# Neue Entwicklungen in der Evolutionären Spieltheorie

## (Vorlesungsteil 4)

Vorlesung im Rahmen des
Deutsch-Französischen Dozenten-Austauschprogramms „*Minerve*“

Dr. Matthias Hanauske
Institut für Wirtschaftsinformatik
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt am Main

Lyon, 23.Oktober 2009

# Inhaltsübersicht der gesamten Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
2. Grundlagen der evolutionären Spieltheorie
3. Neue Entwicklungen in der evolutionären Spieltheorie

# Inhaltsübersicht der vorigen drei Teile der Vorlesung

+ Hausaufgabe: „Dilemma des Wettrüstens“

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie

# Hausaufgabe

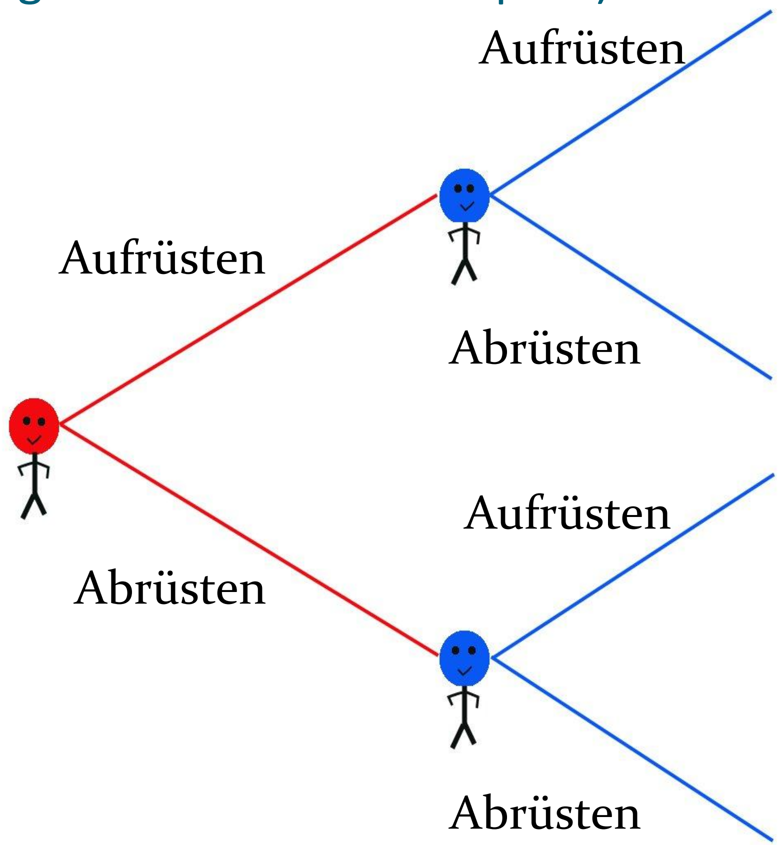
- Zwei Länder stehen vor der Entscheidung die Streitkräfte ihres Landes militärisch, atomar aufzurüsten oder atomar abzurüsten.

1. Definieren Sie das Spiel.
2. Beschreiben Sie eine mögliche Situation der Länder und definieren Sie die dem Spiel zugrundeliegende Auszahlungsmatrix.
3. Berechnen Sie die Nash-Gleichgewichte des Spiels. Gibt es eine dominante Strategie?
4. Um welche Spielklasse handelt es sich?
5. Handelt es sich um ein symmetrisches oder unsymmetrisches Spiel?

# Dilemma des Wettrüstens

(1. Mögliche Definition des Spiels)

| | $s_1^2 \hat{=} Auf$ | $s_1^2 \hat{=} Ab$ |
|---|---|---|
| $s_1^1 \hat{=} Auf$ | (a , a) | (b , c) |
| $s_2^1 \hat{=} Ab$ | (c , b) | (d , d) |




$(2 - \mathit{Länder}) - (2 - \mathit{Strategien}) - \mathit{Spiel} \quad \Gamma :$

$\Gamma := (\mathrm{A}, (\mathrm{S}^1, \mathrm{S}^2), (\$^1, \$^2))$

$\mathit{Menge}$ der Spieler (Länder):

$\mathrm{A} = \{1,2\} = \{\text{Land } 1, \text{Land } 2\}$

Strategienmenge des 1-ten Spielers (Land 1):

$\mathrm{S}^1 = \{s_1^1, s_2^1\} = \{\text{Aufrüsten}, \text{Abrüsten}\}$

Strategienmenge des 2-ten Spielers (Land 2):

$\mathrm{S}^2 = \{s_1^2, s_2^2\} = \{\text{Aufrüsten}, \text{Abrüsten}\}$

Auszahlungsfunktion des 1. und 2. Spielers:

$\$^1 : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \to \Re \quad \text{und} \quad \$^2 : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \to \Re$

$\$^1(\text{Auf}, \text{Auf}) = a \quad , \quad \$^2(\text{Auf}, \text{Auf}) = a$

$\$^1(\text{Auf}, \text{Ab}) = b \quad , \quad \$^2(\text{Auf}, \text{Ab}) = c$

$\$^1(\text{Ab}, \text{Auf}) = c \quad , \quad \$^2(\text{Ab}, \text{Auf}) = b$

$\$^1(\text{Ab}, \text{Ab}) = d \quad , \quad \$^2(\text{Ab}, \text{Ab}) = d$

# Dilemma des Wettrüstens

(2. Eigenschaften der Auszahlungsmatrix (I))

| | $s_1^2 \hat{=} Auf$ | $s_1^2 \hat{=} Ab$ |
|---|---|---|
| $s_1^1 \hat{=} Auf$ | (a , a) | (b , c) |
| $s_2^1 \hat{=} Ab$ | (c , b) | (d , d) |

- Das zunächst allgemein definierte symmetrische (2x2)-Spiel des Wettrüstens zweier Länder wird nun durch Festlegung der freien Parameter (a,b,c und d) an eine spezifische Ausgangssituation angepasst:
  - Betrachtet man den Nutzen für die Länder bei gemeinsamen Aufrüsten (Auf,Auf) und gemeinsamen Abrüsten (Ab,Ab), so nehmen wir im Folgenden an, dass es sowohl finanziell, als auch für das „Wohlbefinden“ der einzelnen Länder von Vorteil ist Strategie (Ab,Ab) zu wählen. $\Rightarrow$ $a<d$

# Dilemma des Wettrüstens

(2. Eigenschaften der Auszahlungsmatrix (II))

| | $s_1^2 \hat{=} Auf$ | $s_1^2 \hat{=} Ab$ |
|---|---|---|
| $s_1^1 \hat{=} Auf$ | (a , a) | (b , c) |
| $s_2^1 \hat{=} Ab$ | (c , b) | (d , d) |

- Betrachtet man den Nutzen für die Länder wenn *Land 1* aufrüstet und *Land 2* abrüstet (Auf,Ab), und setzt voraus, dass beide Länder sich ernsthaft voneinander bedroht fühlen, so würde Land 1 diese Strategienkombination sehr positiv bewerten, Land 2 dagegen äußerst negativ.

$\Rightarrow$ $b \gg c$ und $b > d$ und $c < a$

# Dilemma des Wettrüstens

(2. Eigenschaften der Auszahlungsmatrix (III))

| | $s_1^2 \triangleq Auf$ | $s_1^2 \triangleq Ab$ |
|---|---|---|
| $s_1^1 \triangleq Auf$ | (a , a) | (b , c) |
| $s_2^1 \triangleq Ab$ | (c , b) | (d , d) |

- Wir legen die Parameter des Spiels wie folgt fest:

| | Aufrüsten | Abrüsten |
|---|---|---|
| Aufrüsten | (1 , 1) | (4 , 0) |
| Abrüsten | (0 , 4) | (2 , 2) |

Siehe: *Schlee, Walter* **Einführung in die Spieltheorie**, Vieweg, 2004
Seite 15

# Dilemma des Wettrüstens

## (3. Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte)

2. Es gibt nur ein Nash-Gleichgewicht, das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist:

| | **Aufrüsten** | **Abrüsten** |
|---|---|---|
| Aufrüsten | (1 , 1) | (4 , 0) |
| Abrüsten | (0 , 4) | (2 , 2) |

**(Aufrüsten , Aufrüsten) ist die dominante Strategie des Spiels.**

# Dilemma des Wettrüstens

(4. Spielklasse und 5. Symmetrieeigenschaft)

| | $s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Auf$ | $s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Ab$ |
|---|---|---|
| $s_1^1 \mathrel{\hat{=}} Auf$ | (1 , 1) | (4 , 0) |
| $s_2^1 \mathrel{\hat{=}} Ab$ | (0 , 4) | (2 , 2) |

- Das konstruierte Spiel gehört der Klasse der dominanten Spiele an; es ist dem Gefangenendilemma ähnlich.
- Das Dilemma des Wettrüstens wurde als ein symmetrisches (2x2)-Spiel konstruiert. Mögliche Ungleichheiten zwischen den Länder (ungleiche Ausgangssituationen und Machtverhältnisse, einseitige Abhängigkeiten, durchsetzbare Druckmittel wie z.B. Sanktionen, ...) wurden vernachlässigt.
- Es wurden desweiteren mögliche dritte Strategien (z.B. eine Unterscheidung zwischen konventioneller und atomarer Aufrüstung) nicht mit einbezogen.

