

Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

*JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
22.01.2020*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

9. Vorlesung

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die freiwilligen Übungstermine in diesem Semester nur Online statt.

Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung: Ausbreitung eines Virus auf einem komplexen Netzwerk
- Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken
 - Spiele auf einem räumlichen Netzwerk (Spatial Games)
 - Spiele auf vollständig verbundenen Netzwerken
 - Spiele auf zufälligen, „kleine Welt“ und skalenfreien Netzwerken
- Vorlesungsprojekte

Allgemein: Ausbreitungsphänomene auf komplexen Netzwerken

Phenomena	Agent	Network
Venereal Disease	Pathogens	Sexual Network
Rumor Spreading	Information, Memes	Communication Network
Diffusion of Innovations	Ideas, Knowledge	Communication Network
Computer Viruses	Malwares, Digital viruses	Internet
Mobile Phone Virus	Mobile Viruses	Social Network/Proximity Network
Bedbugs	Parasitic Insects	Hotel - Traveler Network
Malaria	Plasmodium	Mosquito - Human network

Table 10.1

Networks and Agents

The spread of a pathogen, a meme or a computer virus is determined by the network on which the agent spreads and the transmission mechanism of the responsible agent. The table lists several much studied spreading phenomena, together with the nature of the particular spreading agent and the network on which the agent spreads.

Wuhan
China

Research on Complex Systems, Brockmann Lab

<http://rocs.hu-berlin.de>



Populationsmodelle der epidemischen Ausbreitung

- Population-based models
 - Deterministic or stochastic
 - Continuous time
 - Ordinary differential equation
 - Partial differential equations
 - Delay differential equations
 - Integro-differential equations
 - Discrete time
 - Difference equations
- Agent-based/individual-based models
 - Usually stochastic



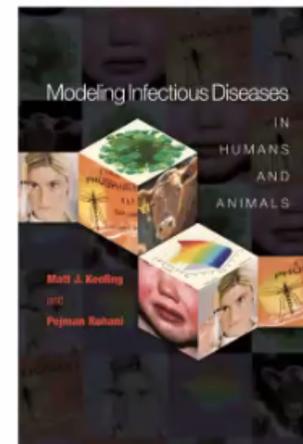
Spreading dynamics on networks: from social interactions to epidemics and pandemics

Fakhteh Ghanbarnejad
Sharif University of Technology, Tehran
<http://www.pks.mpg.de/~fakhteh>

18 March
DPG 2020, Online!



Fakhte

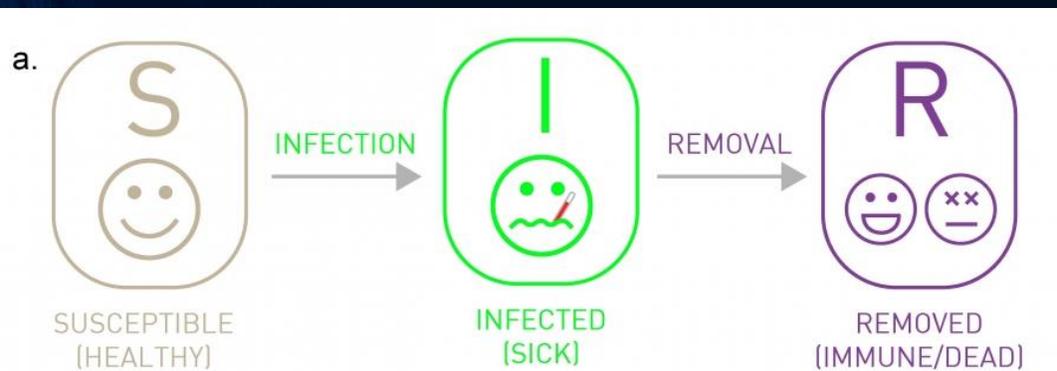


<http://www.modelinginfectiousdiseases.org/>

Deterministische Modelle der epidemischen Ausbreitung

Online-Buch 'Network Science' von Albert-Laszlo Barabasi, Chapter 10: Spreading phenomena

Die deterministischen Populationsmodelle der Epidemiologie basieren auf gewissen vereinfachten Grundannahmen.



