Neue Entwicklungen in der Evolutionären Spieltheorie
(Vorlesungsteil 2)

Vorlesung im Rahmen des
Deutsch-Französischen Dozenten-Austauschprogramms „*Minerve*“

Dr. Matthias Hanauske
Institut für Wirtschaftsinformatik
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt am Main

Lyon, 16.Oktober 2009

Inhaltsübersicht der gesamten Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
2. Grundlagen der evolutionären Spieltheorie
3. Neue Entwicklungen in der evolutionären Spieltheorie

Inhaltsübersicht des ersten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Vokabeln)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien

+ Hausaufgabe: „Wer ist John Forbes Nash Jr. ?“

Wer ist John Forbes Nash Jr. ?“

Wer ist John Forbes Nash Jr. ?“

John Forbes Nash Jr.

(aufgenommen während des 3. Weltkongresses der spieltheoretischen Gesellschaft, Sommer 2008, Chicago, USA)

Inhaltsübersicht des ersten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

Inhaltsübersicht des ersten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

Wiederholung:

$\aleph$: Menge der natürlichen Zahlen
{1, 2, 3, 4, ...}

$\Re$: Menge der reellen Zahlen
(alle Zahlen ohne die imaginären Zahlen)

$$\text{Strategienmenge des i-ten Spielers: } S^i = \{s_1^i, s_2^i, ..., s_M^i\}$$

$$\text{Beispiel: } (2 \times 2)\text{-Spiel}$$

$$\text{Strategienmenge des 1-ten Spielers: } S^1 = \{s_1^1, s_2^1\}$$

$$\text{Strategienmenge des 2-ten Spielers: } S^2 = \{s_1^2, s_2^2\}$$

Reine und gemischte Strategien

Als reine Strategien bezeichnet man die diskrete Menge an möglichen Strategie:

$$\text{Strategienmenge des i-ten Spielers:} \quad S^i = \{s_1^i, s_2^i, \ldots, s_M^i\}$$

Gemischte Strategien stellen die Strategie – Entscheidungswahrscheinlichkeit eines Spielers dar.

Das Konzept der gemischten Strategien erweitert die Menge der reinen Strategien, indem diese diskreten, natürlichen Strategien in einen reelwertigen Zahlenraum transformiert werden.

Gemischte Strategien in (2x2)-Spielen

Reine Strategien :

Strategienmenge des 1-ten Spielers : $S^1 = \{s_1^1, s_2^1\}$

Strategienmenge des 2-ten Spielers : $S^2 = \{s_1^2, s_2^2\}$

Gemischte Strategien :

Gemischte Strategienmenge des 1-ten Spielers :

$\tilde{S}^1 = \{x, 1-x\}$, wobei $x \in [0,1]$

Gemischte Strategienmenge des 2-ten Spielers :

$\tilde{S}^2 = \{y, 1-y\}$, wobei $y \in [0,1]$

Beispiel: Gefangenendilemma

- Im Gefangenendilemma gibt es die reinen Strategien „gestehen (Ge)“ oder „schweigen (Sc)“. Die Variable x beschreibt nun die Wahrscheinlichkeit des Spielers A die Strategie Ge zu spielen. Für x=1 spielt er auf jeden Fall die Strategie Ge, für x=0 entscheidet er sich sicher für die Strategie Sc und bei x=0.85 spielt er zu 85 Prozent die Strategie Ge. Das gleiche gilt für Spieler B und der Variablen y.

		y	1-y
		Ge	**Sc**
x	Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
1-x	Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)

Inhaltsübersicht des ersten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

Allgemeine Auszahlungstabelle (Auszahlungsmatrix)

	Spieler 2 wählt Strategie 1	**Spieler 2 wählt Strategie 2**
Spieler 1 wählt Strategie 1	$(\$^1_{11}, \$^2_{11})$	$(\$^1_{12}, \$^2_{12})$
Spieler 1 wählt Strategie 2	$(\$^1_{21}, \$^2_{21})$	$(\$^1_{22}, \$^2_{22})$

Beispiel Gefangenendilemma:

$$\$^1_{11} = -7,\ \$^1_{12} = -1,\ \$^1_{21} = -9,\ \$^1_{22} = -3$$

$$\$^2_{11} = -7,\ \$^2_{12} = -9,\ \$^2_{21} = -1,\ \$^2_{22} = -3$$

Die Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien

(2x2)-Spiele

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers: $\$^1 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \to \Re$

$$\$^1(x,y) = \$^1_{11} \cdot x \cdot y + \$^1_{12} \cdot x \cdot (1-y) + \$^1_{21} \cdot (1-x) \cdot y + \$^1_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

Auszahlungsfunktion des 2-ten Spielers: $\$^2 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \to \Re$

$$\$^2(x,y) = \$^2_{11} \cdot x \cdot y + \$^2_{12} \cdot x \cdot (1-y) + \$^2_{21} \cdot (1-x) \cdot y + \$^2_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

