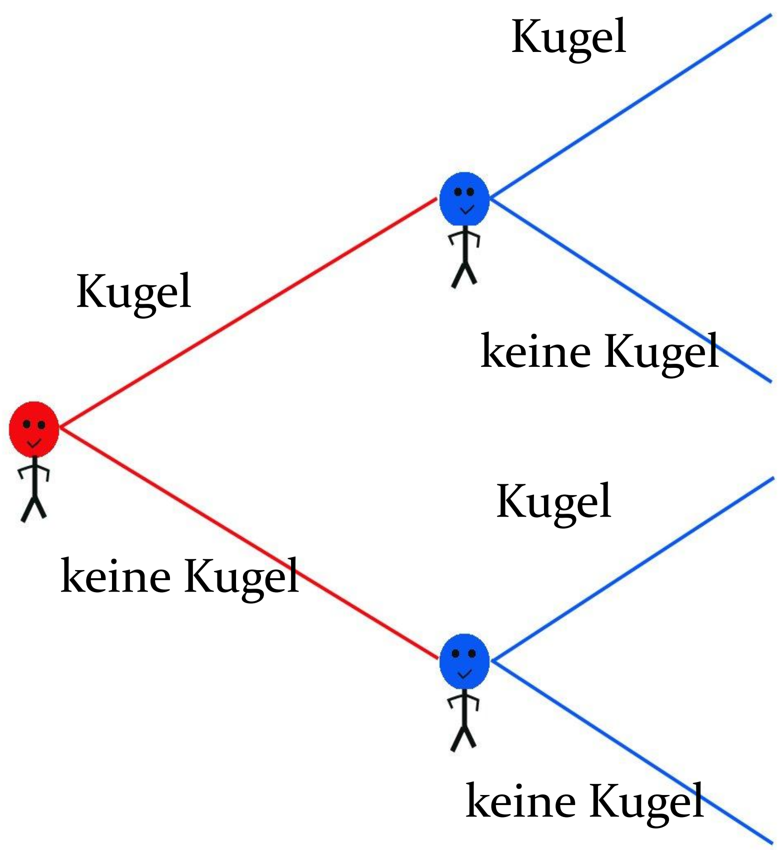
Beispiel 3:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

1. Geben Sie mögliche dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiele an.
2. Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion g(x) für alle drei Spiele?
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g(x) (g(x)=0).
4. Geben Sie die evolutionär stabilen Strategien der Spiele an?

Beispiel 1:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)



Jeder Spieler hat in diesem evolutionären Spiel in jeder Spielperiode zwei mögliche Strategien, nämlich eine Papierkugel in seiner geschlossenen Hand halten, oder keine Kugel in der Hand aufzubewahren. Zum Anfang jeder Spielperiode treffen sich (zufällig) jeweils zwei Spieler, halten ihre geschlossene Hand vor sich und öffnen diese dann gleichzeitig. Die Auszahlungen werden mittels der oben angegebenen Spielmatrix festgelegt. Die gewählten Strategien-kombinationen der Spieler und die erzielten Gewinne bzw. Verluste werden von jedem Spieler auf einem Blatt Papier notiert. Danach beginnt die nächste Spielperiode und die Spieler suchen wieder zufällig einen Spielpartner.

Hausaufgabe

1. Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte

Beispiel 1	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Das erste Spiel besitzt nur ein Nash-Gleichgewicht das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist (Kugel, Kugel). Das Spiel gehört zur Klasse der dominanten Spiele.

Beispiel 2	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

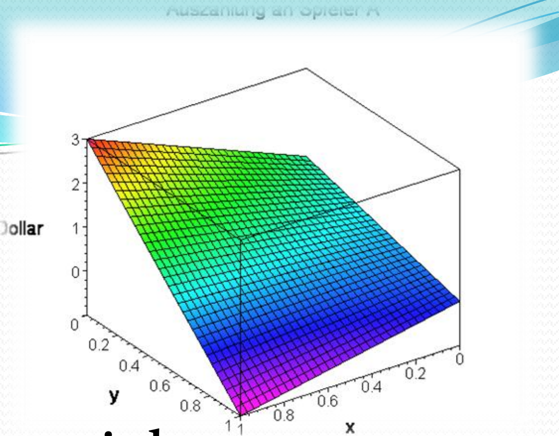
Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,KK) und (KK,K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K , 0.33 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Anti-Koordinationsspiele.

Beispiel 3	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

Das dritte Spiel besitzt ebenfalls keine dominante Strategie, aber zwei symmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,K) und (KK,KK)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.33 K , 0.67 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Koordinationsspiele.

Hausaufgabe

1. Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte
(Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts in Beispiel 2)



- Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts:

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers : $\quad \$^1 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \rightarrow \Re$

$$\$^1(x,y) = (\text{-}1)\cdot x \cdot y + 0 \cdot x \cdot (1-y) + 3 \cdot (1-x) \cdot y + 1 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

$$= \text{-}3 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x - y + 1$$

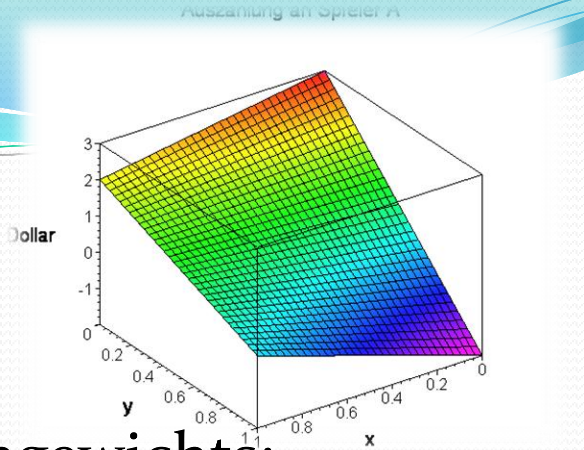
$$\left. \frac{\partial \$^1(x,y)}{\partial x} \right|_{y=y^*} = -3 \cdot y^* + 2 \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^* = \frac{2}{3} \approx 66.67\%$$

Da es sich um ein symmetrisches Spiel handelt gilt auch $x^* = \frac{2}{3} \approx 66.67\%$

Hausaufgabe

1. Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte

(Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts in Beispiel 3)



- Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts:

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers : $\$^1 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \to \Re$

$$\$^1(x,y) = (0)\cdot x \cdot y + 2\cdot x\cdot(1-y) + (-2)\cdot(1-x)\cdot y + 3\cdot(1-x)\cdot(1-y)$$
$$= 3\cdot x\cdot y - x - 5\cdot y + 3$$

$$\frac{\partial\,\$^1(x,y)}{\partial x}\bigg|_{y=y^*} = 3\cdot y^* - 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{1}{3} \approx 33.33\%$$

Da es sich um ein symmetrisches Spiel handelt gilt auch $x^* = \frac{1}{3} \approx 33.33\%$

Hausaufgabe

1. Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte

Beispiel 1	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Das erste Spiel besitzt nur ein Nash-Gleichgewicht das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist (Kugel, Kugel). Das Spiel gehört zur Klasse der dominanten Spiele.

Beispiel 2	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,KK) und (KK,K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K , 0.33 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Anti-Koordinationsspiele.

Beispiel 3	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

Das dritte Spiel besitzt ebenfalls keine dominante Strategie, aber zwei symmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,K) und (KK,KK)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.33 K , 0.67 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Koordinationsspiele.

Hausaufgabe

- Betrachten Sie die drei in der Vorlesung gespielten Beispiele:

Beispiel 1:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Beispiel 2:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Beispiel 3:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

1. Geben Sie mögliche dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiele an.
2. Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion g(x) für alle drei Spiele?
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g(x) (g(x)=0).
4. Geben Sie die evolutionär stabilen Strategien der Spiele an?

Hausaufgabe

2. Replikatordynamik und die Funktion g(x)

Beispiel 1	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

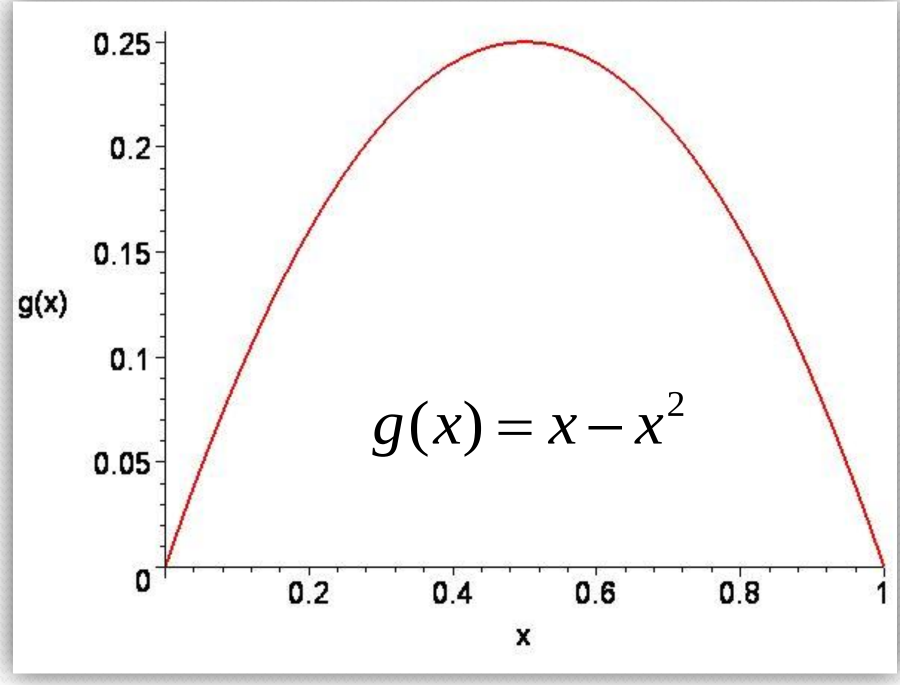
Die allgemeine Form der Replikatordynamik für das symmetrische (2x2)-Spiele lautet:

$$\frac{dx}{dt} = g(x) = x \cdot \left((\$_{11} - \$_{21}) \cdot (x - x^2) + (\$_{22} - \$_{12}) \cdot (2 \cdot x - 1 - x^2) \right)$$

Setzt man die Zahlenwerte der Auszahlungsmatrix des ersten Spielers von Beispiel 1 ein, so erhält man die Funktion g(x):

$$g(x) = x \cdot \left((0 - (-1)) \cdot (x - x^2) + (1 - 2) \cdot (2 \cdot x - 1 - x^2) \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = g(x) = x - x^2$$



Grafische Darstellung der Funktion g(x) im Bereich x=[0,1] .