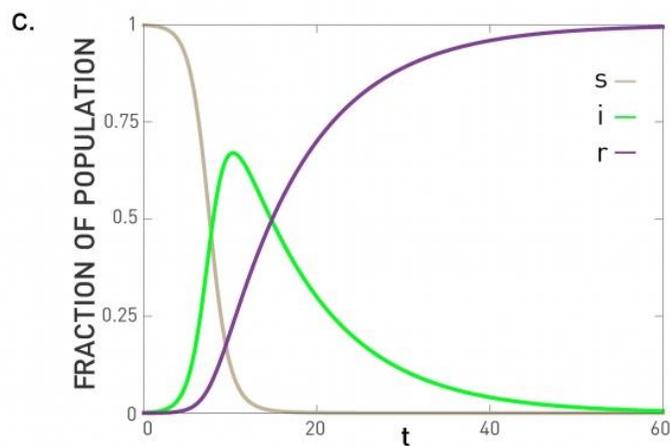
b.

$$\frac{ds}{dt} = -\beta \langle k \rangle i [1 - r - i]$$

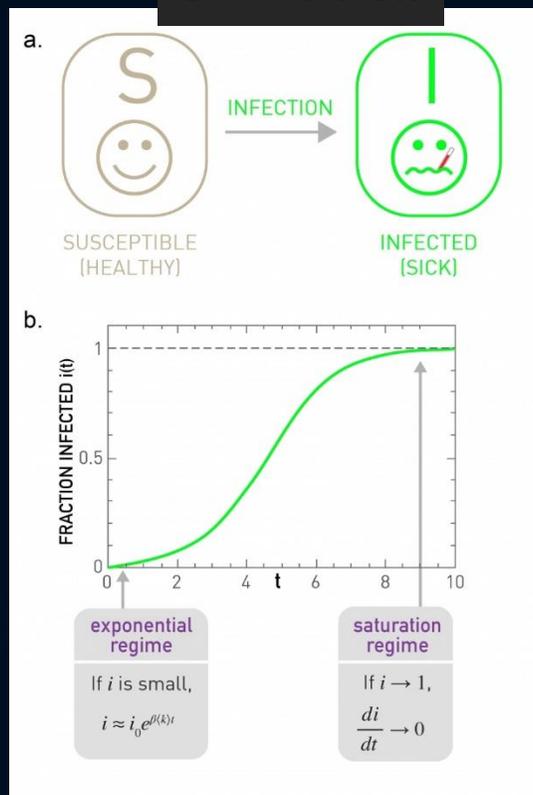
$$\frac{di}{dt} = -\mu i + \beta \langle k \rangle i [1 - r - i]$$