# Inhaltsübersicht des vierten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie
2. Evolutionäre Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 4)
   c) Evolutionär stabile Strategien
   d) Die Replikatordynamik
   e) Beispiel: Symmetrische (2x2)-Spiele
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

# Inhaltsübersicht des vierten Teils der Vorlesung

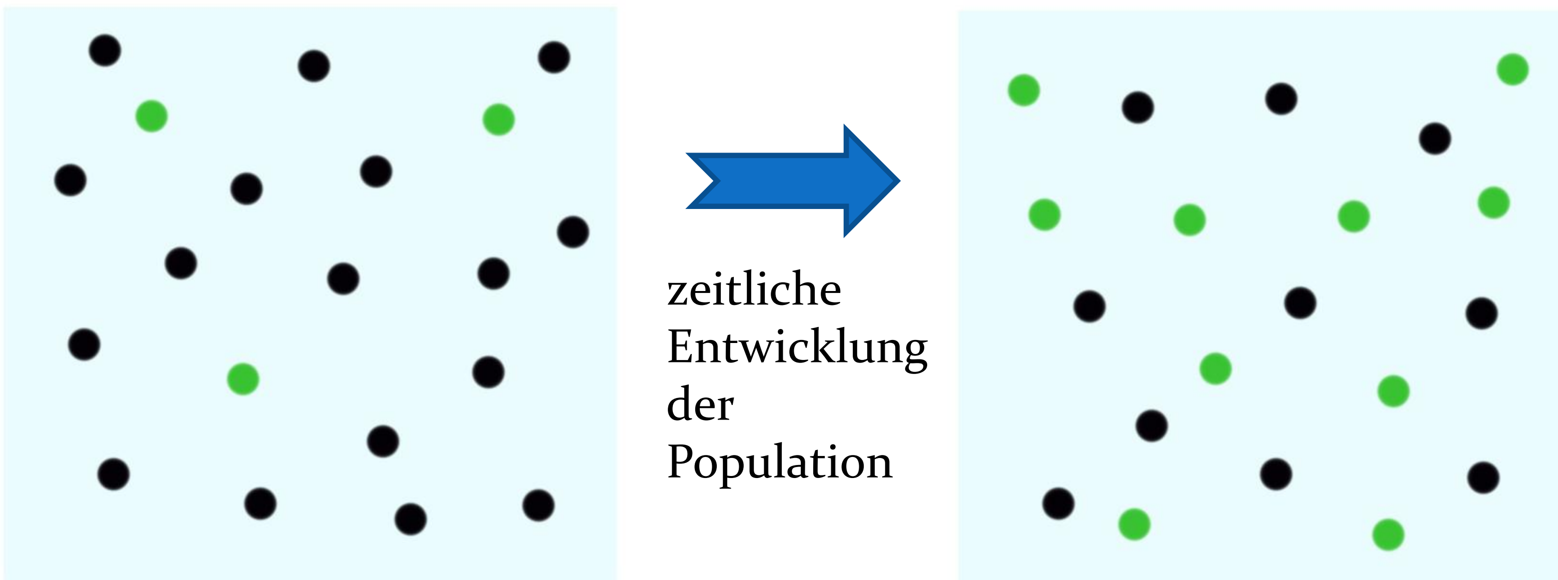
1. Grundlagen der Spieltheorie
    a) Einleitung
    b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
    c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
    d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
    e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
    f) Reine und gemischte Strategien
    g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
    h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
    i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
    j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
    k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
    l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
    m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
    n) Weitere Konzepte der Spieltheorie
2. Evolutionäre Spieltheorie
    a) Einleitung
    b) Evolutionär stabile Strategien
    c) Mathematische Grundlagen (Teil 4)
    d) Die Replikatordynamik
    e) Beispiel: Symmetrische (2x2)-Spiele
        i. Dominante Spiele
        ii. Koordinationsspiele
        iii. Anti-Koordinationsspiele

# Ursprünge der evolutionären Spieltheorie

- Der von Maynard Smith im Jahre 1972 veröffentlichte Artikel (*J. Maynard Smith* **Game theory and the evolution of fighting**, *In "On Evolution"*, Seiten 8-28. Edingburgh University Press, Edingburgh,  1972) gilt allgemein als der erste spieltheoretische Ansatz der ***Evolutionären Spieltheorie***. Smith beschreibt in dem Artikel, wie man die biologische, evolutionäre Entwicklung von Organismen aus den Nash-Gleichgewichten von symmetrischen (2x2)-Spielen ablesen kann. Er zeigt, wie die dynamische Entwicklung der Häufigkeitsverteilung der Organismen in einem stabilen Zustand endet – der sogenannten *evolutionär stabilen Strategie*.

# Evolutionäre Spieltheorie (I)

Die evolutionäre Spieltheorie betrachtet die zeitliche Entwicklung des strategischen Verhaltens einer gesamten Spielerpopulation.

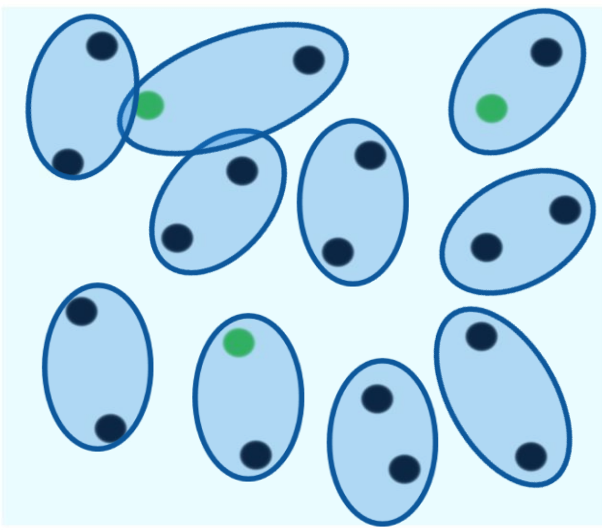



$x(0)=0.15$ $x(10)=0.5$

Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
$x(t)$ : Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.

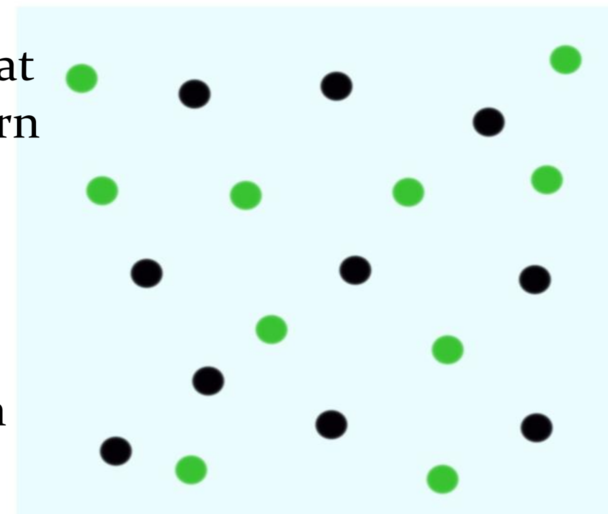
# Evolutionäre Spieltheorie (II)

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner wechseln .



$x(0)=0.15$

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt t=0 das erste Mal das Spiel. Die Spieler wählen im Mittel zu 15% die grüne Strategie.

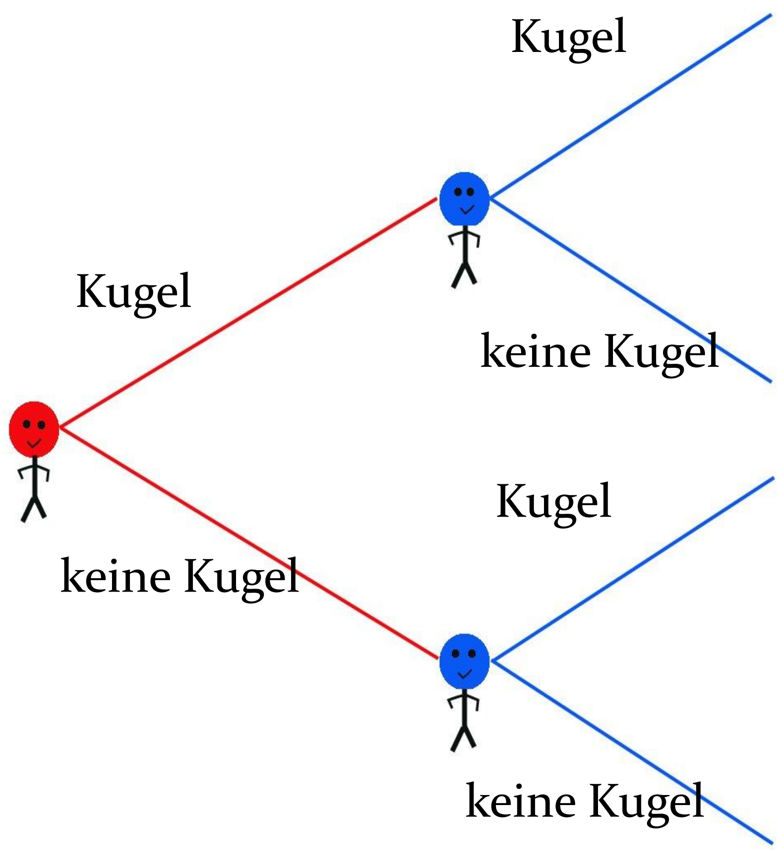


$x(10)=0.5$

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die Spieler zunehmend attraktiver. Zum Zeitpunkt t=10 spielen schon 50% grün.