Hausaufgabe

2. Replikatordynamik und die Funktion g(x)

Beispiel 2	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0, 3)	(1 , 1)

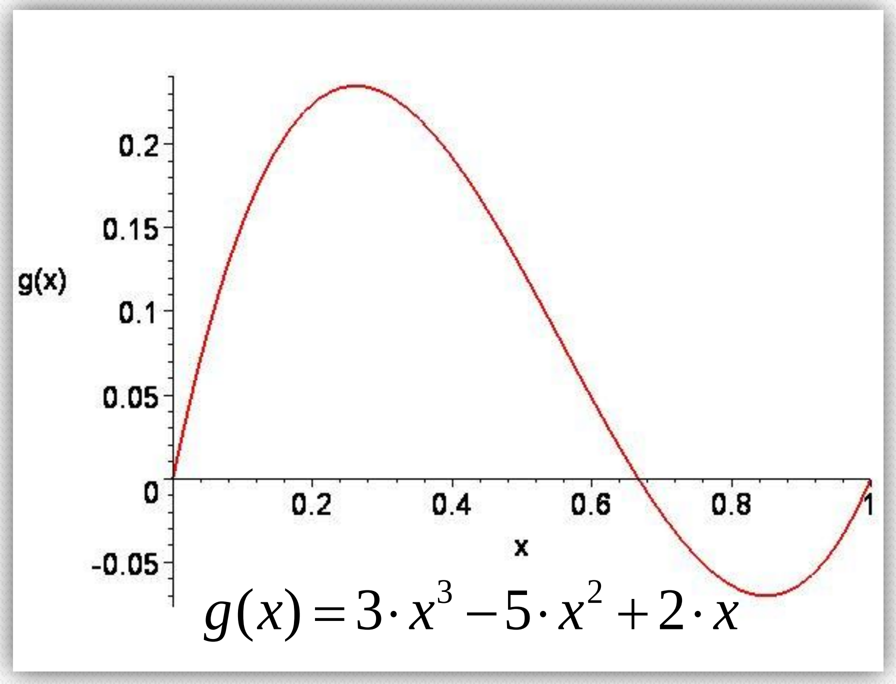
Die allgemeine Form der Replikatordynamik für das symmetrische (2x2)-Spiele lautet:

$$\frac{dx}{dt} = g(x) = x \cdot \left((\$_{11} - \$_{21}) \cdot (x - x^2) + (\$_{22} - \$_{12}) \cdot (2 \cdot x - 1 - x^2) \right)$$

Setzt man die Zahlenwerte der Auszahlungsmatrix des ersten Spielers von Beispiel 2 ein, so erhält man die Funktion g(x):

$$g(x) = x \cdot \left((-1 - (0)) \cdot (x - x^2) + (1 - 3) \cdot (2 \cdot x - 1 - x^2) \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = g(x) = 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x$$



Grafische Darstellung der Funktion g(x) im Bereich x=[0,1] .

Hausaufgabe

2. Replikatordynamik und die Funktion g(x)

Beispiel 3	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

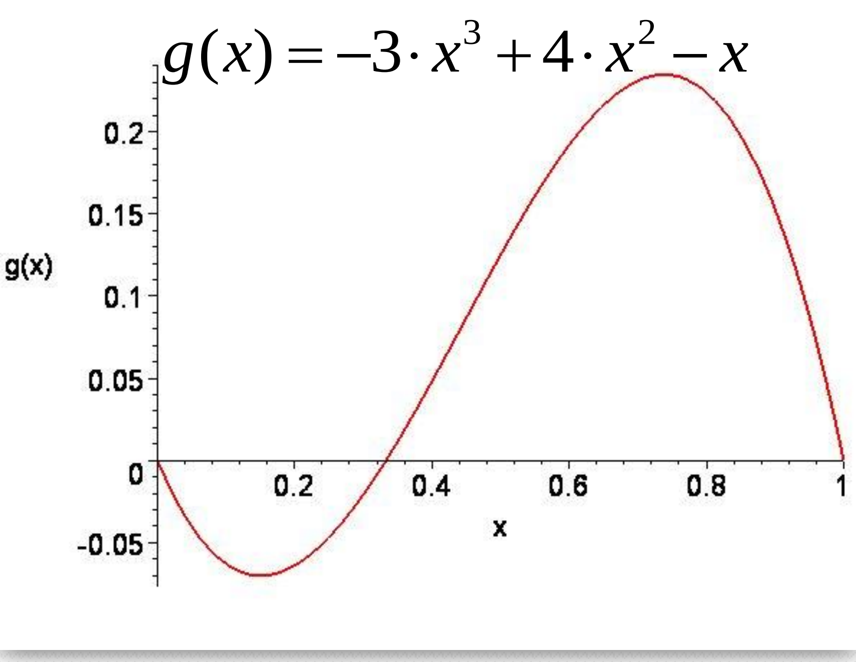
Die allgemeine Form der Replikatordynamik für das symmetrische (2x2)-Spiele lautet:

$$\frac{dx}{dt} = g(x) = x \cdot \left((\$_{11} - \$_{21}) \cdot (x - x^2) + (\$_{22} - \$_{12}) \cdot (2 \cdot x - 1 - x^2) \right)$$

Setzt man die Zahlenwerte der Auszahlungsmatrix des ersten Spielers von Beispiel 3 ein, so erhält man die Funktion g(x):

$$g(x) = x \cdot \left((0 - (\text{-}2)) \cdot (x - x^2) + (3 - 2) \cdot (2 \cdot x - 1 - x^2) \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = g(x) = -3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - x$$



Grafische Darstellung der Funktion g(x) im Bereich x=[0,1] .

Hausaufgabe

- Betrachten Sie die drei in der Vorlesung gespielten Beispiele:

Beispiel 1:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Beispiel 2:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Beispiel 3:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

1. Geben Sie mögliche dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiele an.
2. Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion g(x) für alle drei Spiele?
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g(x) (g(x)=0).
4. Geben Sie die evolutionär stabilen Strategien der Spiele an?

Hausaufgabe

2. Nullstellen der Funktion g(x)

Beispiel 1:

$$g(x) = x - x^2$$

$$x - x^2 = 0$$

$$x \cdot (1 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

Die Funktion hat zwei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 1$$

Beispiel 3:
Die Funktion hat drei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 1 \text{ und } x_3 = \frac{1}{3}$$

Beispiel 2:

$$g(x) = 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

$$x \cdot (3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2 = 0 \;\big|\; /3$$

$$x^2 - \frac{5}{3} \cdot x + \frac{2}{3} = 0 \;\big|\; \text{p - q Formel}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25 - 24}{36}}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1, \; x_3 = \frac{2}{3}$$

Die Funktion hat drei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 1 \text{ und } x_3 = \frac{2}{3}$$

Hausaufgabe

- Betrachten Sie die drei in der Vorlesung gespielten Beispiele:

Beispiel 1:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Beispiel 2:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Beispiel 3:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

1. Geben Sie mögliche dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiele an.
2. Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion g(x) für alle drei Spiele?
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g(x) (g(x)=0).
4. Geben Sie die evolutionär stabilen Strategien der Spiele an?

Hausaufgabe

4. Evolutionäre Strategien (Beispiel 1)

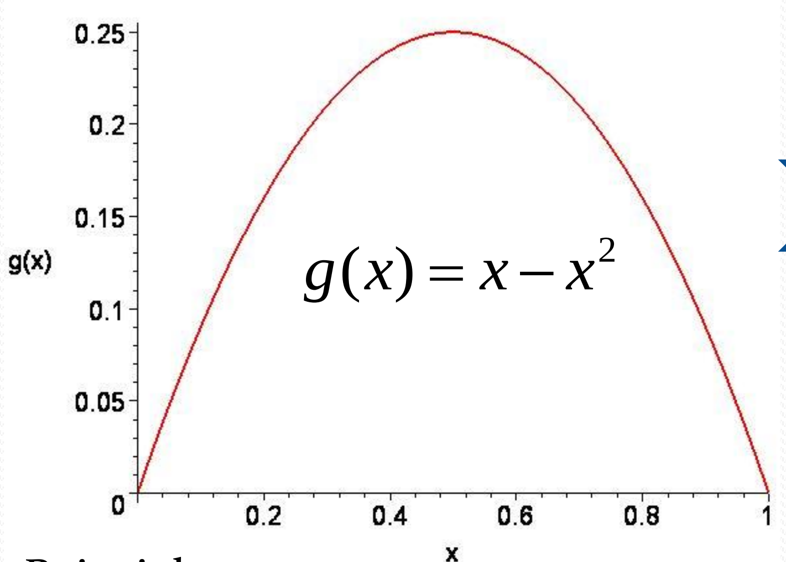
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautet:

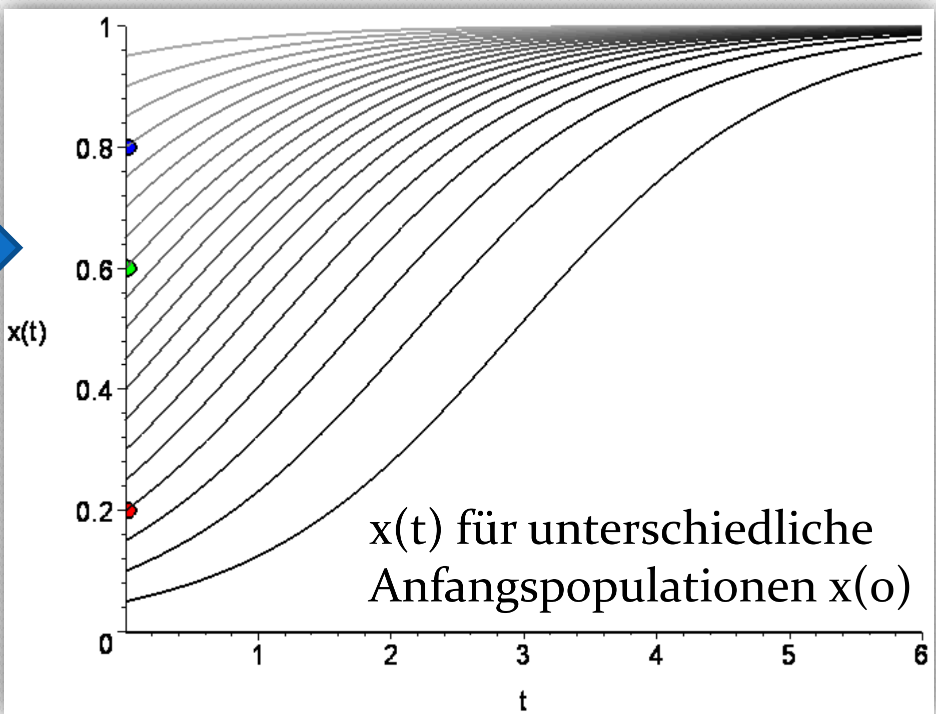
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = x(t) - \left(x(t)\right)^2$$

Eine ESS bei x=1

Da es sich bei diesem Beispiel um ein dominantes, symmetrisches (2x2)-Spiel handelt und die Funktion g(x) im relevanten Bereich (x=[0,1]) immer größer-gleich Null ist, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer gegen 1.