$$\frac{dr}{dt} = \mu i$$

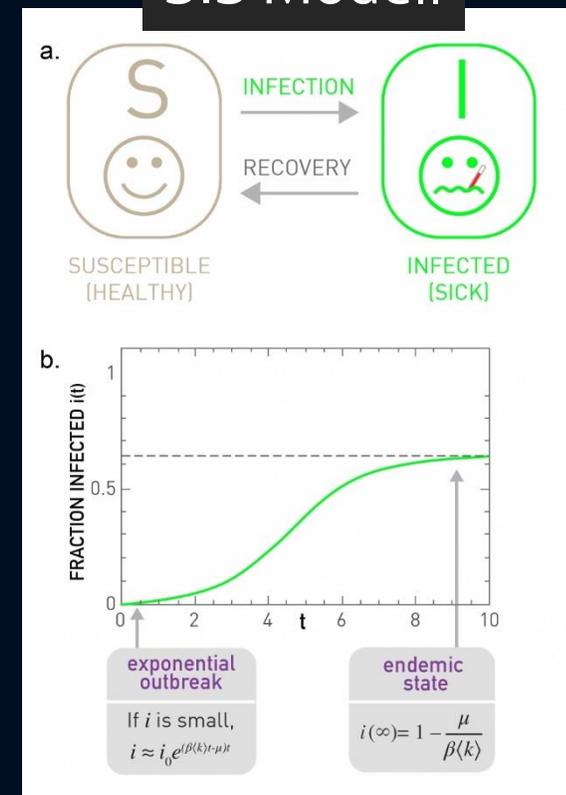
SIR Modell



SI Modell

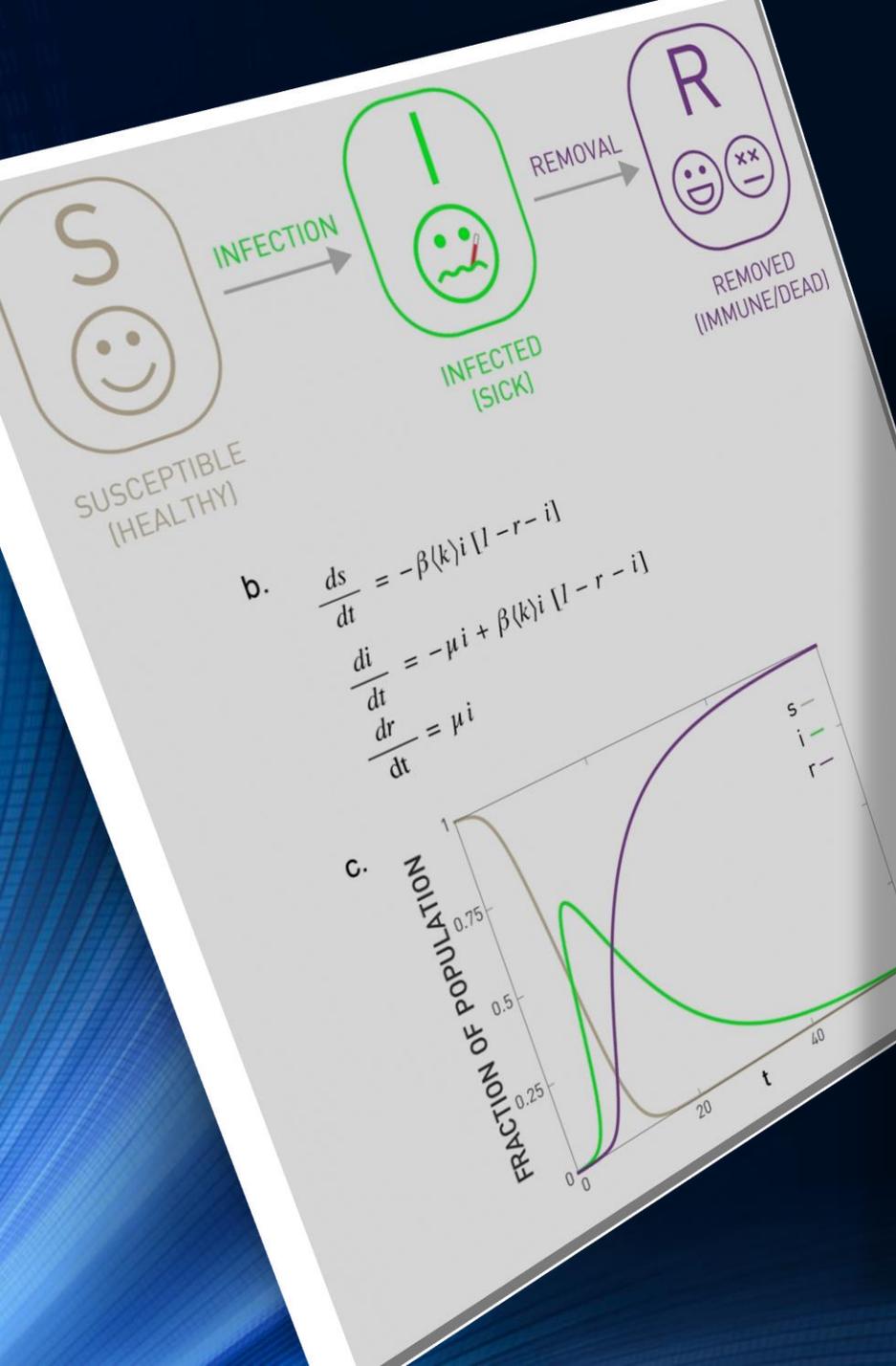


SIS Modell



Susceptible (S: Gesunde Personen, die mit dem Virus noch keinen Kontakt hatten)
 Infected (I: Infizierte Personen, die mit dem Virus Kontakt hatten und andere anstecken können),
 Recovered (Personen, die infiziert waren aber nicht mehr infektiös sind und sich von der Krankheit erholt haben),
 Removed (R: Recovered + gestorbene Personen)

Das deterministische SIR Modell



$$\frac{ds(t)}{dt} = - \underbrace{\beta \langle k \rangle i(t) \cdot s(t)}_{\text{pro } \Delta t \text{ neu Infizierte}}$$