# Beispiel 1:

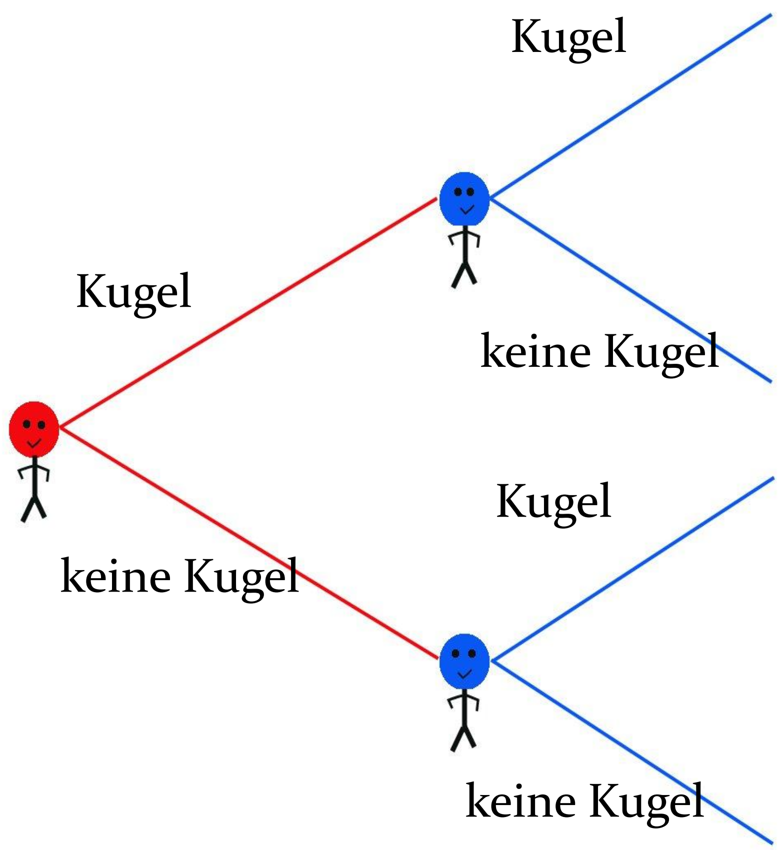
| | Kugel | Keine Kugel |
|---|---|---|
| Kugel | (0 , 0) | (2 , -1) |
| Keine Kugel | (-1 , 2) | (1 , 1) |




Jeder Spieler hat in diesem evolutionären Spiel in jeder Spielperiode zwei mögliche Strategien, nämlich eine Papierkugel in seiner geschlossenen Hand halten, oder keine Kugel in der Hand aufzubewahren. Zum Anfang jeder Spielperiode treffen sich (zufällig) jeweils zwei Spieler, halten ihre geschlossene Hand vor sich und öffnen diese dann gleichzeitig. Die Auszahlungen werden mittels der oben angegebenen Spielmatrix festgelegt. Die gewählten Strategien-kombinationen der Spieler und die erzielten Gewinne bzw. Verluste werden von jedem Spieler auf einem Blatt Papier notiert. Danach beginnt die nächste Spielperiode und die Spieler suchen wieder zufällig einen Spielpartner.

# Beispiel 2:

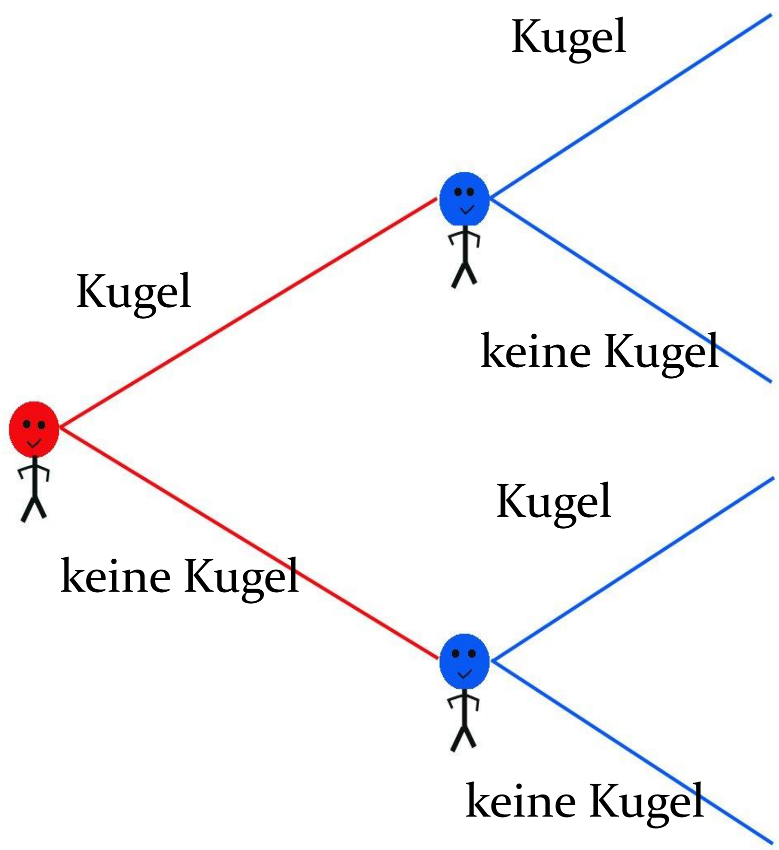
| | Kugel | Keine Kugel |
|---|---|---|
| Kugel | (-1 , -1) | (3 , 0) |
| Keine Kugel | (0, 3) | (1 , 1) |




Jeder Spieler hat in diesem evolutionären Spiel in jeder Spielperiode zwei mögliche Strategien, nämlich eine Papierkugel in seiner geschlossenen Hand halten, oder keine Kugel in der Hand aufzubewahren. Zum Anfang jeder Spielperiode treffen sich (zufällig) jeweils zwei Spieler, halten ihre geschlossene Hand vor sich und öffnen diese dann gleichzeitig. Die Auszahlungen werden mittels der oben angegebenen Spielmatrix festgelegt. Die gewählten Strategien-kombinationen der Spieler und die erzielten Gewinne bzw. Verluste werden von jedem Spieler auf einem Blatt Papier notiert. Danach beginnt die nächste Spielperiode und die Spieler suchen wieder zufällig einen Spielpartner.

# Beispiel 3:

| | Kugel | Keine Kugel |
|---|---|---|
| Kugel | (0 , 0) | ( 2, -2) |
| Keine Kugel | (-2 , 2) | (3 , 3) |




Jeder Spieler hat in diesem evolutionären Spiel in jeder Spielperiode zwei mögliche Strategien, nämlich eine Papierkugel in seiner geschlossenen Hand halten, oder keine Kugel in der Hand aufzubewahren. Zum Anfang jeder Spielperiode treffen sich (zufällig) jeweils zwei Spieler, halten ihre geschlossene Hand vor sich und öffnen diese dann gleichzeitig. Die Auszahlungen werden mittels der oben angegebenen Spielmatrix festgelegt. Die gewählten Strategien-kombinationen der Spieler und die erzielten Gewinne bzw. Verluste werden von jedem Spieler auf einem Blatt Papier notiert. Danach beginnt die nächste Spielperiode und die Spieler suchen wieder zufällig einen Spielpartner.

# Inhaltsübersicht des vierten Teils der Vorlesung

# Evolutionär stabile Strategien (ESS)

- Evolutionär stabile Strategien sind die stabilen Endzustände der Häufigkeitsverteilung x(t):

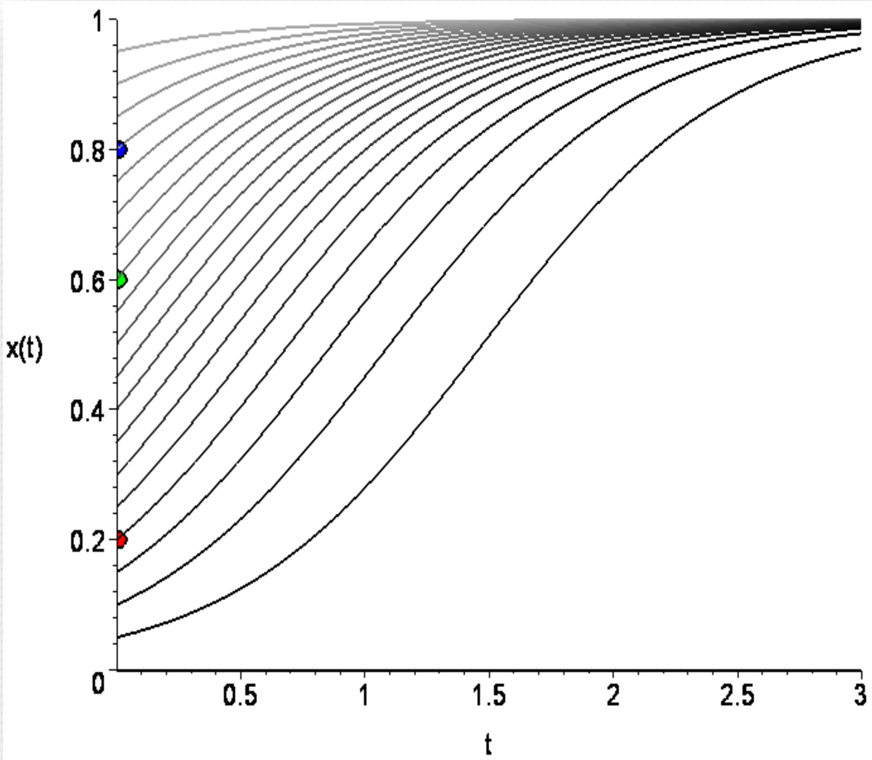
$$\lim_{t\to\infty}\left(x(t)\right)$$

Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz einer ESS ist, dass diese ein Nash – Gleichgewicht des zugrundeliegenden Spiels ist.