Beispiel 1:
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Hausaufgabe

4. Evolutionäre Strategien (Beispiel 2)

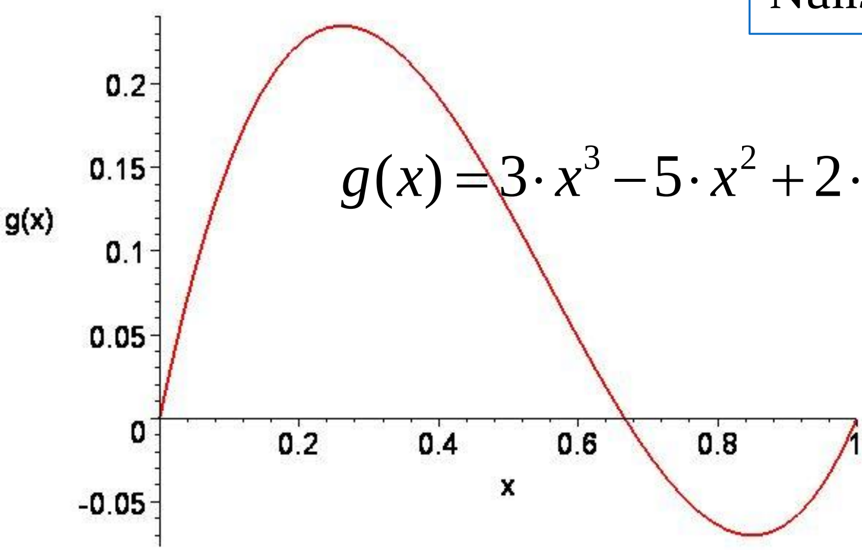
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0, 3)	(1 , 1)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das zweite Beispiel lautet:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = 3\cdot(x(t))^3 - 5\cdot(x(t))^2 + 2\cdot x(t)$$

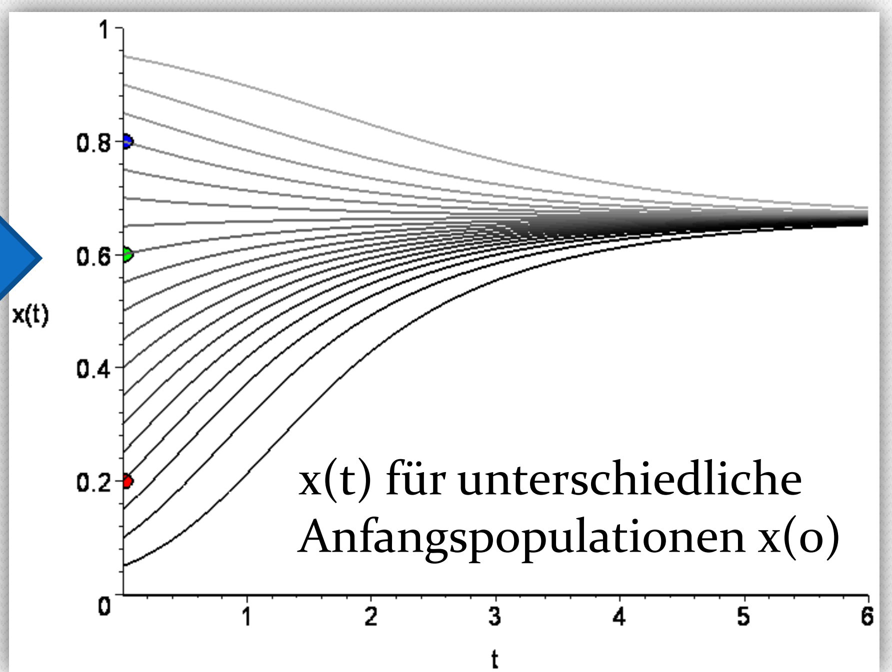
Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Anti-Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer zu dem gemischten Nash-Gleichgewicht, was identisch mit der mittleren Nullstelle der Funktion g(x) ist (x=0.67).

$\boxed{\text{Eine ESS bei } x=0.67}$



$$g(x) = 3\cdot x^3 - 5\cdot x^2 + 2\cdot x$$

Beispiel 2:
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



x(t) für unterschiedliche Anfangspopulationen x(0)

Hausaufgabe

4. Evolutionäre Strategien (Beispiel 3)

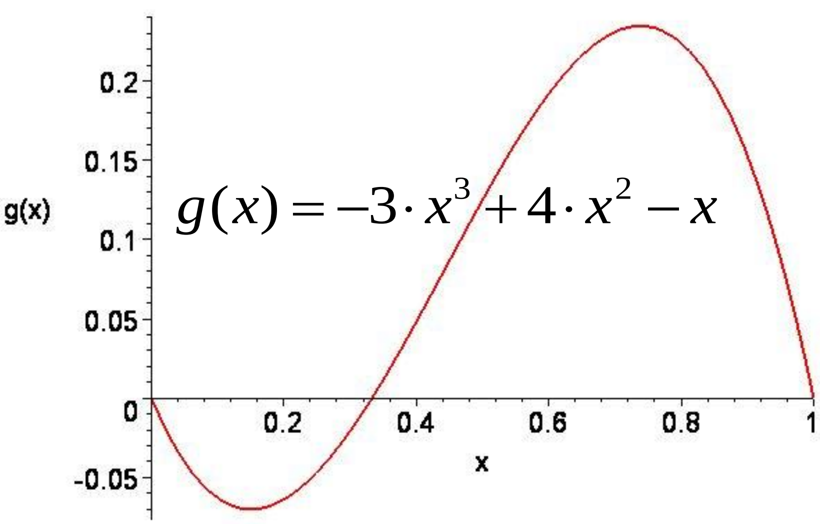
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0, 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2, 2)	(3 , 3)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das zweite Beispiel lautet:

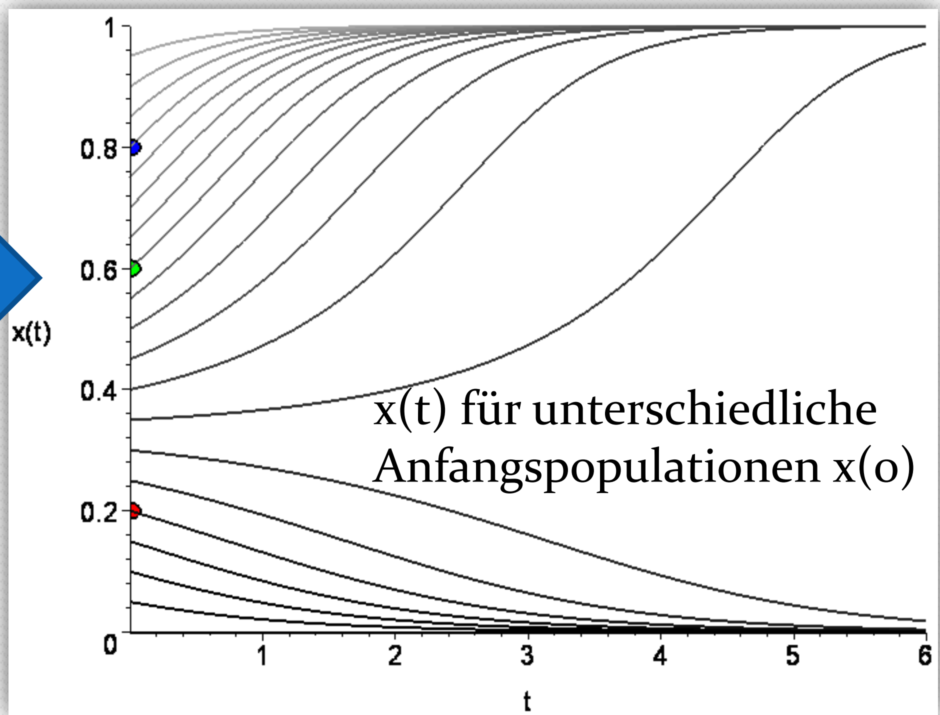
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = -3\cdot(x(t))^3 + 4\cdot(x(t))^2 - x(t)$$

$\boxed{\text{Zwei ESSs : (x=1 und x=0)}}$

Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler abhängig vom Anfangswert zu einem der beiden reinen Nash-Gleichgewichte (x=1 oder x=0).



Beispiel 3:
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Inhaltsübersicht des fünften Teils der Vorlesung

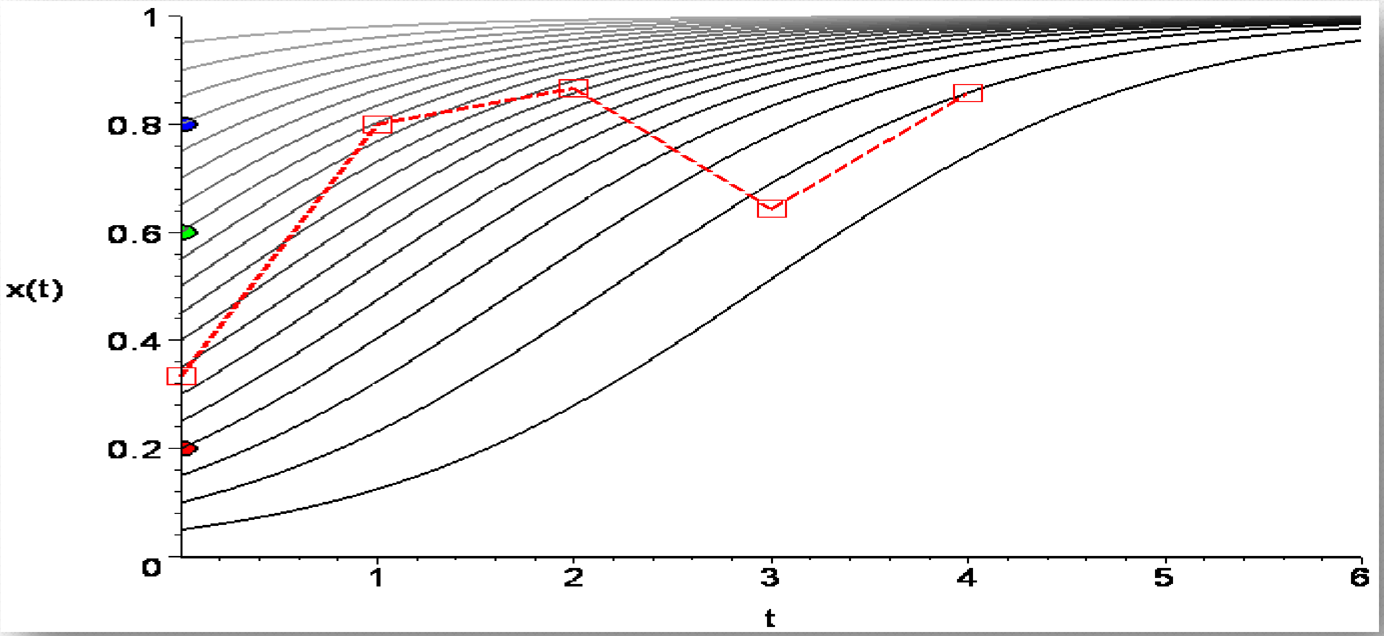
1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie
2. Evolutionäre Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Evolutionär stabile Strategien
   c) Mathematische Grundlagen (Teil 4)
   d) Die Replikatordynamik
   e) Beispiel: Symmetrische (2x2)-Spiele
   f) Theorie und Experiment
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 5)
   h) Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie
   i) Beispiel: Symmetrische (2x3)-Spiele