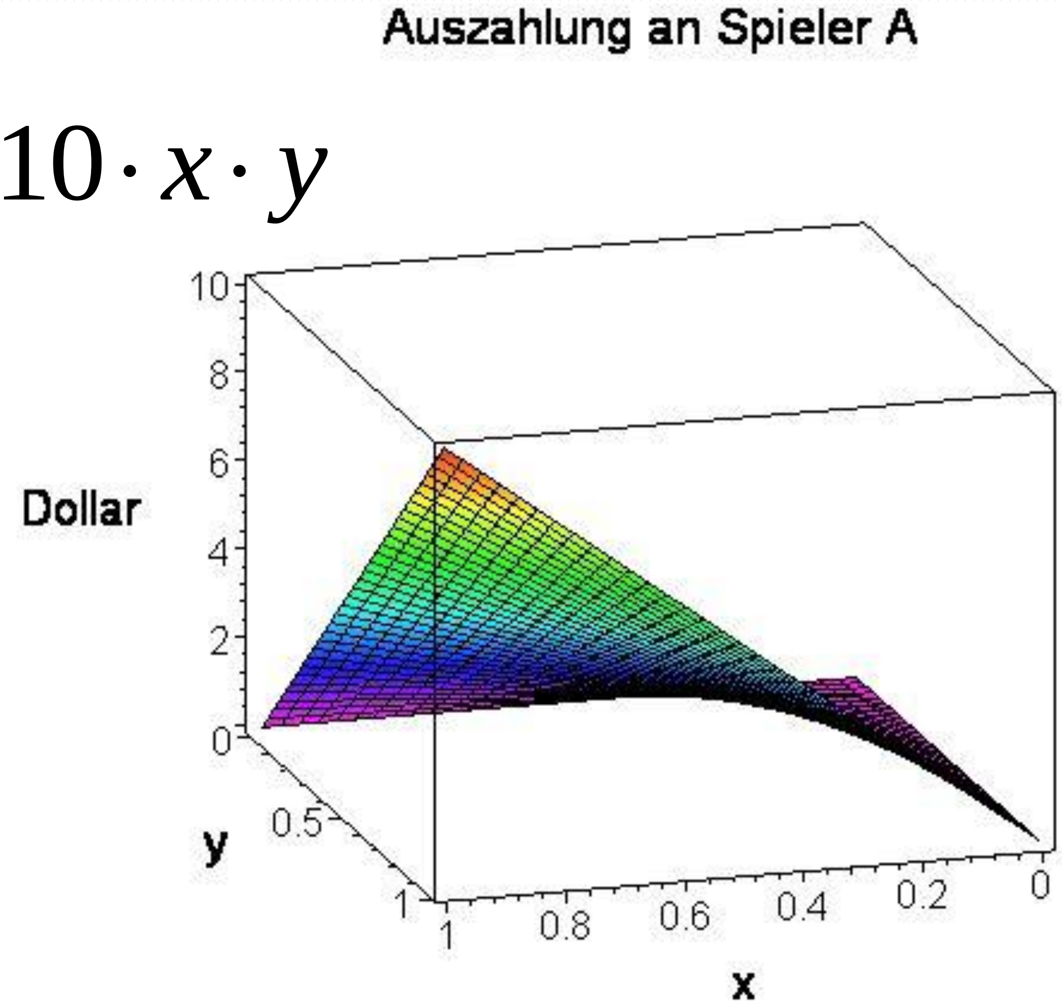
	y	1-y
x	(10 , 10)	(0 , 0)
1-x	(0 , 0)	(0 , 0)

$$\$^1(x,y) = 10 \cdot x \cdot y$$

$$\$^2(x,y) = 10 \cdot x \cdot y$$

Grafische Veranschaulichung der Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien

$$\$^1(x,y) = 10 \cdot x \cdot y$$



Zusätzliche mathematische Bezeichnungen

$\forall$ Allquantor,
man spricht ihn: „für alle“

$s = (s^1, \ldots, s^N)$ Eine Strategienkombination aller Spieler $s \in S^1 \times \ldots \times S^N$

$s = (s^i, s^{-i})$ Wobei s^i die Strategie des i-ten Spielers bezeichnet und s^{-i} die gewählten Strategien der übrigen Spieler beschreibt.

Inhaltsübersicht des ersten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

Das Nash - Gleichgewicht

Das von dem Mathematiker John Forbes Nash Jr. definierte strategische Gleichgewicht beschreibt einen Spielzustand, von dem ausgehend kein einzelner Spieler für sich einen Vorteil erzielen kann, indem er einseitig von seiner Strategie abweicht.

Mathematische Definition (W.Schlee):
Eine Strategienkombination $s^* = (s^{1*}, \ldots, s^{N*})$ heißt Nash–Gleichgewicht, wenn gilt

$$\$^i(s^{i*}, s^{-i*}) \geq \$^i(s^i, s^{-i*}) \ \forall \ i \in A, \ s^i \in S^i$$

Wobei ***A*** die Menge der Spieler, S^i die Strategienmenge des i-ten Spielers und s^{-i*} die gewählten Strategien der übrigen Spieler im Nash-Gleichgewicht beschreibt.

Beispiel: ***Gefangenendilemma***

	$s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Ge$	$s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Sc$
$s_1^1 \mathrel{\hat{=}} Ge$	(-7 , -7)	(-1 , -9)
$s_2^1 \mathrel{\hat{=}} Sc$	(-9 , -1)	(-3 , -3)

$$\$^1(Ge, Ge) = -7 \geq -9 = \$^1(Sc, Ge)$$

$$\$^2(Ge, Ge) = -7 \geq -9 = \$^2(Ge, Sc)$$

$$\Rightarrow (Ge, Ge) \text{ ist Nash - Gleichgewicht}$$

Die Dominante Strategie

	$s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Ge$	$s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Sc$
$s_1^1 \mathrel{\hat{=}} Ge$	(-7 , -7)	(-1 , -9)
$s_2^1 \mathrel{\hat{=}} Sc$	(-9 , -1)	(-3 , -3)

Mathematische Definition (W.Schlee):
Eine Strategienkombination $s^* = (s^{1*}, \ldots, s^{N*})$ bei der jedes s^{i*}, (i=1,..,N) die Eigenschaft

$$\$^i(s^{i*}, s^{-i}) \geq \$^i(s^i, s^{-i}) \;\; \forall \; i \in A, \; \forall (s^i, s^{-i}) \in S^1 \times \ldots \times S^N$$

hat, nennt man „Gleichgewicht in dominanten Strategien".

Wobei ***A*** die Menge der Spieler, S^i die Strategienmenge des i-ten Spielers und s^{-i} die gewählten Strategien der übrigen Spieler beschreibt.

Beispiel: Gefangenendilemma

$$\$^1(Ge, Sc) = -1 \geq -3 = \$^1(Sc, Sc) \text{ und } \$^1(Ge, Ge) = -7 \geq -9 = \$^1(Sc, Ge)$$

$$\$^2(Sc, Ge) = -1 \geq -3 = \$^2(Sc, Sc) \text{ und } \$^2(Ge, Ge) = -7 \geq -9 = \$^2(Ge, Sc)$$