**Beispiel:**
*Gefangenendilemma ähnliche Spiele*
Für die ESS des evolutionären Gefangenendilemma – Spiels ergibt sich:

$$\lim_{t\to\infty}\left(x(t)\right)=1 \quad \Rightarrow \quad \text{alle "gestehen"}$$

bzw. alle haben eine Kugel in der Hand



# Def.: Evolutionär stabile Strategie

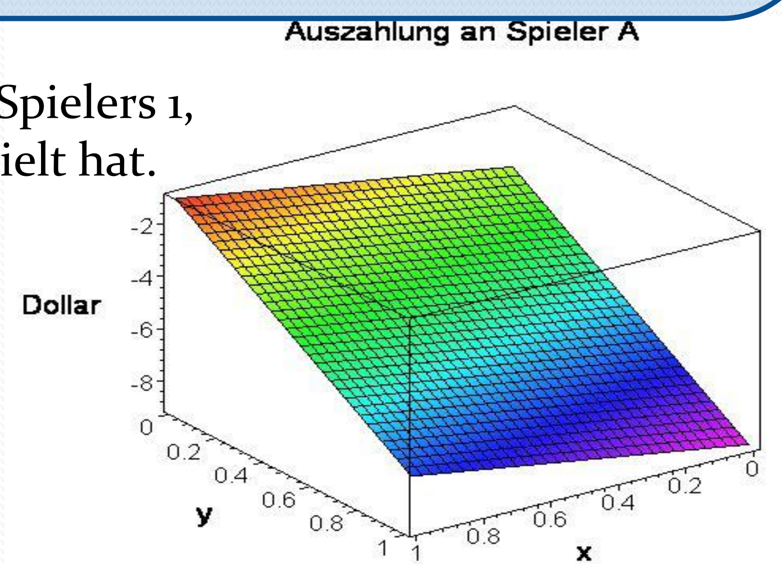
(Für symmetrisches Zweipersonen-Spiel)

Mathematische Definition (W.Schlee):
Gegeben sei ein symmetrisches Zweipersonen-Spiel Γ mit der Auszahlungsmatrix $\hat{\$} := \hat{\$}^1 = \left(\hat{\$}^2\right)^T$. Eine Strategie $s^* := s^{1*} = s^{2*}$ heißt evolutionär stabile Strategie (ESS), wenn

1. $(s^*, s^*)$ ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht des Spiels ist, und
2. $\forall s$ mit der Eigenschaft $s \neq s^*$ und $s \in r(s^*)$
   gilt $\$(s, s) < \$(s^*, s)$

$r(s^*)$ ist die Menge der besten Antworten des Spielers 1, wenn der andere Spieler die Strategie $s^*$ gespielt hat.

| Beispiel: | $s_1^2 \hat{=} Ge$ | $s_1^2 \hat{=} Sc$ |
|---|---|---|
| $s_1^1 \hat{=} Ge$ | (-7 , -7) | (-1 , -9) |
| $s_2^1 \hat{=} Sc$ | (-9 , -1) | (-3 , -3) |



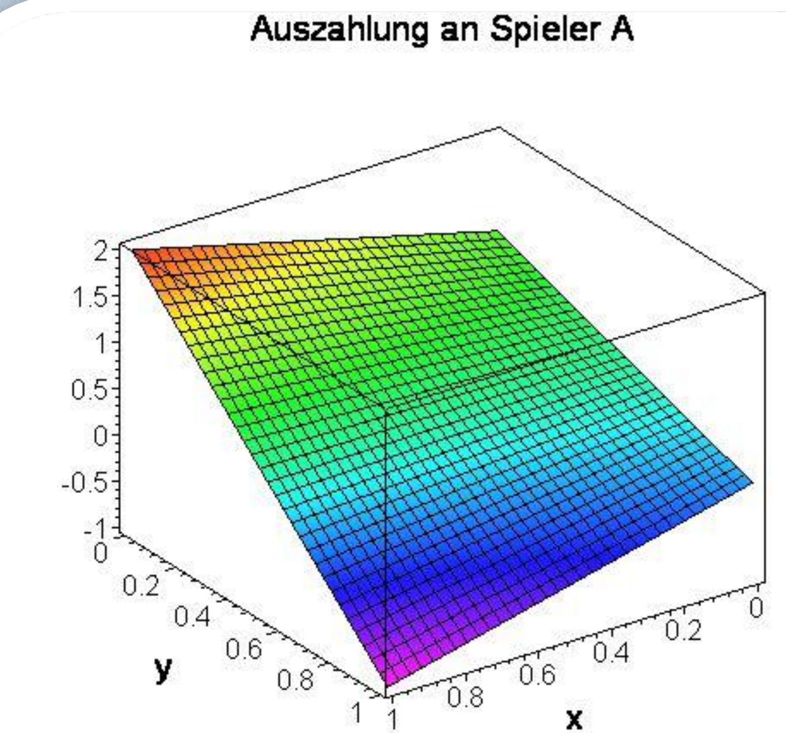
# Beispiel: Angsthasen-Spiel (I)

Mathematische Definition (W.Schlee):
Gegeben sei ein symmetrisches Zweipersonen-Spiel Γ mit der Auszahlungsmatrix $\hat{\$} := \hat{\$}^1 = \left(\hat{\$}^2\right)^T$ . Eine Strategie $s^* := s^{1*} = s^{2*}$ heißt evolutionär stabile Strategie (ESS), wenn

1. $(s^*, s^*)$ ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht des Spiels ist, und
2. $\forall s$ mit der Eigenschaft $s \neq s^*$ und $s \in r(s^*)$ gilt $\$(s\ , s\ ) < \$(s^*, s\ )$

Das gemischte Nash-Gleichgewicht $s^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ist das einzige symmetrische Nash-Gleichgewicht des Spiels. Die Menge der besten Antworten auf $s^*$ sind alle möglichen gemischten Strategien.

| | Springe nicht | Springe |
|---|---|---|
| Springe nicht | (-1 , -1) | (2 , 0) |
| Springe | (0 , 2) | (1 , 1) |



# Beispiel: Angsthasen-Spiel (II)

Mathematische Definition (W.Schlee):
Gegeben sei ein symmetrisches Zweipersonen-Spiel Γ mit der Auszahlungsmatrix $\hat{\$} := \hat{\$}^1 = \left(\hat{\$}^2\right)^T$. Eine Strategie $s^* := s^{1*} = s^{2*}$ heißt evolutionär stabile Strategie (ESS), wenn

1. $(s^*, s^*)$ ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht des Spiels ist, und
2. $\forall s$ mit der Eigenschaft $s \neq s^*$ und $s \in r(s^*)$ gilt $\$(s\ , s\ ) < \$(s^*, s\ )$

Die Auszahlungsfunktion des 1. Spielers in gemischten Strategien lautet:

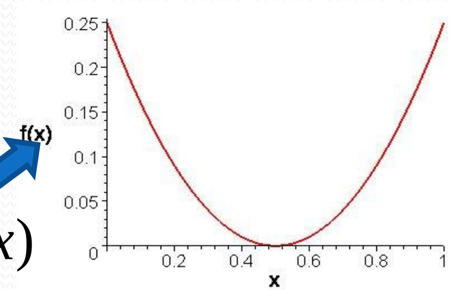
$$\$(x, y) := \$^1(x, y) = -2 \cdot x \cdot y + x - y + 1$$

| | Springe nicht | Springe |
|---|---|---|
| Springe nicht | (-1 , -1) | (2 , 0) |
| Springe | (0 , 2) | (1 , 1) |

$$\$(x, x) = -2 \cdot x^2 + 1 \overset{!}{<} -2 \cdot x + \frac{3}{2} = \$(\frac{1}{2}, x)$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 - x + \frac{1}{4} := f(x)$$




Daraus folgt, dass die gemischte Strategie $s^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ die evolutionär stabile Strategie des Angsthasenspiels ist.

# Inhaltsübersicht des vierten Teils der Vorlesung

# Summen

- Möchte man eine gewisse Anzahl von Größen addieren, so ist in der Mathematik das folgende Summenzeichen als eine abkürzende Schreibweise gebräuchlich:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i := x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N$$

Man ließt es: „Die Summe i gleich 1 bis N von $x_i$ “

$$Beispiel: x_i = i^2,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

# Differentialgleichungen

- Eine Differentialgleichung ist eine mathematische Gleichung in der Ableitungen von Funktionen auftreten. Die Theorie der Differentialgleichungen ist ein sehr wichtiges Gebiet innerhalb der Natur- und quantitativen Gesellschaftswissenschaften. Durch Differentialgleichungen wird das dynamische Verhalten von quantitativen Größen mathematisch beschrieben. Im folgenden werden wir das zeitliche Verhalten der Populationsanteile x(t) in Gestallt einer Differentialgleichung (der Replikatordynamik) formulieren.