Inhaltsübersicht des fünften Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie
2. Evolutionäre Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Evolutionär stabile Strategien
   c) Mathematische Grundlagen (Teil 4)
   d) Die Replikatordynamik
   e) Beispiel: Symmetrische (2x2)-Spiele
   f) Theorie und Experiment
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 5)
   h) Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie
   i) Beispiel: Symmetrische (2x3)-Spiele

Theorie ⟷ Experiment

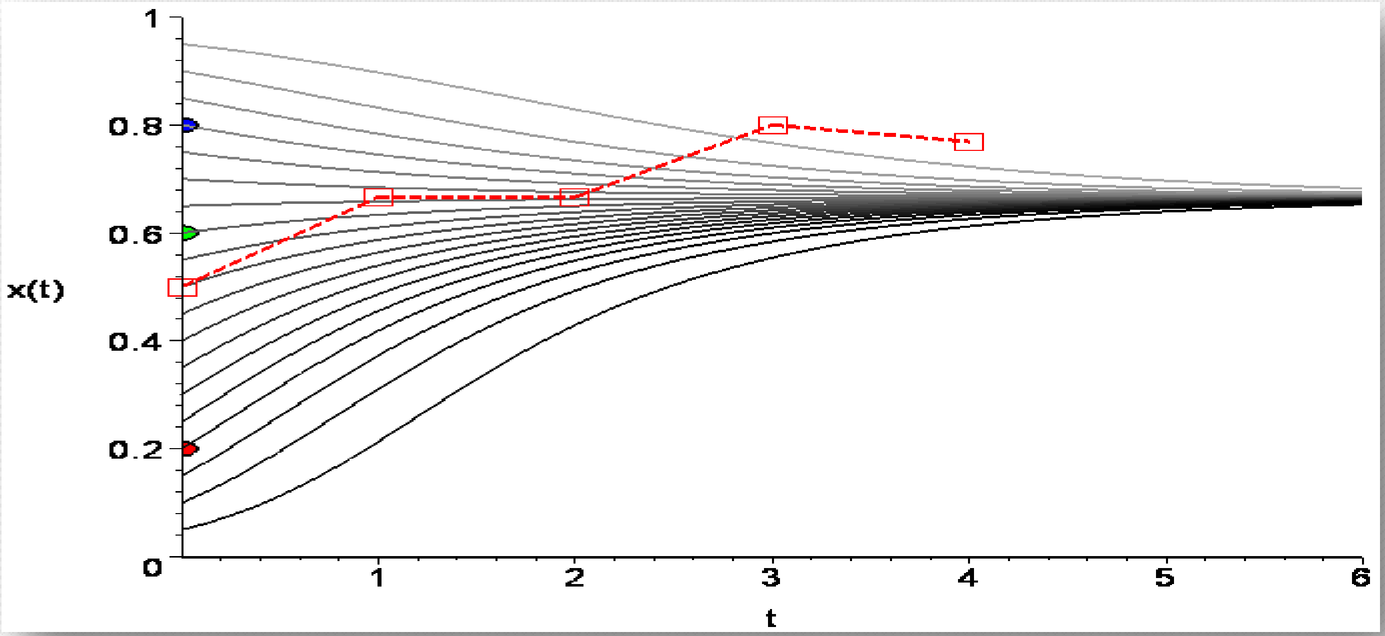
Experimentelle Ergebnisse des im Teil 4 gespielten Beispiels 1



Das erste Spiel besitzt nur ein Nash-Gleichgewicht das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist (Kugel, Kugel). Da es sich bei diesem Beispiel um ein dominantes, symmetrisches (2x2)-Spiel handelt und die Funktion g(x) im relevanten Bereich (x=[0,1]) immer größer-gleich Null ist, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer gegen die evolutionär stabile Strategie x=1. Die klassische evolutionäre Spieltheorie sagt demnach voraus, dass die Spieler innerhalb der betrachteten Population nach einer gewissen Zeit maßgeblich die Strategie Kugel wählen (x=1). Die rote Kurve in der obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des im Vorlesungsteil 4 gespielten Beispiels 1.

Theorie ⟺ Experiment

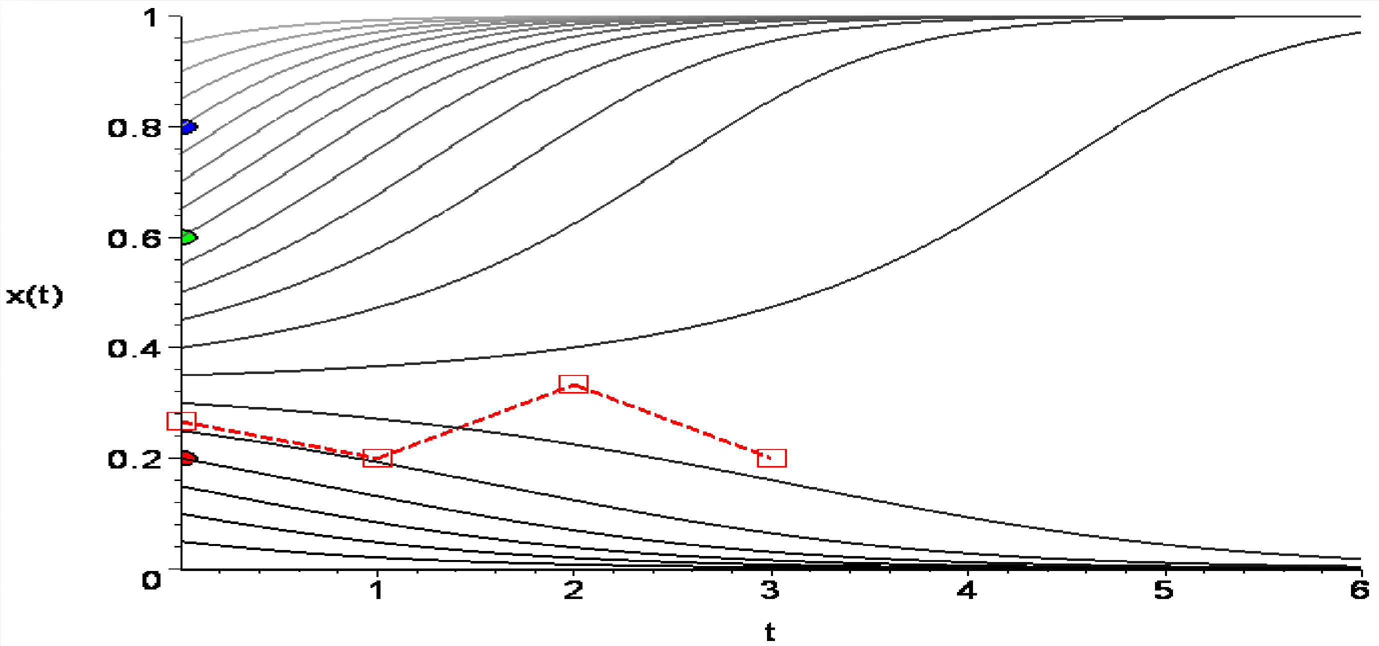
Experimentelle Ergebnisse des im Teil 4 gespielten Beispiels 2



Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,KK) und (KK,K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K , 0.33 KK). Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Anti-Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer zu dem gemischten Nash-Gleichgewicht (der einzigen evolutionär stabilen Strategie des Spiels), was identisch mit der mittleren Nullstelle der Funktion g(x) ist (x=0.67). Die rote Kurve in der obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des im Vorlesungsteil 4 gespielten Beispiels 2.

Theorie ⟺ Experiment

Experimentelle Ergebnisse des im Teil 4 gespielten Beispiels 3



Das dritte Spiel besitzt ebenfalls keine dominante Strategie, aber zwei symmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,K) und (KK,KK)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.33 K , 0.67 KK). Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler abhängig vom Anfangswert zu einem der beiden reinen Nash-Gleichgewichte (x=1 oder x=0). Die klassische evolutionäre Spieltheorie sagt demnach voraus, dass es zwei evolutionär stabile Strategien gibt (x=1 oder x=0). Die rote Kurve in der obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des im Vorlesungsteil 4 gespielten Beispiels 3.

Theorie ⟷ Experiment

Experimentelle Ökonomie

Die experimentelle Realisierung von (evolutionären) Spielen ist ein aktuelles Forschungsgebiet, was sowohl in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften als auch in der Biologie erforscht wird (Nobelpreis 2009 !). Innerhalb der Wirtschaftswissenschaften bezeichnet man dieses Forschungsgebiet als *Experimentelle Ökonomie*. In experimentellen Laboren wird das Verhalten von freiwillige Akteuren in konstruierten Spielsituationen erforscht und mit den von der Theorie vorhergesagten Ergebnissen verglichen. Siehe hierzu z.B.

○ **Cooperation in PD games: Fear, greed, and history of play**, *T.K. AHN, ELINOR OSTROM, DAVID SCHMIDT, ROBERT SHUPP & JAMESWALKER, Public Choice* ***106: 137–155, 2001***

○**Experimental Validation of Quantum Game Theory,** M. Hanauske and S. Bernius and W. König and B. Dugall, (accepted paper at the conference *Logic and the Foundations of Game and Decision Theory* LOFT 2008, arXiv:0707.3068v1

○ **Fellow-Feeling and Cooperation (*A quantum game theory-based analysis of a prisoner's dilemma experiment*),** Matthias Hanauske and Sebastian Schäfer, Seminararbeit im PHD-Seminar „Experimentelle Ökonomie" geleitet von Herrn Professor M. Kosfeld, Somersemester 2009, Frankfurt am Main).