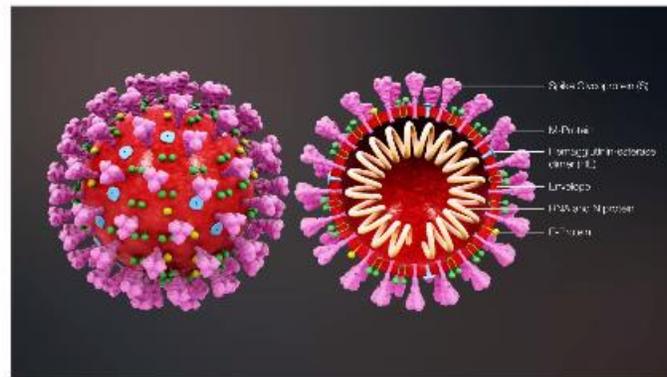
$$\frac{di(t)}{dt} = - \underbrace{\mu i(t)}_{\text{pro } \Delta t \text{ Gen. und Gest.}} + \underbrace{\beta \langle k \rangle i(t) \cdot s(t)}_{\text{pro } \Delta t \text{ neu Infizierte}}$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \underbrace{\mu i(t)}_{\text{pro } \Delta t \text{ Genesene und Gestorbene}},$$

wobei $s(t) = \frac{S(t)}{N}$ der Anteil der noch nicht erkrankten Personen, $i(t) = \frac{I(t)}{N}$ der Anteil der infizierten Personen und $r(t) = \frac{R(t)}{N}$ der Anteil der genesenen und gestorbenen Personen darstellt.

Covid-19 modeling: from theory to reality - a discussion -

Claud



Claudius Gros, Roser Valenti

Daniel Gros[†],

Lukas Schneider, Benedikt Gutsche, Dimitrije Markovic[‡]

Theoretical Physics, Goethe University Frankfurt

[†]CEPS, Bruxelles, [‡] TU Dresden

PERISCOPE
P. Giudici

1

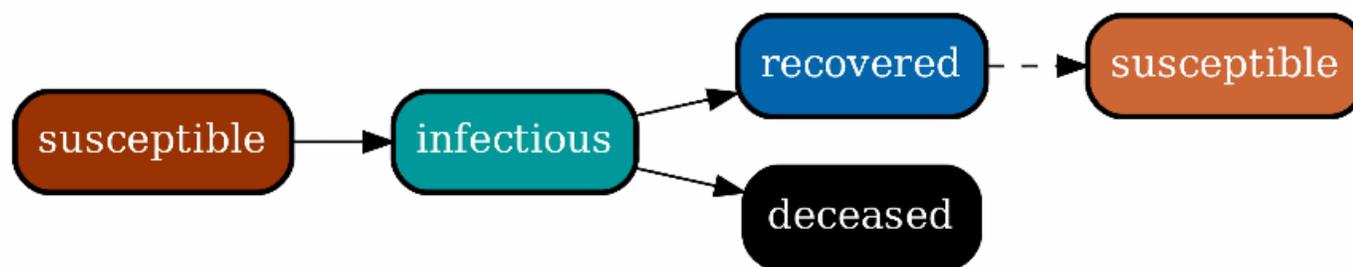


the logic of an infectious disease _____

life-long immunity (SIR)



limited immunity (SIRS)



classical SIR model

S : susceptible

I : infected (infectious)

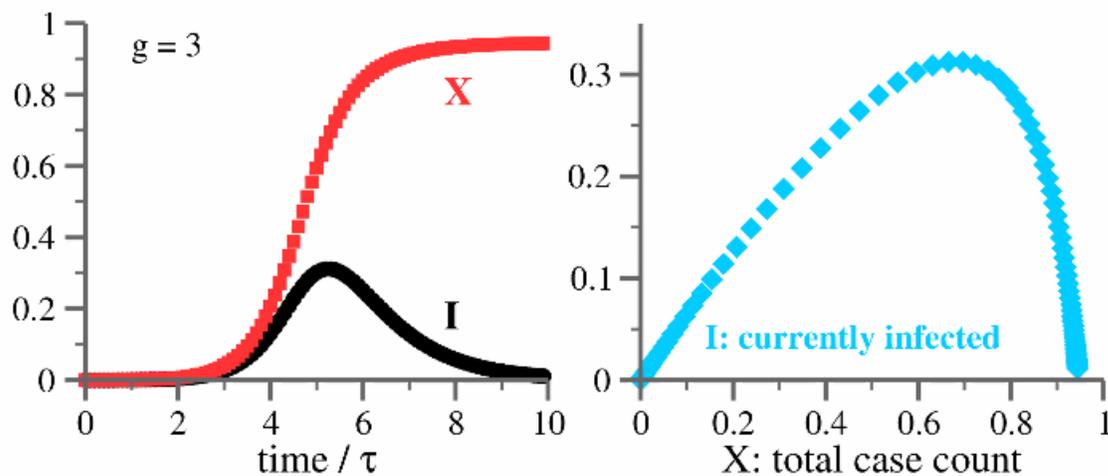
R : recovered (immune)