# Inhaltsübersicht des vierten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie
2. Evolutionäre Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Evolutionär stabile Strategien
   c) Mathematische Grundlagen (Teil 4)
   d) Die Replikatordynamik
   e) Beispiel: Symmetrische (2x2)-Spiele
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

# Replikatordynamik

Wir beschränken uns zunächst auf symmetrische (2xM)-Spiele , d.h. zwei Personen - M Strategien Spiele. Da es sich um symmetrische Spiele handelt, sind alle Spieler gleichberechtigt und man kann von einer homogenen Population ausgehen.
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik beschreibt wie sich die einzelnen Populationsanteil der zur Zeit t gewählten Strategien $x_j(t)$ , j=1,2,...M im Laufe der Zeit entwickeln.

$$\dot{x}_j(t) := \frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[ \underbrace{\sum_{k=1}^{M} \$_{jk} \cdot x_k(t)} - \underbrace{\sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t)} \right]$$

Wobei die Parameter $\$_{kl}$ die einzelnen Einträge in der Auszahlungsmatrix des 1.Spielers darstellen

$$\hat{\$} = \hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$_{11} & \$_{12} & \$_{13} & \dots & \$_{1M} \\ \$_{21} & \$_{22} & \$_{23} & \dots & \$_{2M} \\ \$_{31} & \$_{32} & \$_{33} & \dots & \$_{3M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \$_{M1} & \$_{M2} & \$_{M3} & \dots & \$_{MM} \end{pmatrix}$$

**Fitness der Strategie j**

Durchschnittlicher Erfolg der j-ten Strategie

**Durchschnittliche Fitness (Auszahlung) der gesamten Population**

# Replikatordynamik

## (für symmetrische (2x2)-Spiele)

Wir beschränken uns nun auf symmetrische (2x2)-Spiele , d.h. zwei Personen - 2 Strategien Spiele (M=2). Die Differentialgleichung der Replikatordynamik vereinfacht sich unter dieser Annahme wie folgt:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[ \sum_{k=1}^{2} \$_{jk} \cdot x_k(t) - \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t) \right]$$

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j \cdot \left[ \$_{j1} \cdot x_1 + \$_{j2} \cdot x_2 - \left( \$_{11} \cdot x_1 \cdot x_1 + \$_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \$_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 + \$_{22} \cdot x_2 \cdot x_2 \right) \right]$$

Da es lediglich zwei Strategien und somit zwei Populationsanteile $(x_1, x_2)$ gibt, können wir den zweiten Populationsanteil durch den ersten ausdrücken: $x_2 = 1 - x_1$
Wir setzen im Folgenden der Einfachheit halber $x = x_1$ und $1 - x = x_2$
und betrachten nur j=1.

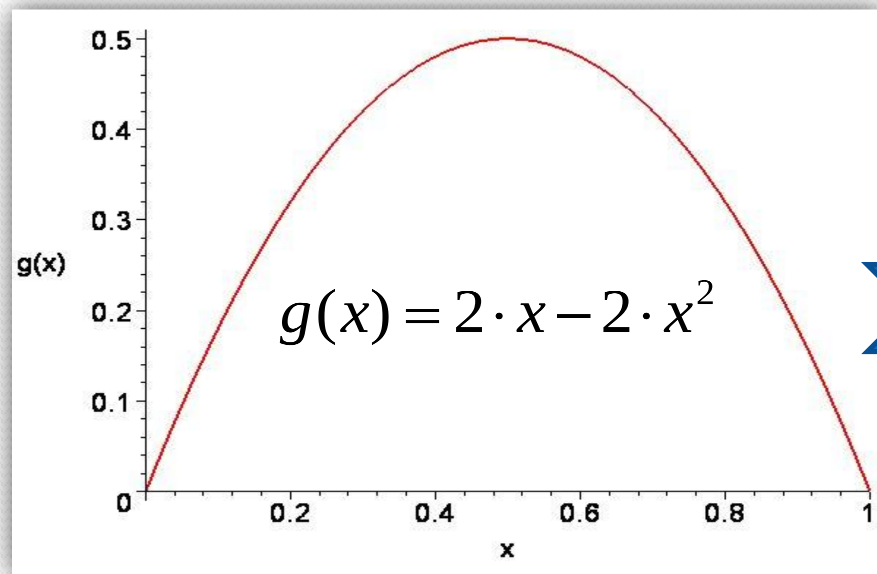
$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \left[ \$_{11} \cdot x + \$_{12} \cdot (1-x) - \left( \$_{11} \cdot x \cdot x + \$_{12} \cdot x \cdot (1-x) + \$_{21} \cdot (1-x) \cdot x + \$_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-x) \right) \right]$$

# Replikatordynamik
## (für symmetrische (2x2)-Spiele)

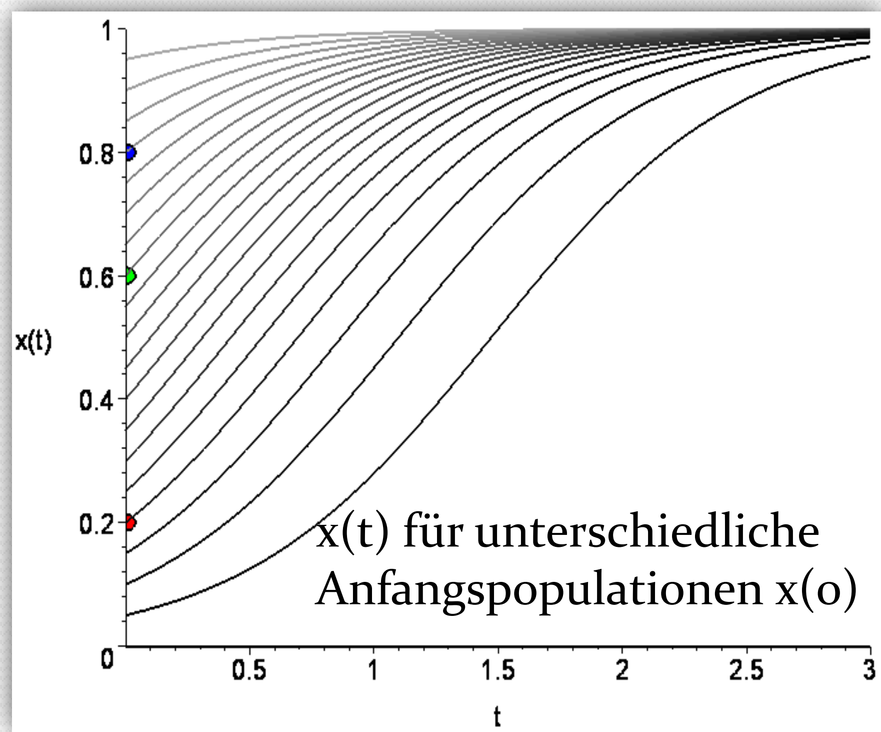
Durch weitere Umformungen lässt sich die Differentialgleichung der Replikatordynamik für symmetrische (2x2)-Spiele wie folgt vereinfachen:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \Big( (\$_{11} - \$_{21}) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (\$_{22} - \$_{12}) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \Big)$$



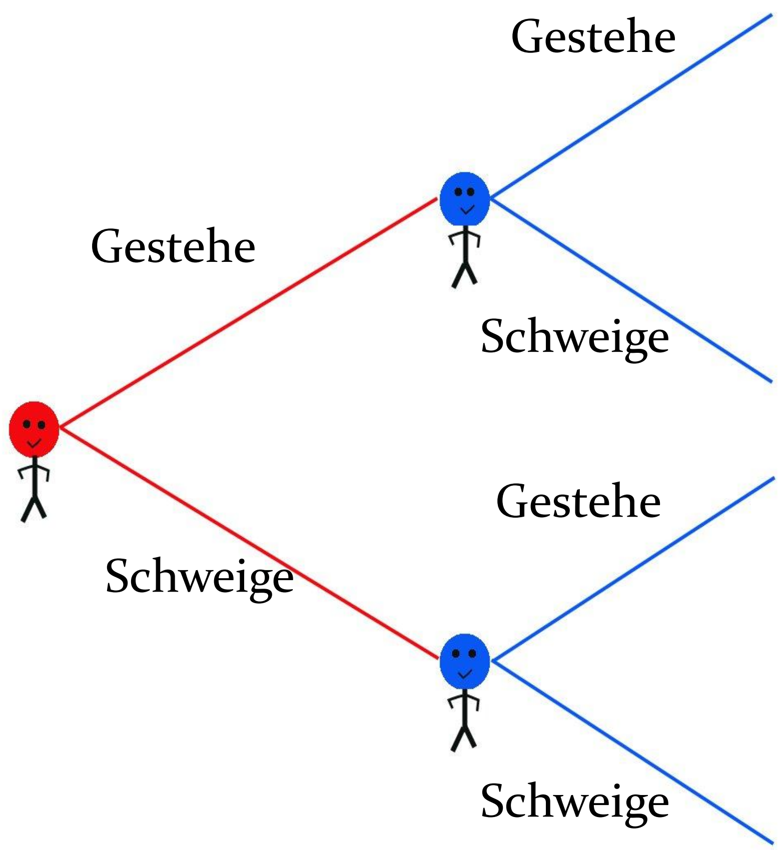

Beispiel: Gefangenendilemma
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



# Inhaltsübersicht des vierten Teils der Vorlesung

# Das Gefangenendilemma

| | Ge | Sc |
|---|---|---|
| Ge | (-7 , -7) | (-1 , -9) |
| Sc | (-9 , -1) | (-3 , -3) |




Bonnie und Clyde werden nach einem missglückten Banküberfall geschnappt und in verschiedenen Zellen untergebracht. Wenn beide schweigen kann der Staatsanwalt sie nur wegen verbotenen Waffenbesitzes für drei Jahre hinter Gitter bringen. Verrät jedoch einer den anderen, dann bekommt der Geständige als Zeuge der Anklage nur für ein Jahr hinter Gitter – der Nichtgeständige muss dann aber für neun Jahre ins Gefängnis. Gestehen beide, so müssen sie sieben Jahre absitzen.