Theorie ⟺ Experiment

Experimentelle Ökonomie

Da das beobachtete Verhalten der Spieler (in einigen Spielsituationen) nicht immer mit dem vorhergesagten Ergebnis übereinstimmt, wurden im Laufe der Zeit die Theorien erweitert (siehe Vorlesungsteil 6 „Neue Entwicklungen in der evolutionären Spieltheorie“). Gewisse Grundannahmen der (evolutionären) Spieltheorie wurden hinterfragt und die spieltheoretischen Gleichgewichtskonzepte und die der evolutionären Spieltheorie zugrundeliegende Replikatordynamik wurden für gewisse realistische Spielsituationen abgeändert.

Theorie ⟺ Experiment

Mögliche Gründe einer Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment

Teils nicht erfüllte Grundvoraussetzungen der evolutionären Spieltheorie:
- Endliche Anzahl von Spielern innerhalb der Population.
- Das zufällige und gleichverteilte Zusammentreffen der Spieler in jeder Spielperiode ist in einer realen Spielsituation oft nicht erfüllt (siehe komplexe Sozio-Ökonomische Netzwerke (Elinor Ostrom, Nobelpreis 2009)).
- Die Voraussetzung des „Homo Ökonomikus“ ist oft nicht perfekt erfüllt (Altruistisches Verhalten, Empathie, … (Elinor Ostrom, Nobelpreis 2009)).

Bei unserem spieltheoretischen Experiment war zum Beispiel die Menge der Spieler viel zu gering (ca. 16 Personen) um die Voraussetzung einer quasi-kontinuierlichen Veränderung der Funktion x(t) zu gewährleisten. Das zufällige Zusammentreffen wurde zwar durch das „Herumlaufen im Vorlesungsraum“ experimentell modelliert, jedoch könnten mögliche unterbewusste oder bewusste Präferenzen bei der Zwei-Spieler-Gruppenwahl nicht ausgeschlossen werden. Zusätzlich ist es möglich, dass sich Zweiergruppen bildeten, die sich aus gut bekannten, gemochten Studienkollegen bildeten, so dass altruistische, kooperative Verhaltensweisen (die dem „ Homo Ökonomikus“ widersprechen) auftreten konnten.

Inhaltsübersicht des fünften Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie
2. Evolutionäre Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Evolutionär stabile Strategien
   c) Mathematische Grundlagen (Teil 4)
   d) Die Replikatordynamik
   e) Beispiel: Symmetrische (2x2)-Spiele
   f) Theorie und Experiment
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 5)
   h) Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie
   i) Beispiel: Symmetrische (2x3)-Spiele

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus

- Die Exponentialfunktion ist eine wichtige, in der Wissenschaft oft verwendete Funktion. Sie hat die Eigenschaft, dass ihre Ableitung genau wieder die Exponentialfunktion selbst ist:

$$f(x) = e^x \quad , \quad \frac{df(x)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^x\right) = e^x$$

- Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist der Logarithmus. Für die Ableitung des Logarithmus gilt:

$$f(x) = \ln(x) \quad , \quad \frac{df(x)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ln(x)\right) = \frac{1}{x}$$

Eigenschaften und Rechenregeln der Exponentialfunktion und des Logarithmus

- Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\ln(x)+\ln(y)=\ln(x\cdot y) \quad , \quad \ln(x)-\ln(y)=\ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

- Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist gelten die folgenden Eigenschaften:

$$\ln(e^{x})=x \quad , \quad e^{\ln(x)}=x$$

$$\ln(e^{x^2-x+3})=x^2-x+3 \quad , \quad e^{\ln(x^3-2\cdot x)}=x^3-2\cdot x$$

Das Integral

- Die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differentialrechnung. Das (unbestimmte) Integral der Ableitung einer Funktion ist (bis auf eine willkürliche Konstante c) die ursprüngliche Funktion selbst.

$$\int f^{|}(x)\,dx = f(x) + c \quad \text{, Beispiel:} \int \left(\mathrm{x}^3 + 2\cdot x - 3\right) dx = \frac{1}{4}\mathrm{x}^4 + x^2 - 3\cdot x + c$$

- Bei der Berechnung des bestimmten Integrals wird die Ober- und Untergrenze des Integrals festgelegt:

$$\int_a^b f^{|}(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

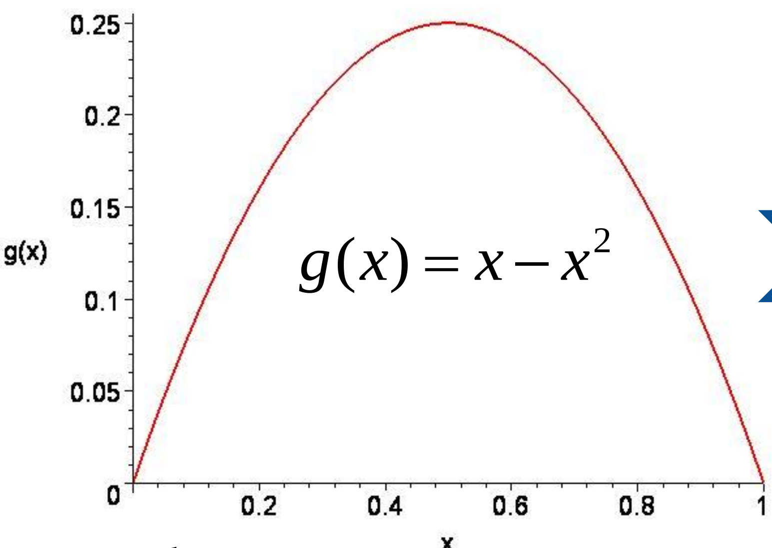
$$\text{Beispiel:} \int_2^4 (2\cdot x - 3)\,dx = \left(x^2 - 3\cdot x\right)\Big|_2^4 = 4^2 - 12 - \left(2^2 - 6\right) = 6$$

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautete:

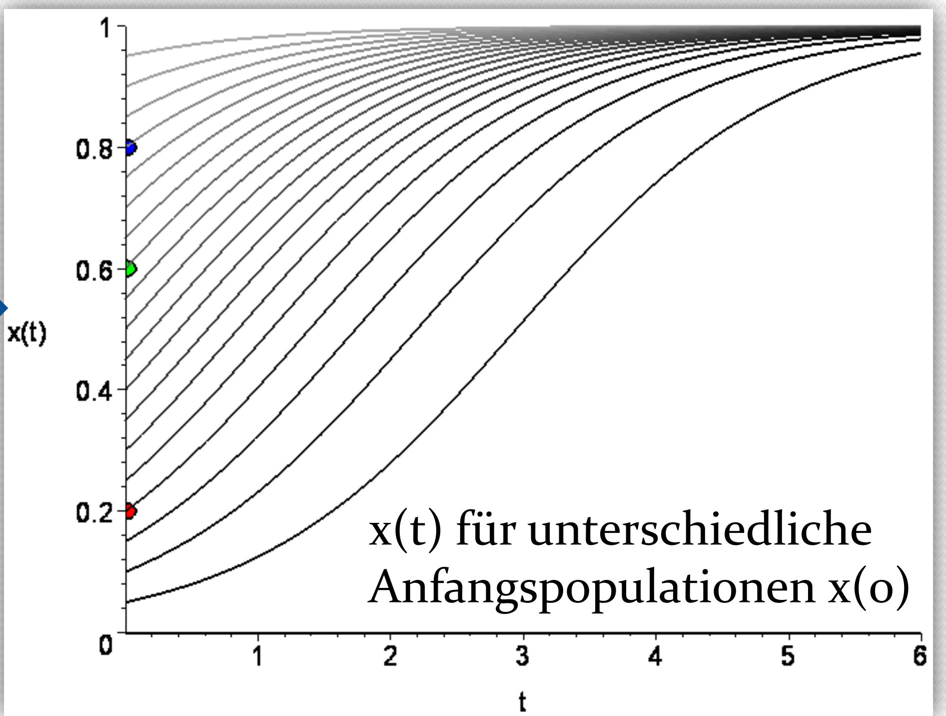
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = x(t) - (x(t))^2$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(0)berechnen?



Beispiel 1:
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt

?



x(t) für unterschiedliche Anfangspopulationen x(0)

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Ein „einfaches“Beispiel

Ein einfaches Beispiel einer Differentialgleichung lautete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(0)berechnen?

Analytische Lösung:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dx}{dt} = x \quad \Big| \cdot dt$$

$$dx = x \cdot dt \quad \Big| / x$$

$$\frac{1}{x} dx = dt \quad \Big| \int (\ldots)$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x} dx = \int_0^t dt$$

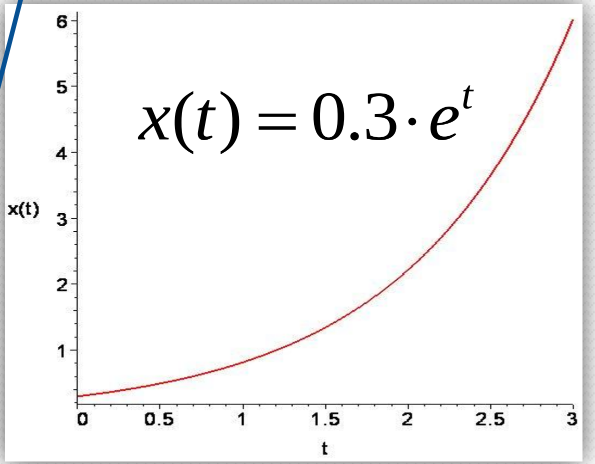
$$\ln(x(t)) - \ln(x(0)) = t$$

$$\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right) = t \quad \Big| e^{(\ldots)}$$

$$e^{\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)} = e^t$$

$$\frac{x(t)}{x(0)} = e^t \quad \Big| \cdot x(0)$$

$$x(t) = x(0) \cdot e^t$$



x(t), wobei x(0)=0.3

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Beispiel 1 aus Vorlesungsteil 4 (I)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - \left(x(t)\right)^2$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(o)berechnen?