total case count : $X = 1 - S$

time scale : τ

reproduction rate : g

$$\tau \dot{S} = -gSI, \quad \tau \dot{I} = (gS - 1)I, \quad \tau \dot{R} = I$$



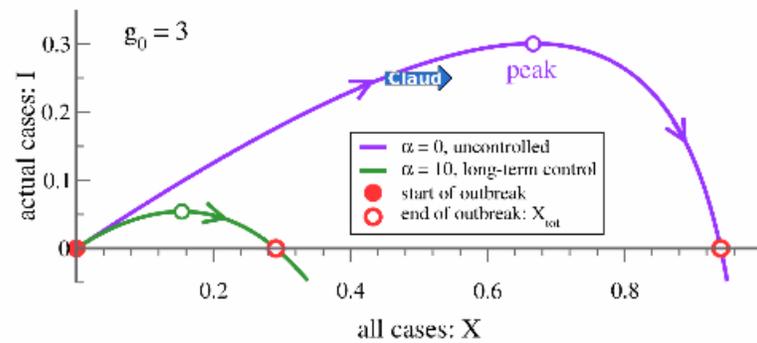
Claudius Gros

controlled SIR model

$$g = \frac{g_0}{1 + \alpha_X X + \alpha_I I} \quad \begin{cases} \alpha_X : \text{long-term control} \\ \alpha_I : \text{short-term control} \end{cases}$$

reproduction factor is reduced by

- spontaneous social distancing
- gov. lockdown / containment policies



6

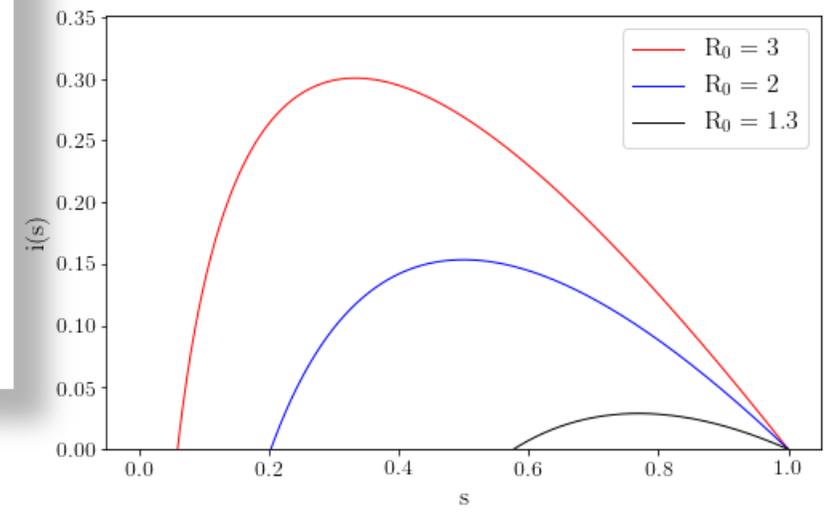
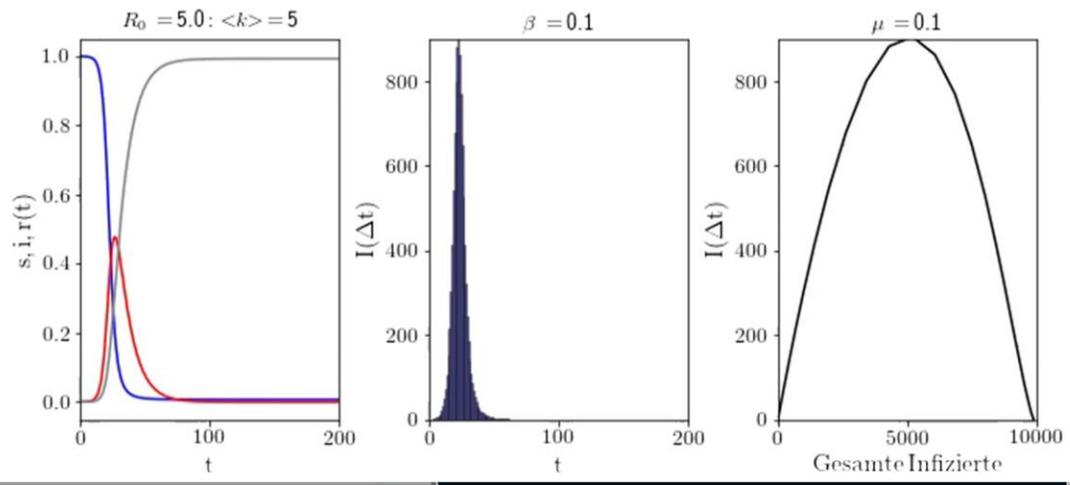