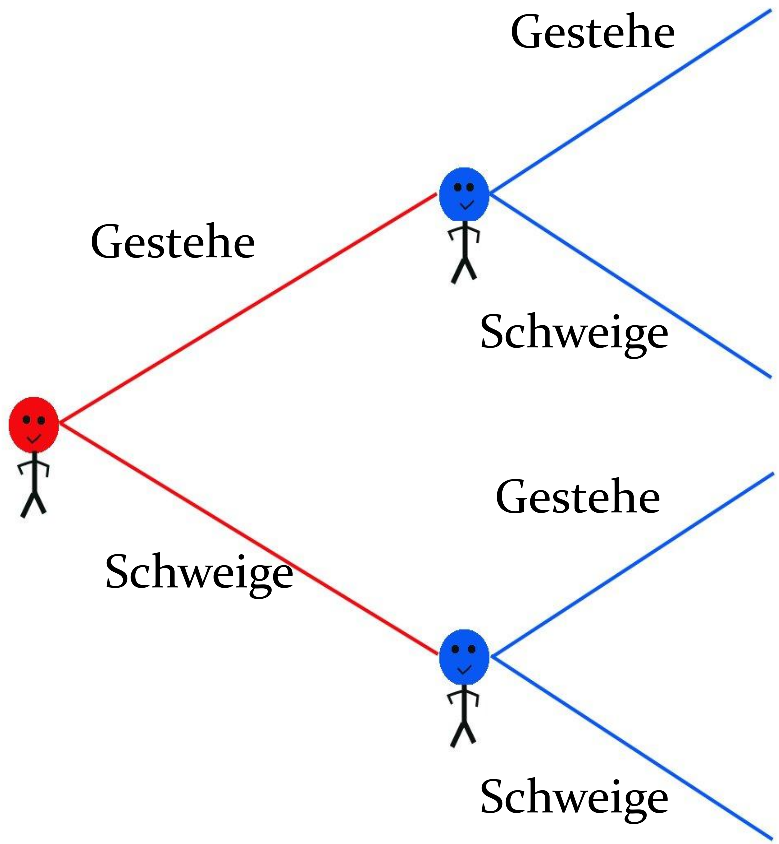
$$\Rightarrow (Ge, Ge) \text{ ist die dominante Strategie des Spiels}$$

Inhaltsübersicht des ersten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

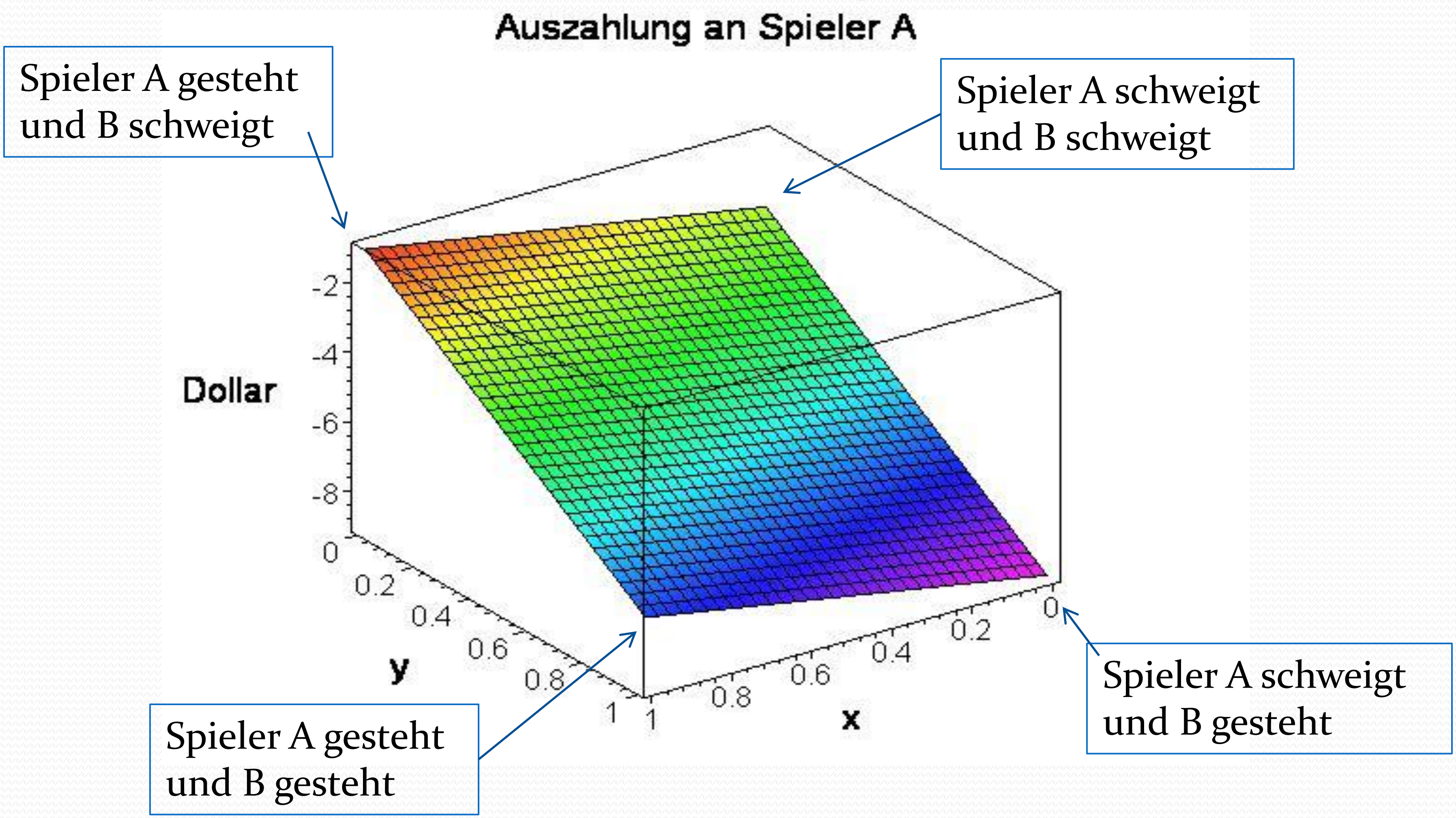
Das Gefangenendilemma

	Ge	Sc
Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)