Analytische Lösung:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 \quad \Big| \cdot dt$$

$$dx = \left(x - x^2\right) \cdot dt \quad \Big| / \left(x - x^2\right)$$

$$\frac{1}{x - x^2} dx = dt \quad \Big| \int (\ldots)$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x - x^2} dx = \int_0^t dt$$

$$\ln(x(t)) - \ln(x(t)-1) - \left(\ln(x(0)) - \ln(x(0)-1)\right) = t$$

$$\ln\left(\frac{x(t)\cdot\left(x(0)-1\right)}{x(0)\cdot\left(x(t)-1\right)}\right) = t \quad \Big| e^{(\ldots)}$$

$$e^{\ln\left(\frac{x(t)\cdot\left(x(0)-1\right)}{x(0)\cdot\left(x(t)-1\right)}\right)} = e^t$$

$$\frac{x(t)\cdot\left(x(0)-1\right)}{x(0)\cdot\left(x(t)-1\right)} = e^t \quad \Big| \cdot \left(x(0)\cdot\left(x(t)-1\right)\right)$$

$$x(t)\cdot\left(x(0)-1\right) = x(0)\cdot x(t)\cdot e^t - x(0)\cdot e^t \quad \Big| -\left(x(0)\cdot x(t)\cdot e^t\right)$$

$$x(t)\cdot\left(x(0)-1-x(0)\cdot e^t\right) = -x(0)\cdot e^t \quad \Big| / \left(x(0)-1-x(0)\cdot e^t\right)$$

$$x(t) = \frac{-x(0)\cdot e^t}{x(0)-1-x(0)\cdot e^t} \Leftrightarrow x(t) = \frac{x(0)\cdot e^t}{1-x(0)+x(0)\cdot e^t}$$

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Beispiel 1 aus Vorlesungsteil 4 (II)

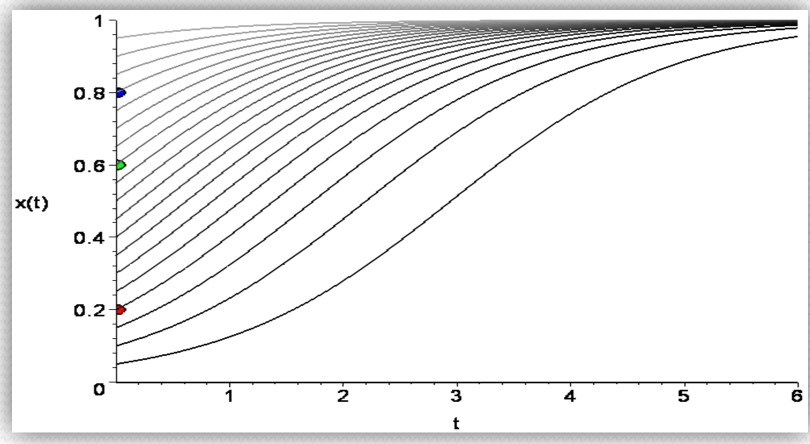
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautete:

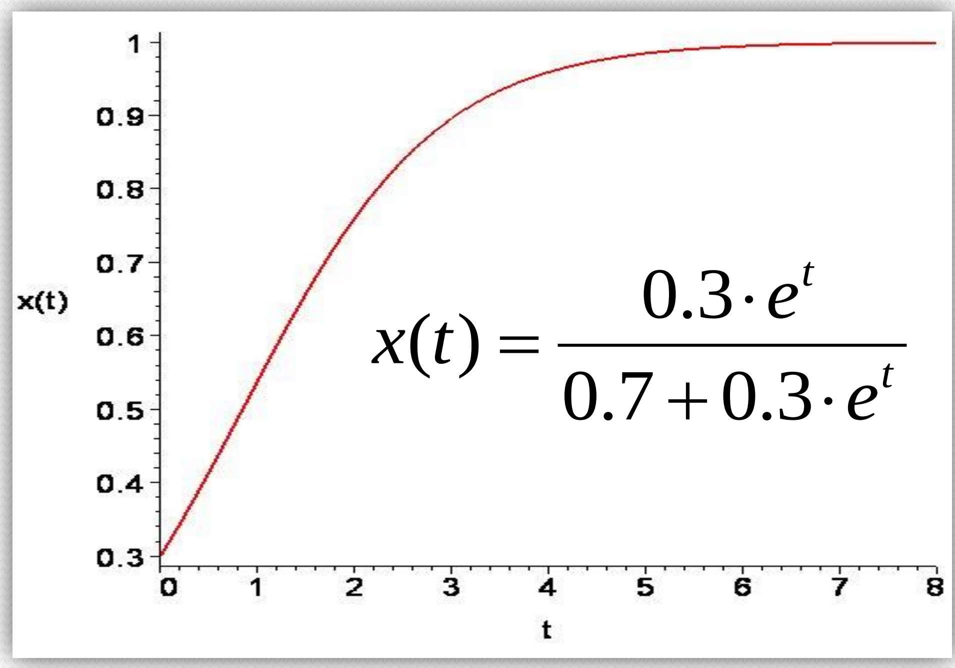
$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - \left(x(t)\right)^2$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(0)berechnen?

<u>Analytische Lösung:</u>

$$x(t) = \frac{x(0)\cdot e^t}{1 - x(0) + x(0)\cdot e^t}$$





x(t), wobei x(0)=0.3

Inhaltsübersicht des fünften Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie
2. Evolutionäre Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Evolutionär stabile Strategien
   c) Mathematische Grundlagen (Teil 4)
   d) Die Replikatordynamik
   e) Beispiel: Symmetrische (2x2)-Spiele
   f) Theorie und Experiment
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 5)
   h) Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie
   i) Beispiel: Symmetrische (2x3)-Spiele

Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie (I)

- **Biologie**
  - **Verteilung von Bakterien in Organismen**

    Siehe z.B.: Kerr, Feldmann, Nature 2002
  - **Kooperation von Virus-Populationen**

    Siehe z.B.: Turner, Chao, Nature 1999
  - **Paarungsstrategien von Eidechsen**

    Siehe z.B.: Sinervo, Hazard, Nature 1996
  - **Evolutionäre Entwicklung von Makromolekülen**

    Siehe z.B.: Eigen, Schuster, Naturwissenschaften 64, 1977

Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie (II)

- **Ökonomie**
  - **„Public Goods"- (Öffentliches Gut)- Spiele**
    - **Trust in Private and Common Property Experiments**, Elinor Ostrom, et al.
    - **Evolutionary Dynamics in Public Good Games**, CHRISTIANE CLEMENS and THOMAS RIECHMANN, Computational Economics (2006) 28: 399–420
    - **Institution Formation in Public Goods Games,** Michael Kosfeld, Akira Okada, and Arno Riedl, American Economic Review 2009, 99:4, 1335–1355
  - **Experimentelle Ökonomie**
    - **Cooperation in PD games: Fear, greed, and history of play,** T.K. AHN, ELINOR OSTROM, DAVID SCHMIDT, ROBERT SHUPP, Public Choice 106: 137–155, 2001.
  - **„Behavioral"- Verhaltensökonomie (Altruismus, Empathie, …)** z.B.: Fehr et al.
  - **Evolution von Informationsnetzwerken**

Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie (III)

- Sozialwissenschaft
  - **Kulturelle und moralische Entwicklungen**
    - **Evolution of social learning does not explain the origin of human cumulative culture**, Magnus Enquist, Stefano Ghirlanda, Journal of Theoretical Biology 246 (2007) 129–135
    - **EVOLUTION OF MORAL NORMS,** William Harms and Brian Skyrms, For Oxford Handbook on the Philosophy of Biology ed. Michael Ruse
  - **Evolution der Sprache**
    - **Finite populations choose an optimal language**, Christina Pawlowitsch, Journal of Theoretical Biology 249 (2007) 606–616
  - **Soziales Lernen**
    - **Evolution of social learning does not explain the origin of human cumulative culture**, Magnus Enquist, Stefano Ghirlanda, Journal of Theoretical Biology 246 (2007) 129–135
  - **Evolution von sozialen Normen**
    - **Collective Action and the Evolution of Social Norms,** Elinor Ostrom, The Journal of Economic Perspectives, Vol. 14, No. 3 (Summer, 2000), pp. 137-158
  - **Evolution von sozialen Netzwerken**
    - **GOVERNING SOCIAL-ECOLOGICAL SYSTEMS,** MARCO A. JANSSEN and ELINOR OSTROM
    - **A General Framework for Analyzing Sustainability of Social-Ecological Systems,** Elinor Ostrom, et al., Science 325, 419 (2009)

Inhaltsübersicht des fünften Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie
2. Evolutionäre Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Evolutionär stabile Strategien
   c) Mathematische Grundlagen (Teil 4)
   d) Die Replikatordynamik
   e) Beispiel: Symmetrische (2x2)-Spiele
   f) Theorie und Experiment
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 5)
   h) Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie
   i) Beispiel: Symmetrische (2x3)-Spiele

Replikatordynamik

Wir beschränken uns zunächst auf symmetrische (2xM)-Spiele , d.h. zwei Personen - M Strategien Spiele. Da es sich um symmetrische Spiele handelt, sind alle Spieler gleichberechtigt und man kann von einer homogenen Population ausgehen.
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik beschreibt wie sich die einzelnen Populationsanteil der zur Zeit t gewählten Strategien $x_j(t)$, j=1,2,...M im Laufe der Zeit entwickeln.

$$\dot{x}_j(t) := \frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\sum_{k=1}^{M} \$_{jk} \cdot x_k(t) - \sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t) \right]$$

Wobei die Parameter $\$_{kl}$ die einzelnen Einträge in der Auszahlungsmatrix des 1.Spielers darstellen

$$\hat{\$} = \hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$_{11} & \$_{12} & \$_{13} & \dots & \$_{1M} \\ \$_{21} & \$_{22} & \$_{23} & \dots & \$_{2M} \\ \$_{31} & \$_{32} & \$_{33} & \dots & \$_{3M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \$_{M1} & \$_{M2} & \$_{M3} & \dots & \$_{MM} \end{pmatrix}$$

Fitness der Strategie j

Durchschnitt-licher Erfolg der j-ten Strategie

Durchschnittliche Fitness (Auszahlung) der gesamten Population

Replikatordynamik

(für symmetrische (2x2)-Spiele)

Wir beschränken uns nun auf symmetrische (2x2)-Spiele , d.h. zwei Personen - 2 Strategien Spiele (M=2). Die Differentialgleichung der Replikatordynamik vereinfacht sich unter dieser Annahme wie folgt:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\sum_{k=1}^{2} \$_{jk} \cdot x_k(t) - \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t) \right]$$

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j \cdot \left[\$_{j1} \cdot x_1 + \$_{j2} \cdot x_2 - \left(\$_{11} \cdot x_1 \cdot x_1 + \$_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \$_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 + \$_{22} \cdot x_2 \cdot x_2 \right) \right]$$

Da es lediglich zwei Strategien und somit zwei Populationsanteile (x_1, x_2) gibt, können wir den zweiten Populationsanteil durch den ersten ausdrücken: $x_2 = 1 - x_1$
Wir setzen im Folgenden der Einfachheit halber $x = x_1$ und $1 - x = x_2$
und betrachten nur j=1.