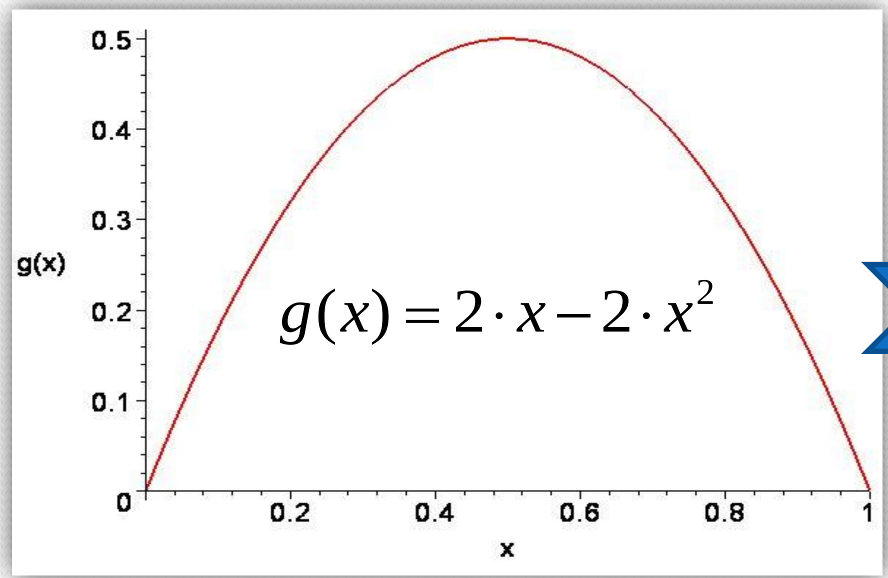
# Replikatordynamik
## (für das Gefangenendilemma)

| | Ge | Sc |
|---|---|---|
| Ge | (-7 , -7) | (-1 , -9) |
| Sc | (-9 , -1) | (-3 , -3) |

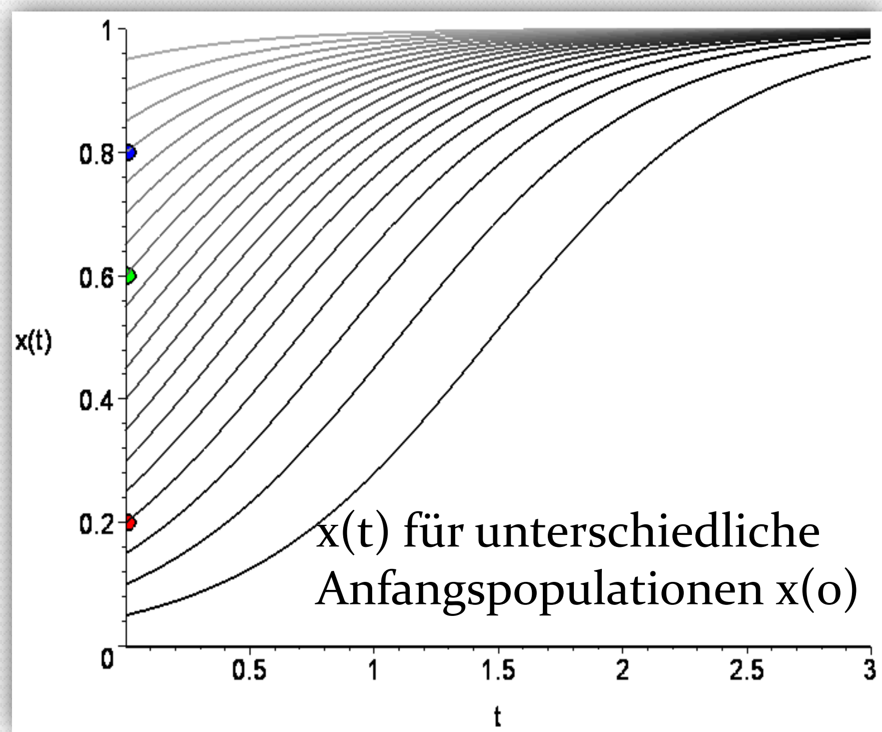
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Gefangenendilemma lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot \left(x(t)\right)^2 = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left( (-7-(-9)) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (-3-(-1)) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$




Beispiel: Gefangenendilemma
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



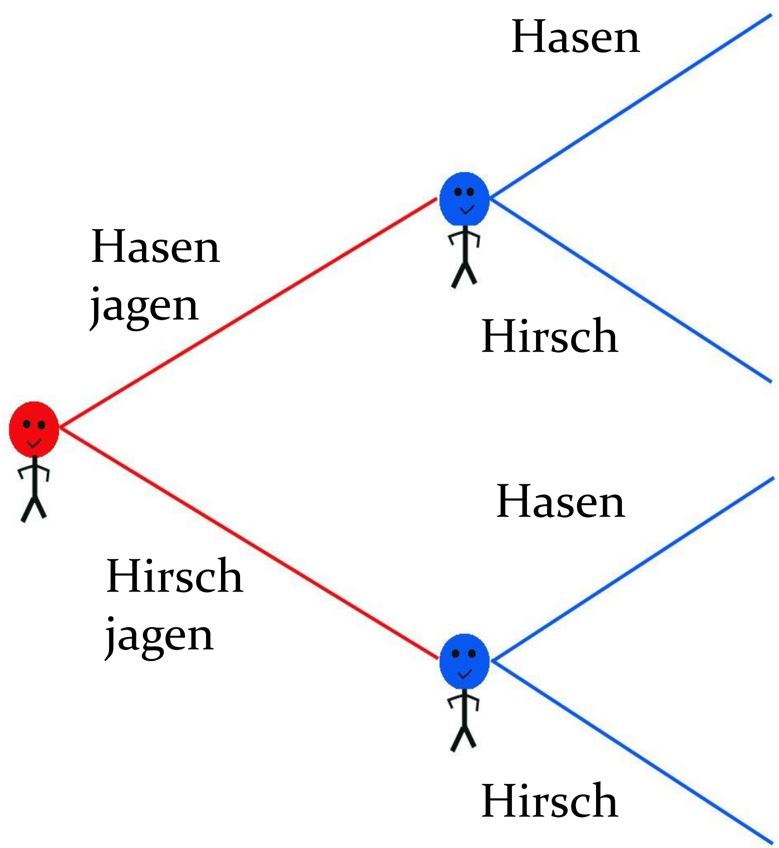

x(t) für unterschiedliche Anfangspopulationen x(0)

# Inhaltsübersicht des vierten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie
2. Evolutionäre Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Evolutionär stabile Strategien
   c) Mathematische Grundlagen (Teil 4)
   d) Die Replikatordynamik
   e) Beispiel: Symmetrische (2x2)-Spiele
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

# Rousseaus Hirschjagt - Spiel

| | Hasen | Hirsch |
|---|---|---|
| Hasen | (2 , 2) | (4 , 0) |
| Hirsch | (0 , 4) | (5 , 5) |




Zwei Jägern ist es im Laufe der Jagt gelungen einen Hirsch und vier Hasen einzukreisen. Die Jäger stehen nun vor der Entscheidung die Hasen entkommen zu lassen und gemeinsam den Hirsch zu erlegen oder sofort das Feuer auf die Hasen zu eröffnen. Entscheiden sich beide dafür den Hirsch zu erlegen, dann hat der Hirsch keine Chance. Einen Hirsch kann man für 10 Goldmünzen verkaufen. Entscheiden sich beide für die Hasenjagt, dann erschießt jeder Jäger zwei Hasen, für die man jeweils eine Goldmünze bekommt. Entscheidet sich jedoch nur einer für die Hirschjagt, so kann der Hirsch entkommen und derjenige der sich für die Hasenjagt entschieden hat kann alle vier Hasen erlegen.