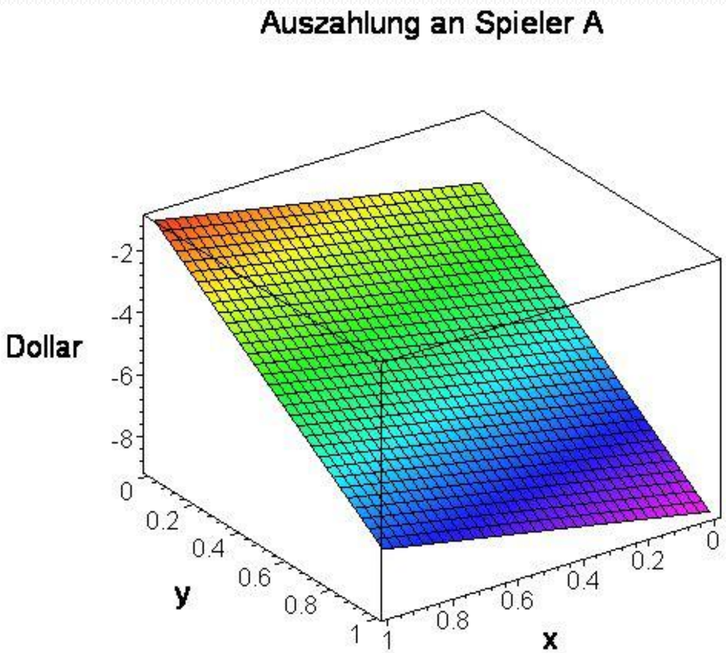


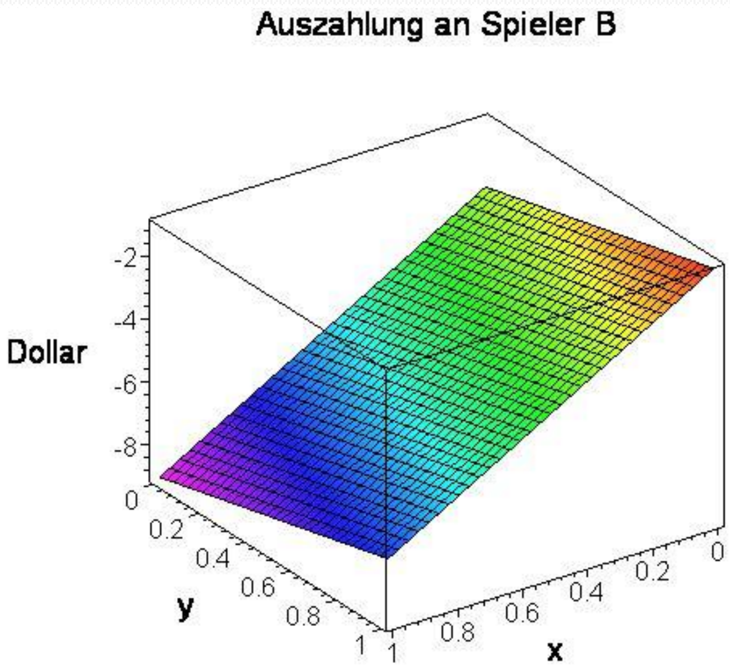
Bonnie und Clyde werden nach einem missglückten Banküberfall geschnappt und in verschiedenen Zellen untergebracht. Wenn beide schweigen kann der Staatsanwalt sie nur wegen verbotenen Waffenbesitzes für drei Jahre hinter Gitter bringen. Verrät jedoch einer den anderen, dann bekommt der Geständige als Zeuge der Anklage nur für ein Jahr hinter Gitter – der Nichtgeständige muss dann aber für neun Jahre ins Gefängnis. Gestehen beide, so müssen sie sieben Jahre absitzen.

Auszahlungsfunktion des Spielers A in gemischten Strategien



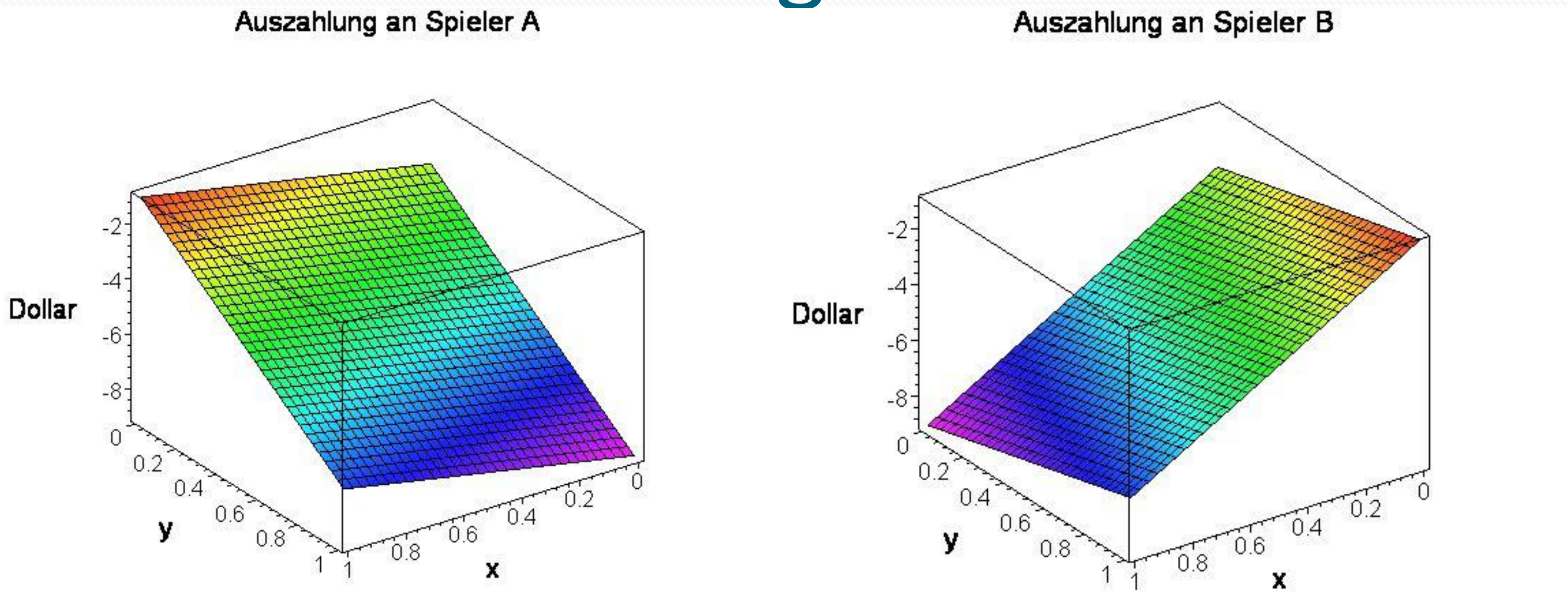
Auszahlungsfunktionen der Spieler A und B in gemischten Strategien





x ist die gemischte Strategie des Spielers A
y ist die gemischte Strategie des Spielers B
x=0 (y=0) entspricht der reinen Strategie „schweigen“
x=1 (y=1) entspricht der reinen Strategie „gestehen“