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \left[\$_{11} \cdot x + \$_{12} \cdot (1-x) - \left(\$_{11} \cdot x \cdot x + \$_{12} \cdot x \cdot (1-x) + \$_{21} \cdot (1-x) \cdot x + \$_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-x) \right) \right]$$

Replikatordynamik
(für symmetrische (2x3)-Spiele)

Wir beschränken uns nun auf symmetrische (2x3)-Spiele , d.h. zwei Personen - 3 Strategien Spiele (M=3). Die Differentialgleichung der Replikatordynamik vereinfacht sich unter dieser Annahme wie folgt:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\sum_{k=1}^{3} \$_{jk} \cdot x_k(t) - \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t) \right]$$

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j \cdot \left[\begin{array}{l} \$_{j1} \cdot x_1 + \$_{j2} \cdot x_2 + \$_{j3} \cdot x_3 - \\ - \underbrace{\left(\begin{array}{l} \$_{11} \cdot x_1 \cdot x_1 + \$_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \$_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + \\ + \$_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 + \$_{22} \cdot x_2 \cdot x_2 + \$_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + \\ + \$_{31} \cdot x_3 \cdot x_1 + \$_{32} \cdot x_3 \cdot x_2 + \$_{33} \cdot x_3 \cdot x_3 \end{array} \right)}_{\overline{\$}} \end{array} \right]$$

$$j = 1,2,3$$

Replikatordynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele)

Man erhält ein System von drei gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cdot \left[\$_{11} \cdot x_1 + \$_{12} \cdot x_2 + \$_{13} \cdot x_3 - \overline{\$}\right]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot \left[\$_{21} \cdot x_1 + \$_{22} \cdot x_2 + \$_{33} \cdot x_3 - \overline{\$}\right]$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3 \cdot \left[\$_{31} \cdot x_1 + \$_{32} \cdot x_2 + \$_{33} \cdot x_3 - \overline{\$}\right]$$

Das System von Differentialgleichungen lässt sich bei gegebener Auszahlungsmatrix $\hat{\$}$ und Anfangsbedingung $\left(x_1(0)\,,\, x_2(0)\,,\, x_3(0)\right)$ meist nur nummerisch (auf dem Computer) lösen. Die Lösungen bestehen dann aus den drei (zeitlich abhängigen) Populationsanteilen $\left(x_1(t)\,,\, x_2(t)\,,\, x_3(t)\right)$.

Replikatordynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 1**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

	Strategie 1	**Strategie 2**	**Strategie 3**
Strategie 1	(0, 0)	(2, -1)	(-1 , 2)
Strategie 2	(-1 , 2)	(0 , 0)	(2 , -1)
Strategie 3	(2 , -1)	(-1 , 2)	(0 , 0)

Die System der Replikatordynamik besitzt das folgende Aussehen:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cdot \left[2 \cdot x_2 - x_3 - \bar{\$}\right]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot \left[- x_1 + 2 \cdot x_3 - \bar{\$}\right]$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3 \cdot \left[2 \cdot x_1 - x_2 - \bar{\$}\right]$$

$$\text{mit}: \ \bar{\$} = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$$

Replikatordynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 1**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

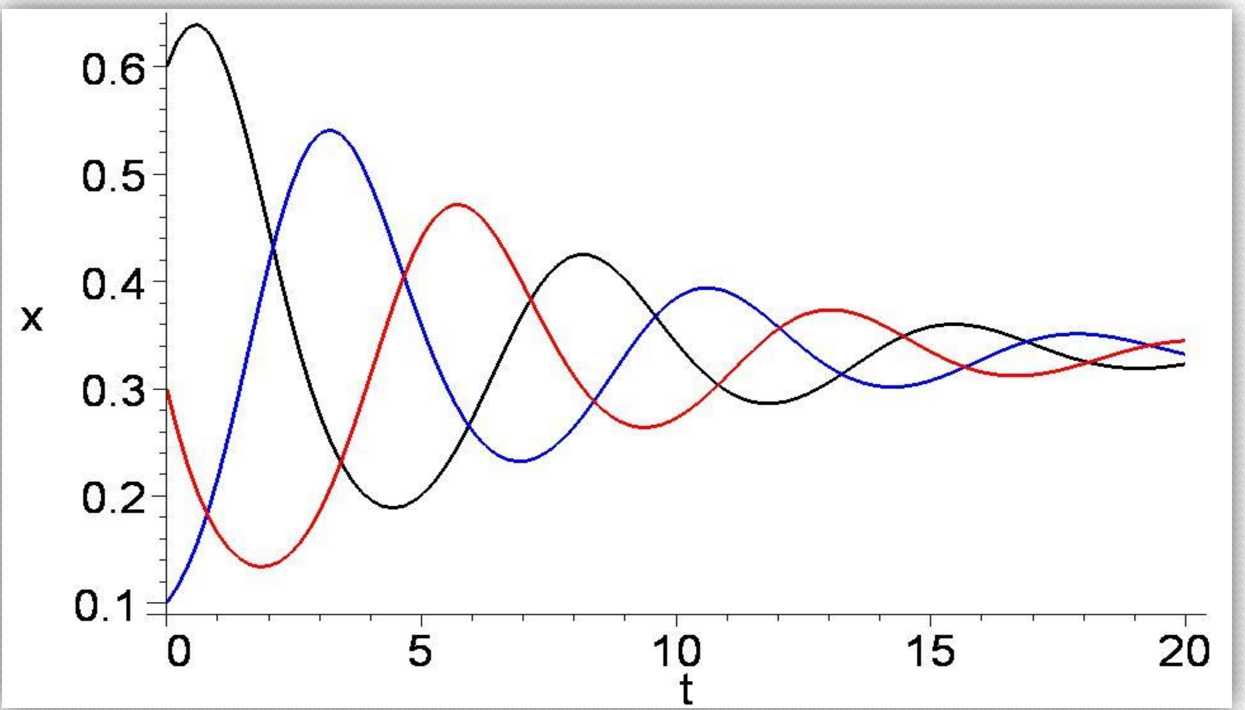
	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(2, -1)	(-1 , 2)
Strategie 2	(-1 , 2)	(0 , 0)	(2 , -1)
Strategie 3	(2 , -1)	(-1 , 2)	(0 , 0)

Bei gewählter Anfangsbedingung $\left(x_1(0)\,,\,x_2(0)\,,\,x_3(0)\right)=\left(0.3\,,\,0.1\,,\,0.6\right)$ besitzt die Lösung der Replikatordynamik das folgende Aussehen:

Schwarz: $x_3(t)$

Rot : $x_1(t)$

Blau : $x_2(t)$



Replikatordynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 1**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

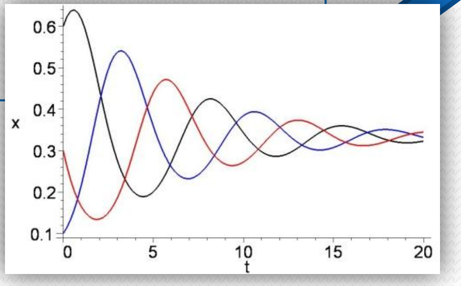
	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(2, -1)	(-1 , 2)
Strategie 2	(-1 , 2)	(0 , 0)	(2 , -1)
Strategie 3	(2 , -1)	(-1 , 2)	(0 , 0)

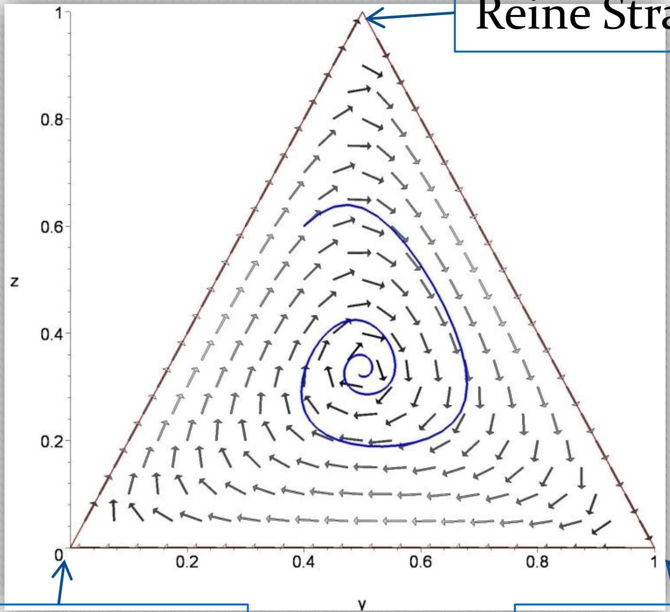
Aufgrund der Eigenschaft $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ kann man ein Populationsanteil durch die beiden Anderen ausdrücken. Zur Visualisierung projiziert man gewöhnlich die zeitliche Veränderung der Populationsanteile auf ein Dreieck, wobei man *Baryzentrische Koordinaten* benutzt.

Baryzentrische Koordinaten:

$$y := x_2 + \frac{x_3}{2}$$

$$z := x_3$$





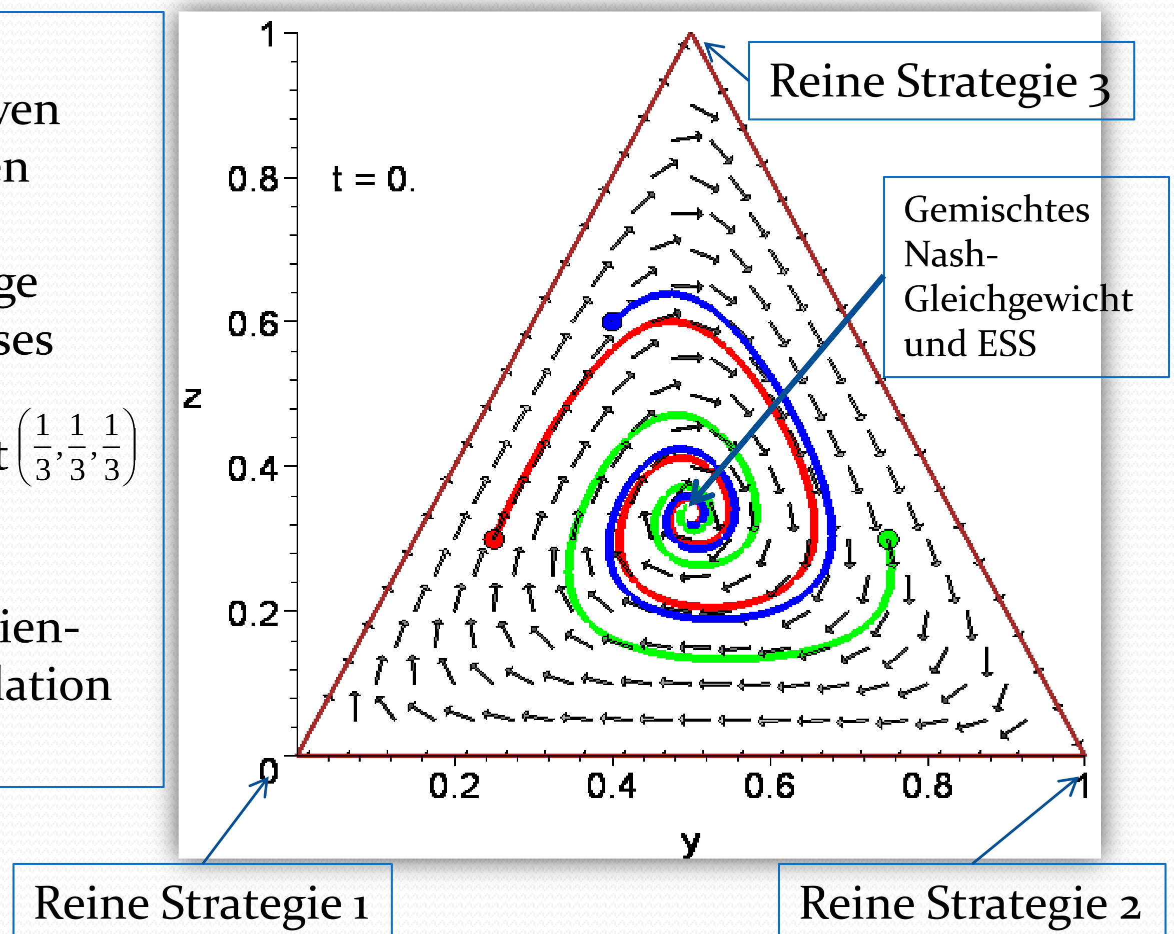
Replikatordynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 1**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(2, -1)	(-1 , 2)
Strategie 2	(-1 , 2)	(0 , 0)	(2 , -1)
Strategie 3	(2 , -1)	(-1 , 2)	(0 , 0)