# Replikatordynamik

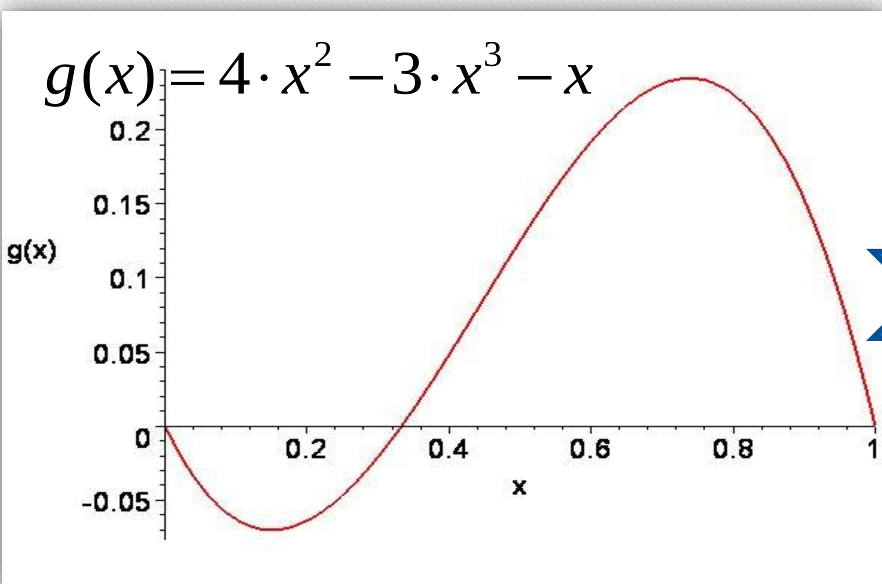
## (für das Hirschjagt-Spiel)

| | Hasen | Hirsch |
|---|---|---|
| Hasen | (2 , 2) | (4 , 0) |
| Hirsch | (0 , 4) | (5 , 5) |

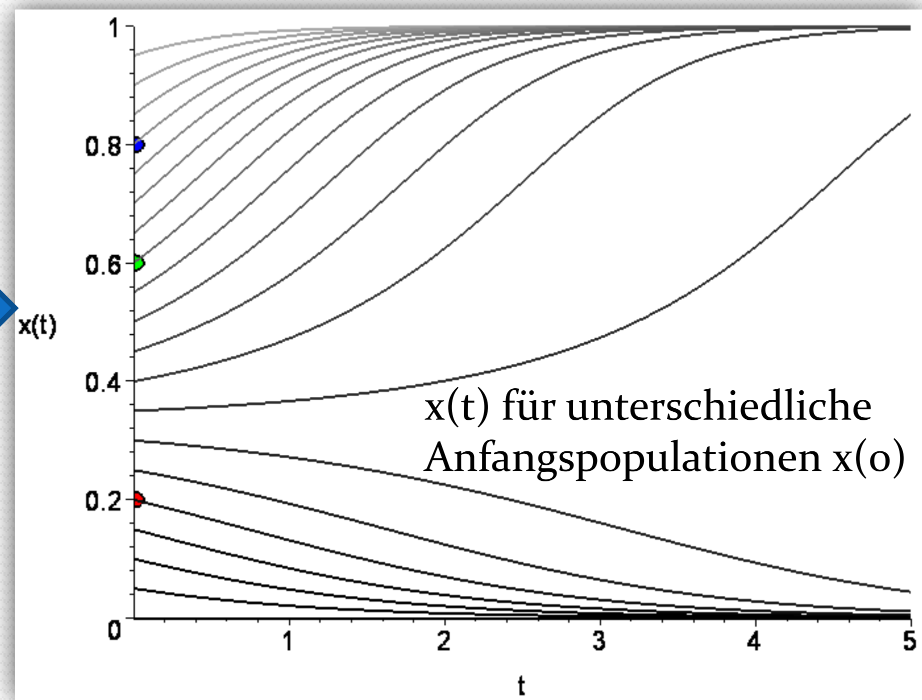
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Hirschjagt-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 4\cdot\left(x(t)\right)^2 - 3\cdot\left(x(t)\right)^3 - x(t) - = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t)\cdot\Big((2-0)\cdot(x(t)-x(t)^2) + (5-4)\cdot(2\cdot x(t) - 1 - x(t)^2)\Big)$$



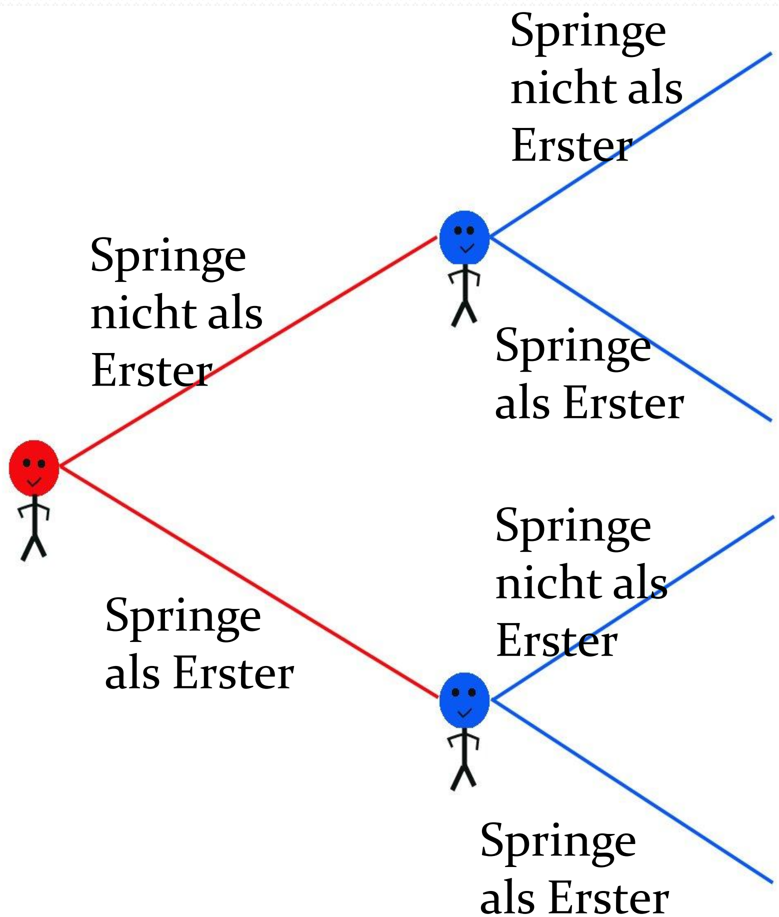

Beispiel: Hirschjagt-Spiel
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



# Inhaltsübersicht des vierten Teils der Vorlesung

# Das Angsthasen-Spiel

| | Springe nicht | Springe |
|---|---|---|
| Springe nicht | (-1 , -1) | (2 , 0) |
| Springe | (0 , 2) | (1 , 1) |




Basierend auf dem Film von Nicholas Ray „Denn sie wissen nicht was sie tun“ aus dem Jahre 1955 (Hauptdarsteller „James Dean“): Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto rausspringt. Der erzielte Nutzen kann zum Beispiel wie oben angegeben quantifiziert werden.

# Replikatordynamik

## (für das Angsthasen-Spiel)

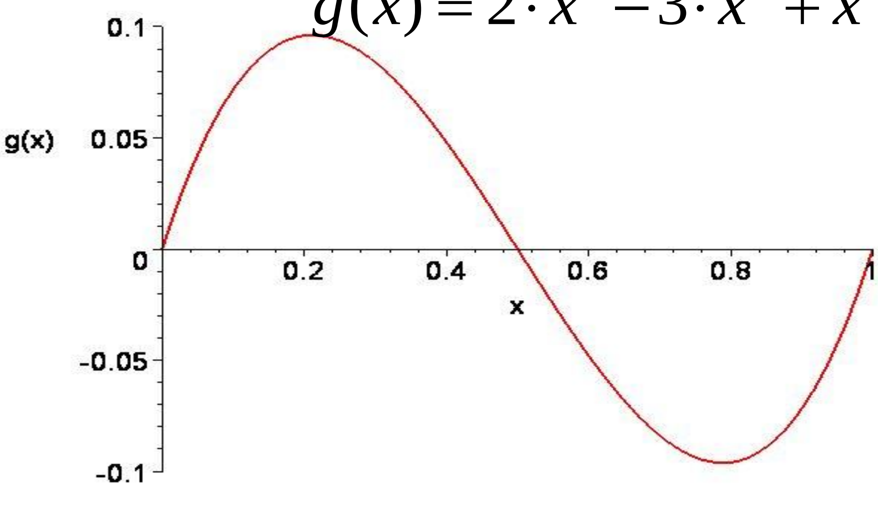
| | Springe nicht | Springe |
|---|---|---|
| Springe nicht | (-1 , -1) | (2 , 0) |
| Springe | (0 , 2) | (1 , 1) |

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Angsthasen-Spiel lautet:

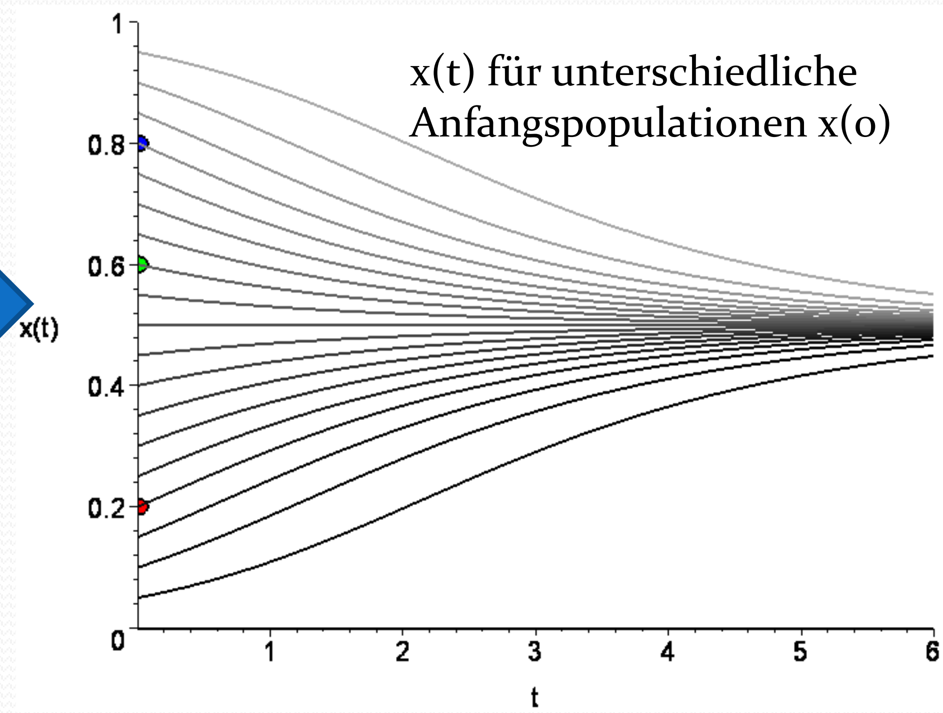
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot (x(t))^3 - 3 \cdot (x(t))^2 + x(t) = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((-1-0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (1-2) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2)\right)$$