Physik der sozio-ökonomischen Systeme
 Physics of Socio-Economic Systems

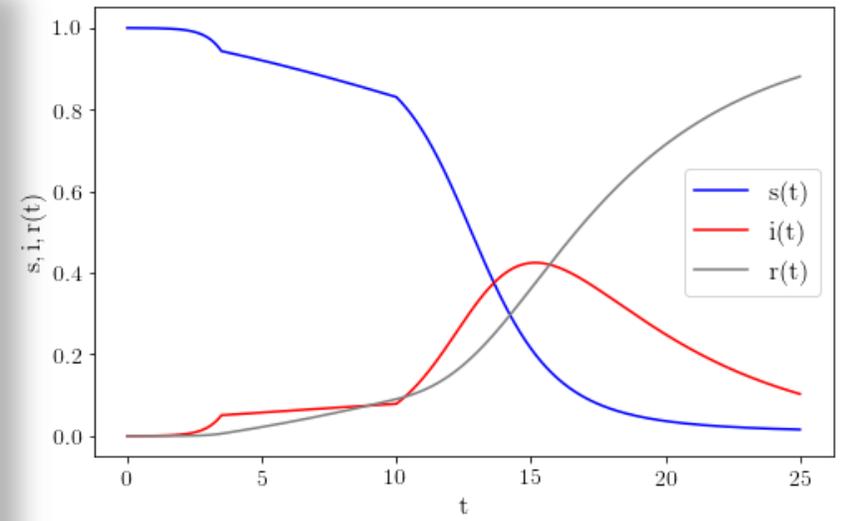
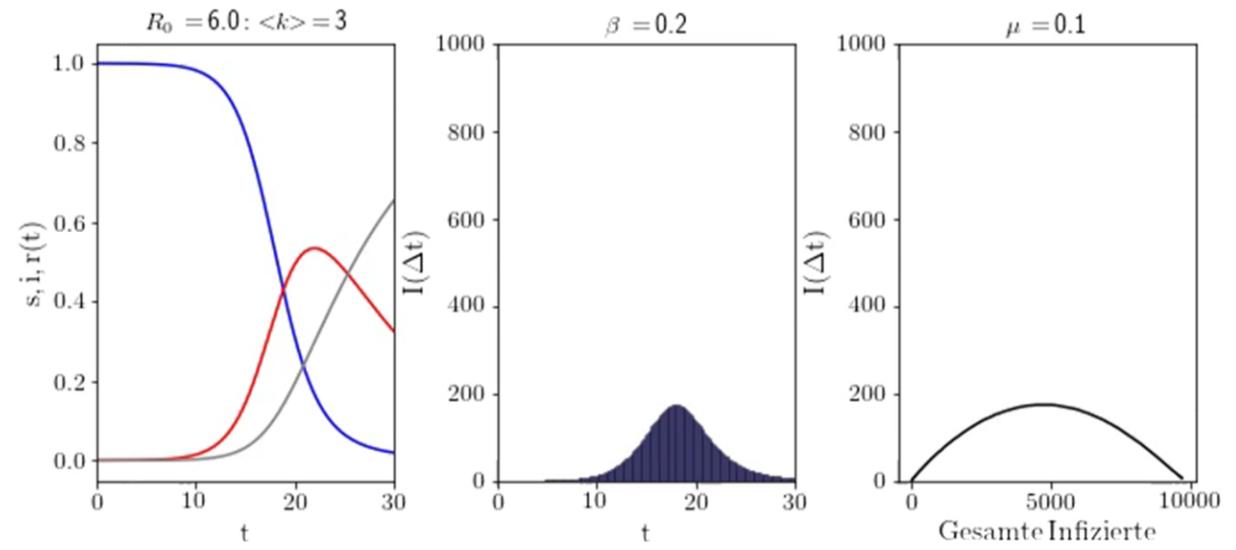
Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
 von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
 (Wintersemester 2020/21)