Die rechte Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der relativen Populationsanteile der gewählten Strategien für drei mögliche Anfangsbedingungen. Die einzige evolutionär stabile Strategie dieses Beispiels befindet sich beim gemischten Nash-Gleichgewicht $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Die einzelnen Pfeile im Dreieck veranschaulichen den durch die Spielmatrix bestimmten Strategien-„Richtungswind“, dem die Population zeitlich folgen wird.



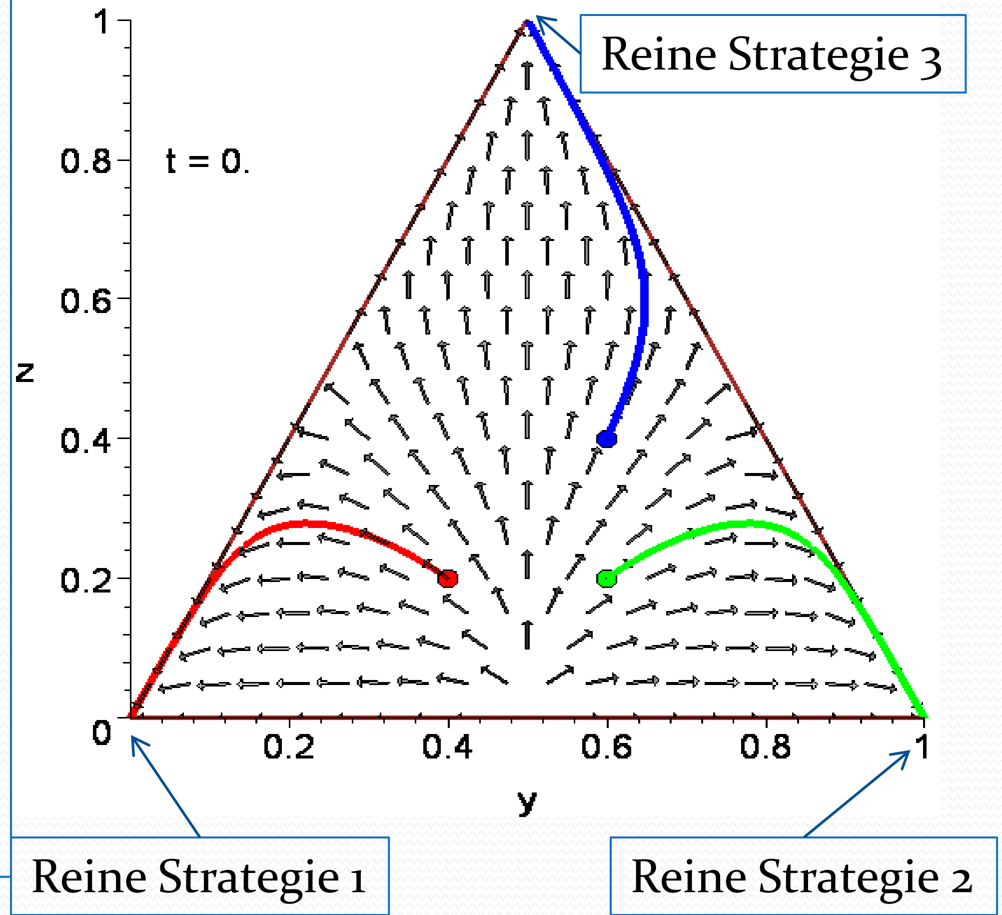
Replikatordynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 2**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(-3, -3)	(-1 , -1)
Strategie 2	(-3 , -3)	(0 , 0)	(-1 , -1)
Strategie 3	(-1 , -1)	(-1 , -1)	(0 , 0)

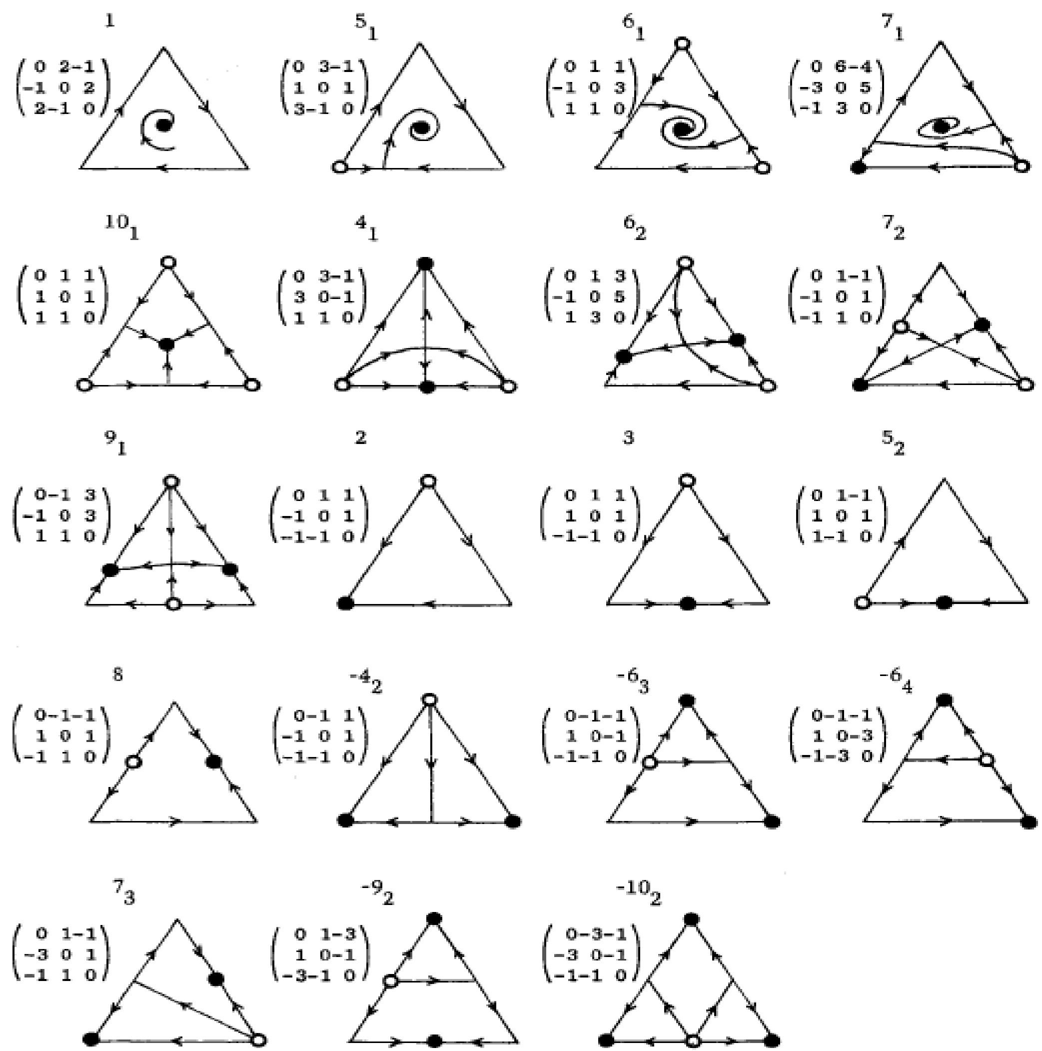
Die rechte Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der relativen Populationsanteile der gewählten Strategien für drei mögliche Anfangsbedingungen. Das Spiel besitzt drei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, die ebenfalls evolutionär stabile Strategien darstellen. Welche der drei ESS die Population realisiert hängt von dem Anfangswert der Populationsanteile ab. Die zeitliche Entwicklung folgt wieder dem Strategien-„Richtungswind" der zugrundeliegenden Auszahlungsmatrix.



Replikatordynamik
(Klassifizierung symmetrische (2x3)-Spiele)

E. C. Zeeman, *POPULATION DYNAMICS FROM GAME THEORY, In:* Global Theory of Dynamical Systems, Springer 1980

E. C. Zeeman zeigt in seinem im Jahre 1980 veröffentlichten Artikel, dass man evolutionäre, symmetrische (2x3)-Spiele in 19 Klassen einteilen kann. Die Abbildung rechts zeigt das evolutionäre Verhalten dieser 19 Spieltypen. Die ausgefüllten schwarzen Punkte markieren die evolutionär stabilen Strategien der jeweiligen Spiele. Es gibt Spielklassen, die besitzen lediglich eine ESS und Klassen die sogar drei ESS besitzen.



Hausaufgabe

1. Informieren Sie sich über die Begriffe
   a) Komplexe Sozio-Ökonomische Netzwerke
   b) Komplexe Sozio-Ökologische Netzwerke
   c) Zufällige-, „Kleine Welt“- und skalenfreie Netzwerke
   d) Agenten-basierte Simulation

   und geben Sie für diese Begriffe mögliche Beispiele an.
2. Wofür wurde der aktuelle Nobelpreis vergeben? Informieren Sie sich über Frau Prof. Dr. Elinor Ostrom und stellen Sie einen ihrer Forschungsschwerpunkte in einem kurzen Aufsatz dar.