Nash-Gleichgewichte und Dominante Strategien



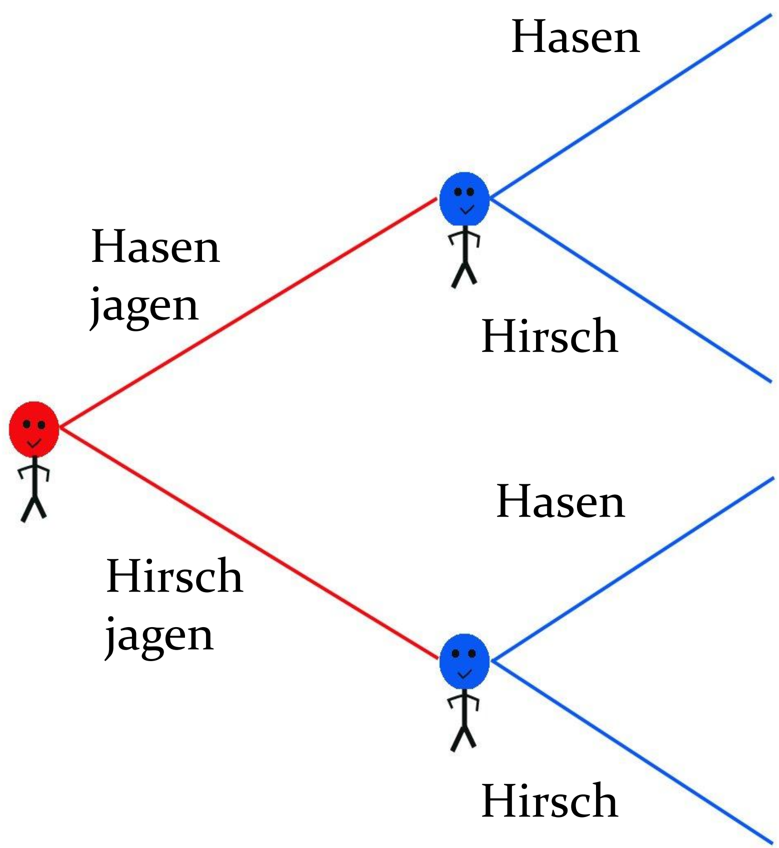
Die reine Strategienkombination (x=1,y=1) ist das einzige Nash-Gleichgewicht und die dominante Strategie des Gefangenendilemmas.
Überprüfung für Spieler A: Halte den y-Wert fest und bewege dich entlang der x-Achse zu dem höchsten Punkt, dieser ist dann das Nash-Gleichgewicht. Eine dominante Strategie entsteht, falls man für alle y-Werte den selben x-Wert herausbekommt. Spieler B genauso, aber halte x-fest und ändere y.

Inhaltsübersicht des ersten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

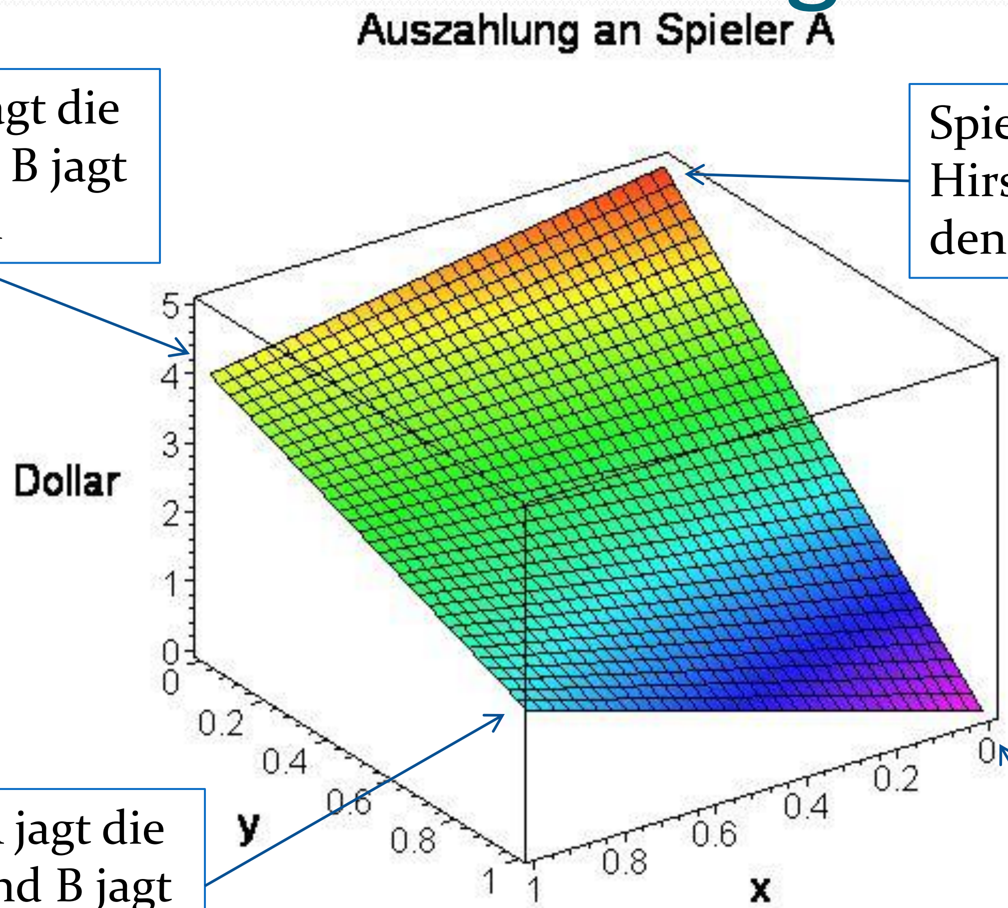
Rousseaus Hirschjagt - Spiel

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2 , 2)	(4 , 0)
Hirsch	(0 , 4)	(5 , 5)



Zwei Jägern ist es im Laufe der Jagt gelungen einen Hirsch und vier Hasen einzukreisen. Die Jäger stehen nun vor der Entscheidung die Hasen entkommen zu lassen und gemeinsam den Hirsch zu erlegen oder sofort das Feuer auf die Hasen zu eröffnen. Entscheiden sich beide dafür den Hirsch zu erlegen, dann hat der Hirsch keine Chance. Einen Hirsch kann man für 10 Goldmünzen verkaufen. Entscheiden sich beide für die Hasenjagt, dann erschießt jeder Jäger zwei Hasen, für die man jeweils eine Goldmünze bekommt. Entscheidet sich jedoch nur einer für die Hirschjagt, so kann der Hirsch entkommen und derjenige der sich für die Hasenjagt entschieden hat kann alle vier Hasen erlegen.