$$g(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + x$$

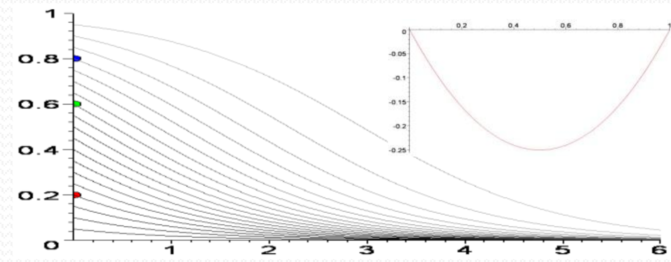



Beispiel: Angsthasen-Spiel
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt

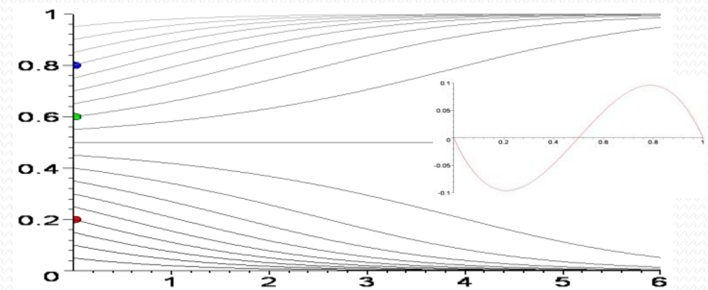


# Klassifizierung von evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spielen

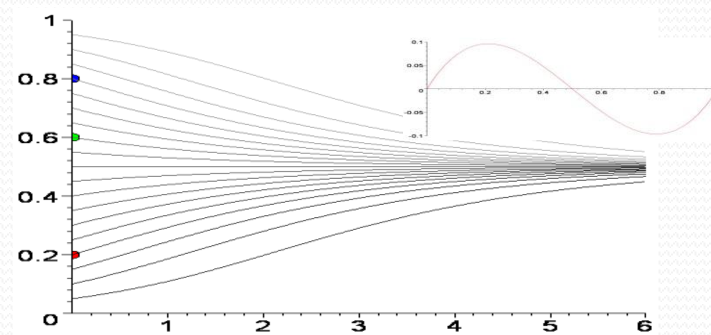
- **Dominante Spiele**
  (2. Strategie dominiert 1.Strategie)
  Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei x=0.



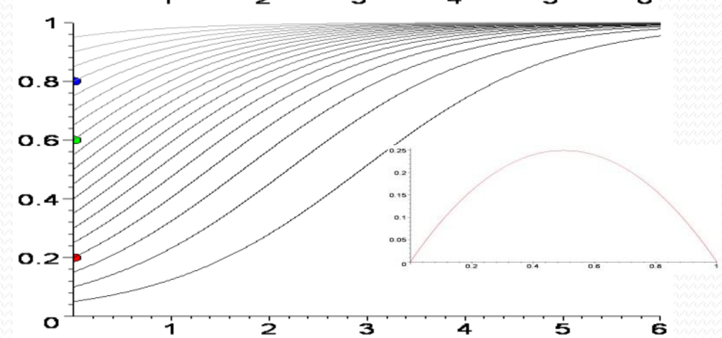
- **Koordinationsspiele**
  Es existieren drei Nash – Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.



- **Anti – Koordinationsspiele**
  Es existieren drei Nash – Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.



- **Dominante Spiele**
  (1. Strategie dominiert 2.Strategie)
  Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei x=1.

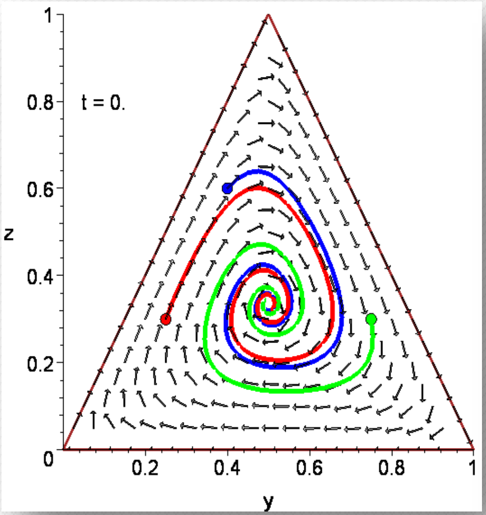


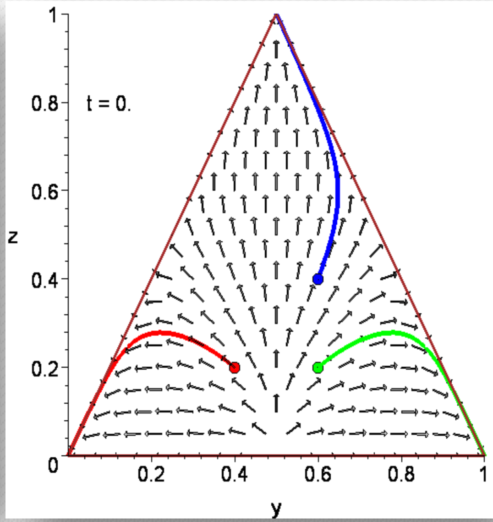
# Weitere Arten von Spieltypen

(Ausblick: Vorlesungsteil 5)

- **Mehr als zwei Strategien:**

Schon bei drei Strategien können 19 unterschiedliche Spielklassen unterschieden werden.

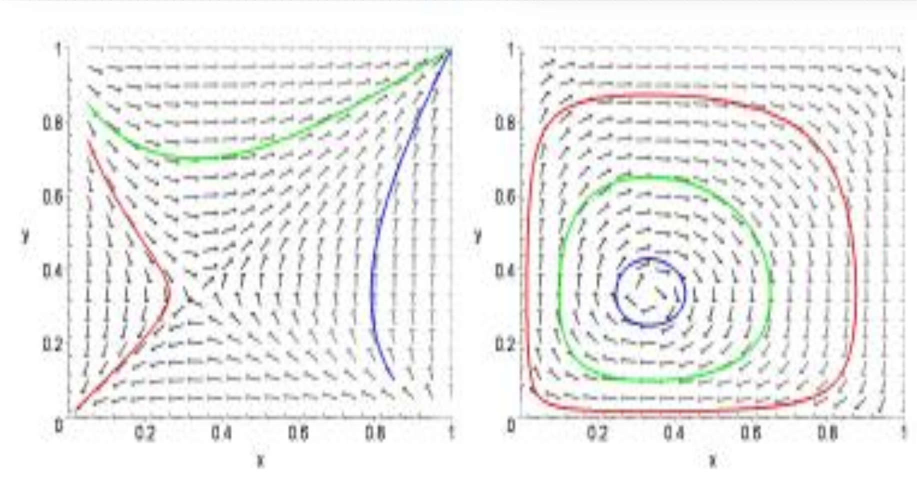



- **Bimatrix Spiele**

**Unsymmetrische (2x2) Spiele:**

Setzt sich die Population aus zwei unterschiedlichen Spielergruppen (x(t) und y(t)) zusammen, so spricht man von Bimatrix Spielen.



# Hausaufgabe

- Betrachten Sie die drei in der Vorlesung gespielten Beispiele:

**Beispiel 1:**

| | Kugel | Keine Kugel |
|---|---|---|
| Kugel | (0 , 0) | (2 , -1) |
| Keine Kugel | (-1 , 2) | (1 , 1) |

**Beispiel 2:**

| | Kugel | Keine Kugel |
|---|---|---|
| Kugel | (-1 , -1) | (3 , 0) |
| Keine Kugel | (0 , 3) | (1 , 1) |

**Beispiel 3:**

| | Kugel | Keine Kugel |
|---|---|---|
| Kugel | (0 , 0) | (2 , -2) |
| Keine Kugel | (-2 , 2) | (3 , 3) |

1. Geben Sie mögliche dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiele an.
2. Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion g(x) für alle drei Spiele?
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g(x) (g(x)=0).
4. Geben Sie die evolutionär stabilen Strategien der Spiele an?

# Literaturangaben


- *Schlee, Walter* **Einführung in die Spieltheorie**, Vieweg, 2004
- *Jörgen W. Weilbull* **Evolutionary Game Theory**, The MIT Press, 1995
- *J. Hofbauer, K. Sigmund* **Evolutionary Games and Population Dynamics**, *Cambridge* UP, 1998
- *Erwin Amann* **Evolutionäre Spieltheorie**, Physica-Verlag, 1999
- *H. Rommelfanger,* **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, …**