Auszahlungsfunktion des Spielers A in gemischten Strategien



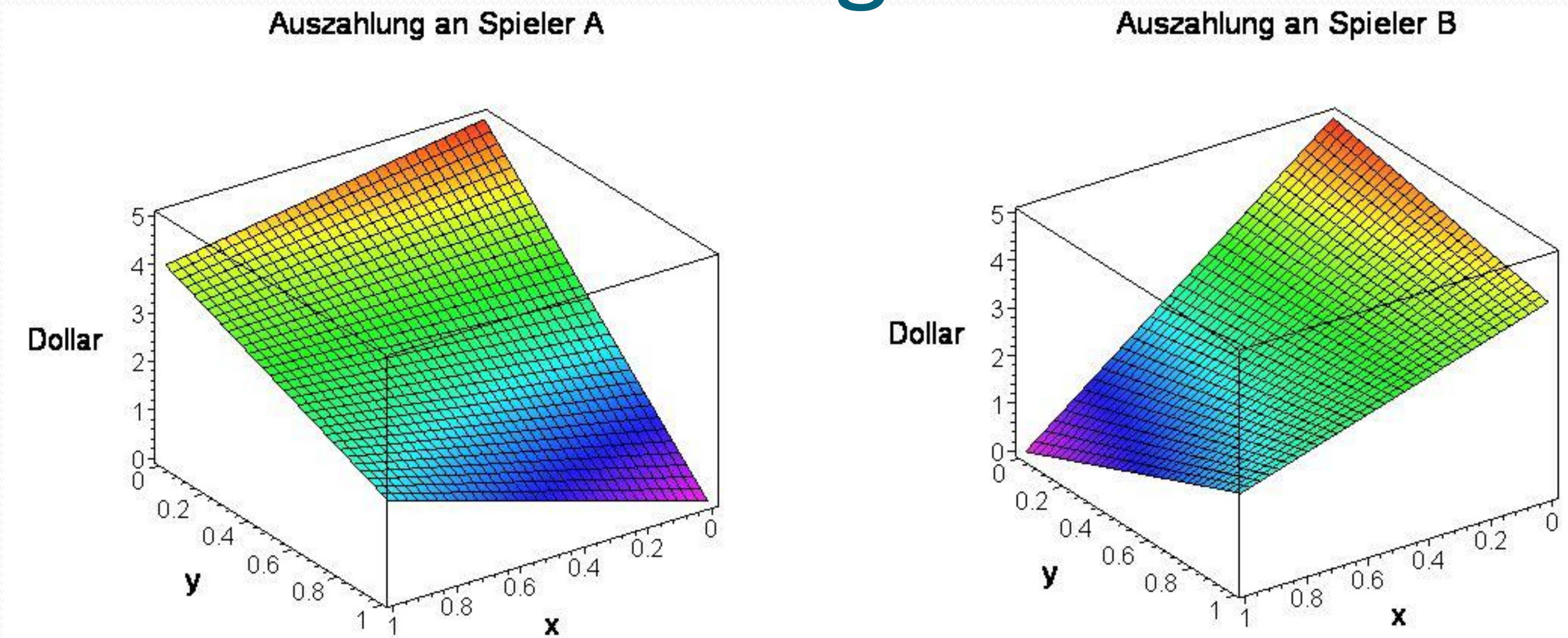
Spieler A jagt die Hasen und B jagt den Hirsch

Spieler A jagt den Hirsch und B jagt den Hirsch auch

Spieler A jagt die Hasen und B jagt auch die Hasen

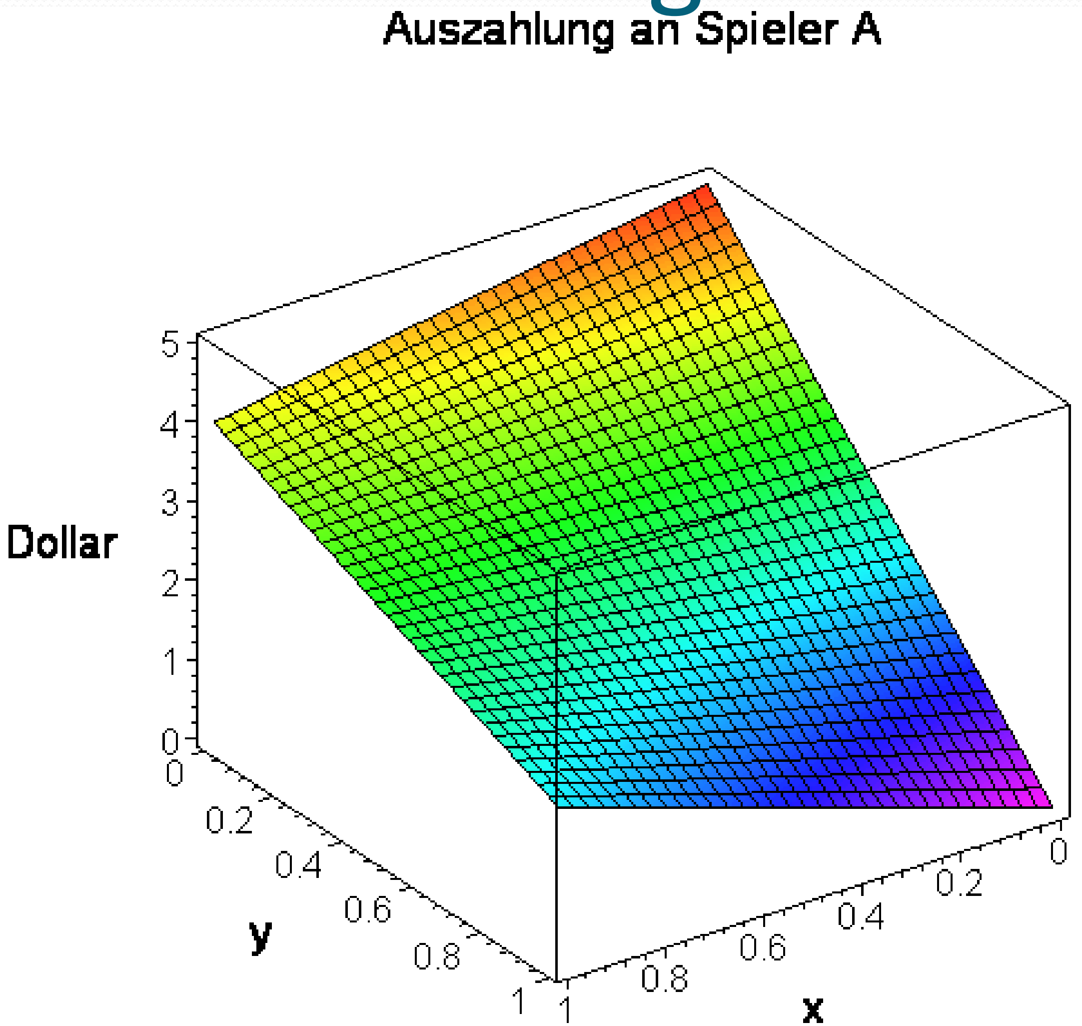
Spieler A jagt die Hasen und B jagt den Hirsch

Nash-Gleichgewichte und Dominante Strategien

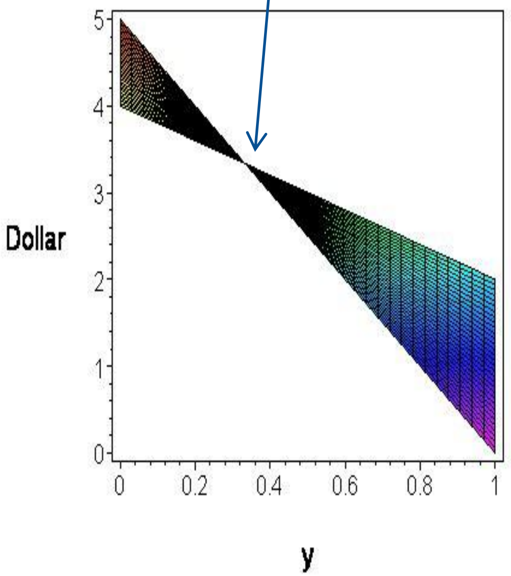


Es gibt keine dominante Strategie aber es existieren zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien ((x=0,y=0) und (x=1,y=1)) und ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien. Der y-Wert des gemischten Nash-Gleichgewicht lässt sich finden, indem man die Linie auf der Auszahlungsfläche des Spielers A ermittelt, die bei festgehaltenem y-Wert weder rauf noch runter geht, wenn man x variiert. (x-Wert durch Ausz. B)

Veranschaulichung des gemischten Nash-Gleichgewichts



Gemischtes Nash-Gleichgewicht

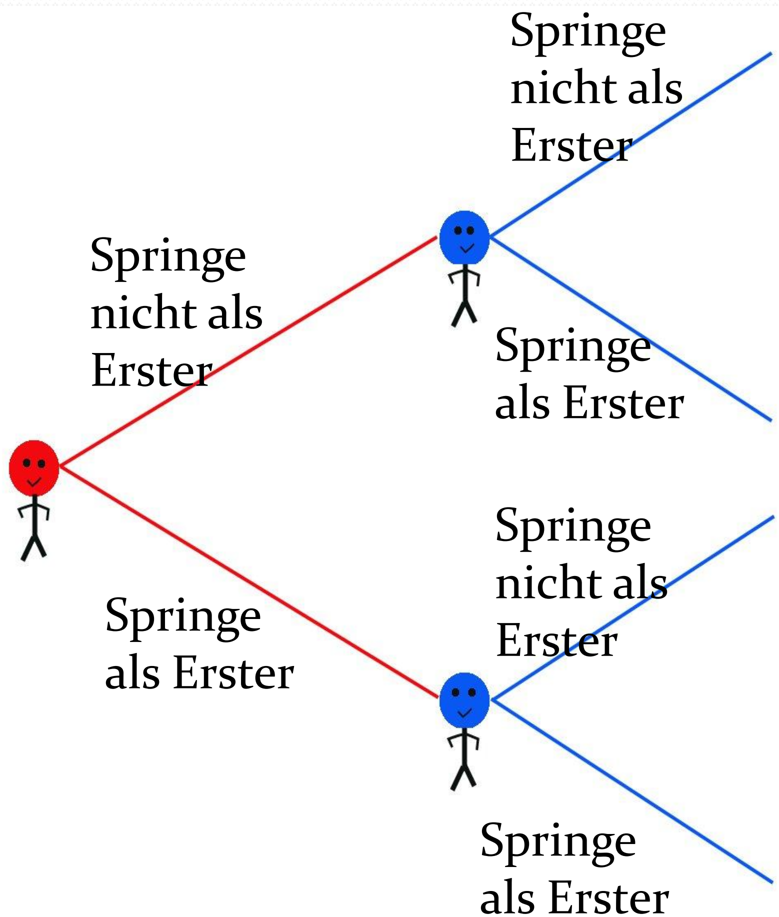


Inhaltsübersicht des ersten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

Das Angsthasen-Spiel

	Springe nicht	Springe
Springe nicht	(-1 , -1)	(2 , 0)
Springe	(0 , 2)	(1 , 1)

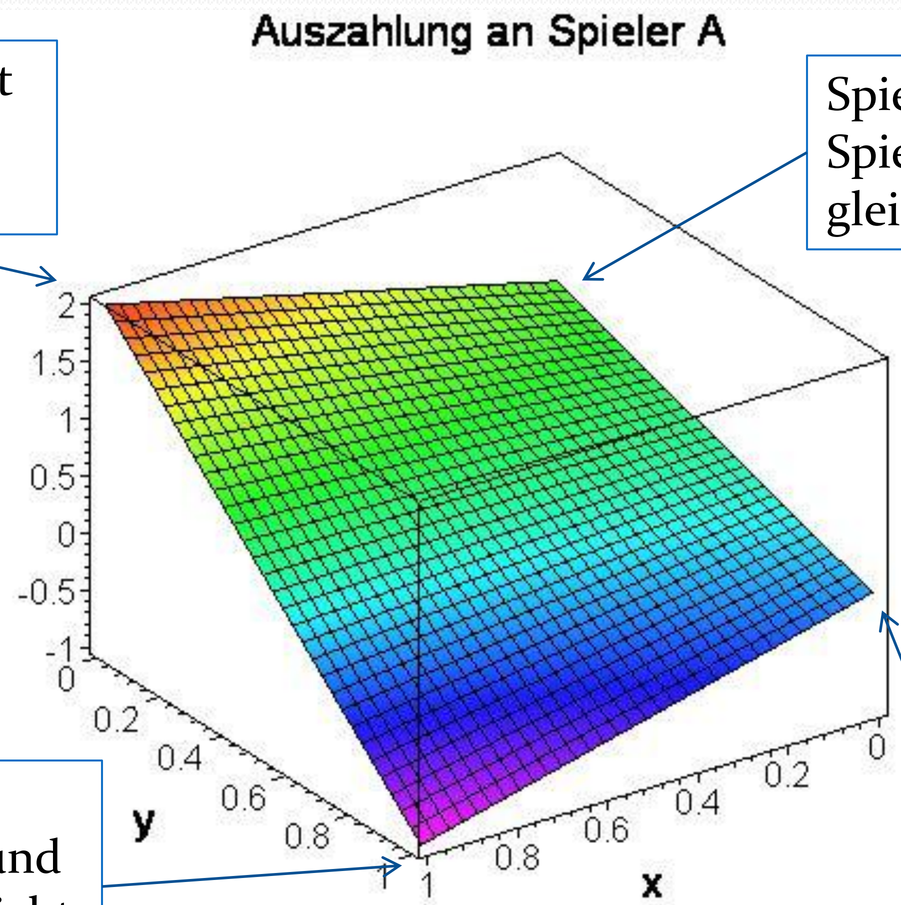


Basierend auf dem Film von Nicholas Ray „Denn sie wissen nicht was sie tun“ aus dem Jahre 1955 (Hauptdarsteller „James Dean“): Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto rausspringt. Der erzielte Nutzen kann zum Beispiel wie oben angegeben quantifiziert werden.

Auszahlungsfunktion des Spielers A in gemischten Strategien

Spieler A springt nicht als erster und B springt

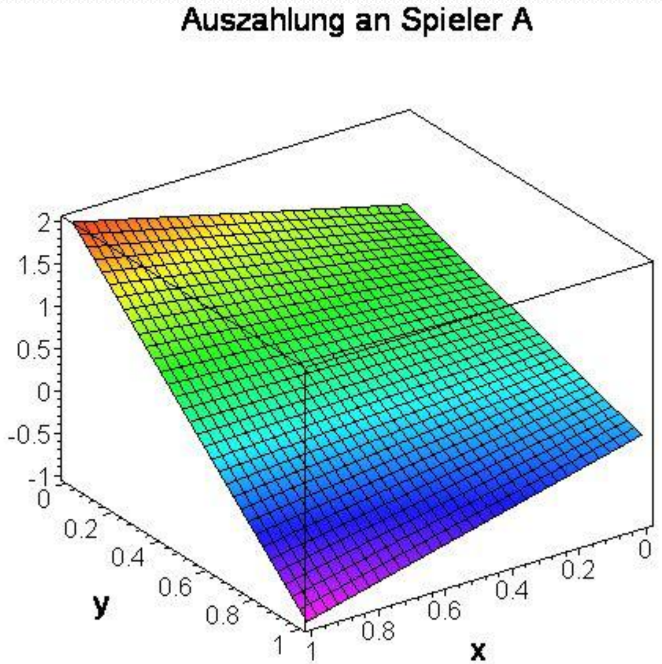
Spieler A und Spieler B springen gleichzeitig

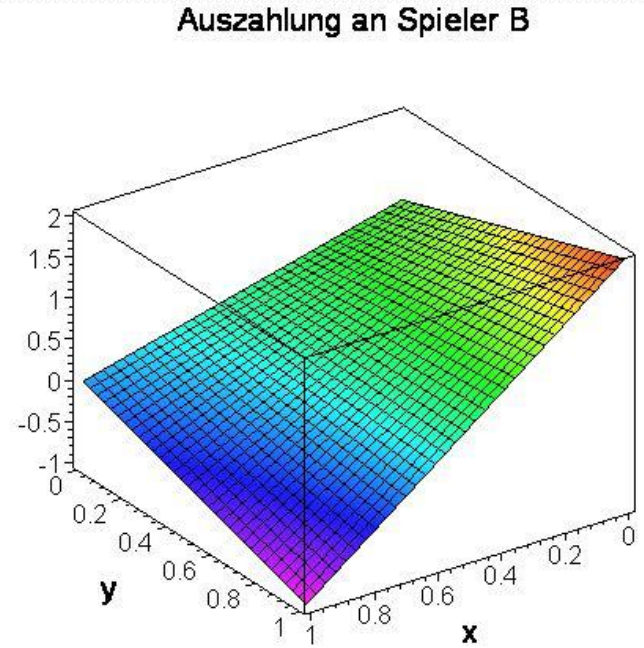


Spieler A springt nicht als erster und B springt auch nicht als erster.

Spieler A springt und B springt nicht als erster

Nash-Gleichgewichte und Dominante Strategien





Es gibt keine dominante Strategie aber es existieren zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien ((x=1,y=0) und (x=0,y=1)) und ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien. Der y-Wert des gemischten Nash-Gleichgewicht lässt sich finden, indem man die Linie auf der Auszahlungsfläche des Spielers A ermittelt, die bei festgehaltenem y-Wert weder rauf noch runter geht, wenn man x variiert. (x-Wert durch Ausz. B)

Inhaltsübersicht des ersten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
      i. Dominante Spiele
      ii. Koordinationsspiele
      iii. Anti-Koordinationsspiele

Literaturangaben

(Bitte zunächst nicht lesen -> viel zu mathematisch!)

- *Schlee, Walter* **Einführung in die Spieltheorie**, Vieweg, 2004
- *Jörgen W. Weilbull* **Evolutionary Game Theory**, The MIT Press, 1995
- *J. Hofbauer, K. Sigmund* **Evolutionary Games and Population Dynamics**, *Cambridge* UP, 1998
- *Erwin Amann* **Evolutionäre Spieltheorie**, Physica-Verlag, 1999
- *H. Rommelfanger,* **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, …**

Hausaufgabe

- Betrachten Sie das Folgende (2x2)-Spiel:

	Strategie 1	Strategie 2
Strategie 1	(-7 , -7)	(4 , 1)
Strategie 2	(1 , 4)	(2 , 2)

1. Um welche Spielklasse handelt es sich hierbei?
2. Gibt es eine dominante Strategie?
3. Geben Sie die Nash-Gleichgewichte des Spiels an?