Dritter Vorlesungsteil:
 Ausbreitung eines Virus auf einem komplexen Netzwerk
 Das deterministische SIR Modell

Einführung
 Die Ausbreitung eines Virus auf einem Netzwerk (Knoten und Kanten)
 Das deterministische SIR Modell



Jupyter Notebook: Das deterministische SIR Modell



Simulationsbasierte, Stochastische Modelle

Eine der die Ausbreitung am stärksten bestimmende Größe ist die zugrundeliegende Kontakt-Netzwerkstruktur der das Virus verbreitenden Personen.

In den simulationsbasierten Modellen kann man die Auswirkungen der Topologie des Kontakt-Netzwerks studieren. Die Verteilungsfunktion der Knotengrade spielt hierbei wieder eine bedeutende Rolle und kann mittels der 'degree block'-Approximation analysiert werden (siehe Image 10.9 in [Chapter 10: Spreading phenomena](#)).

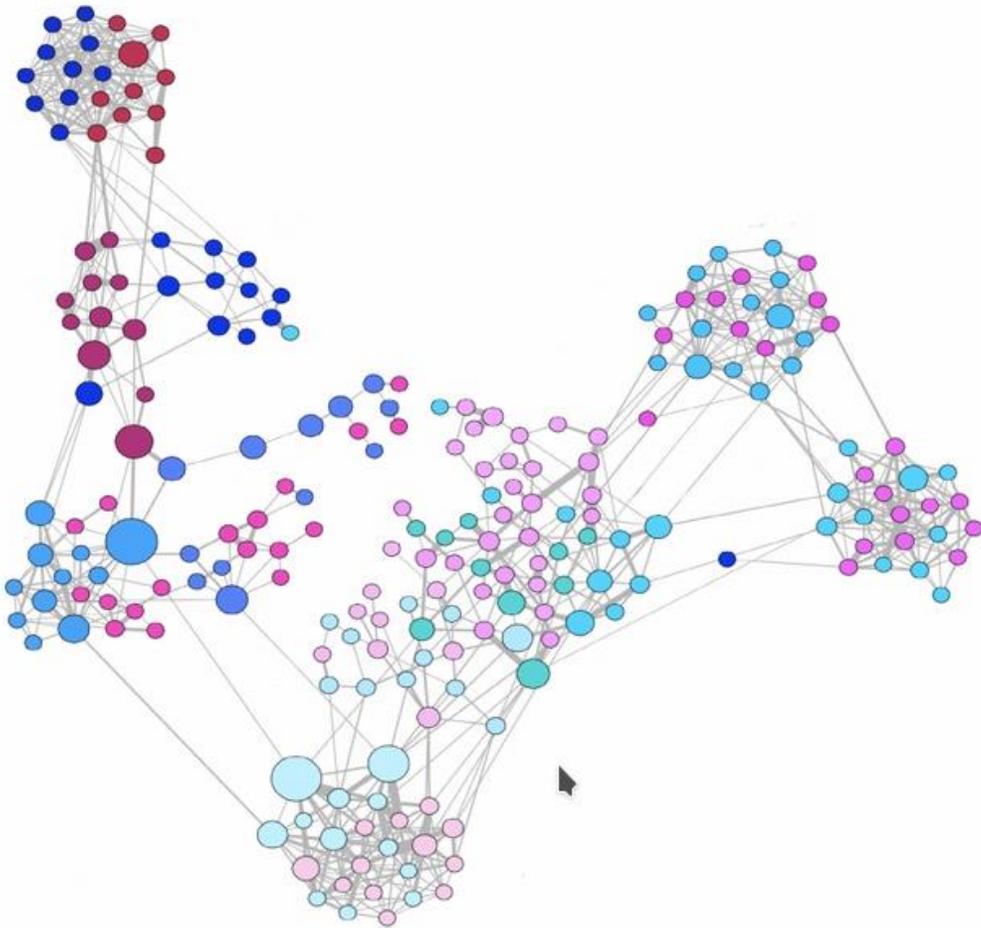
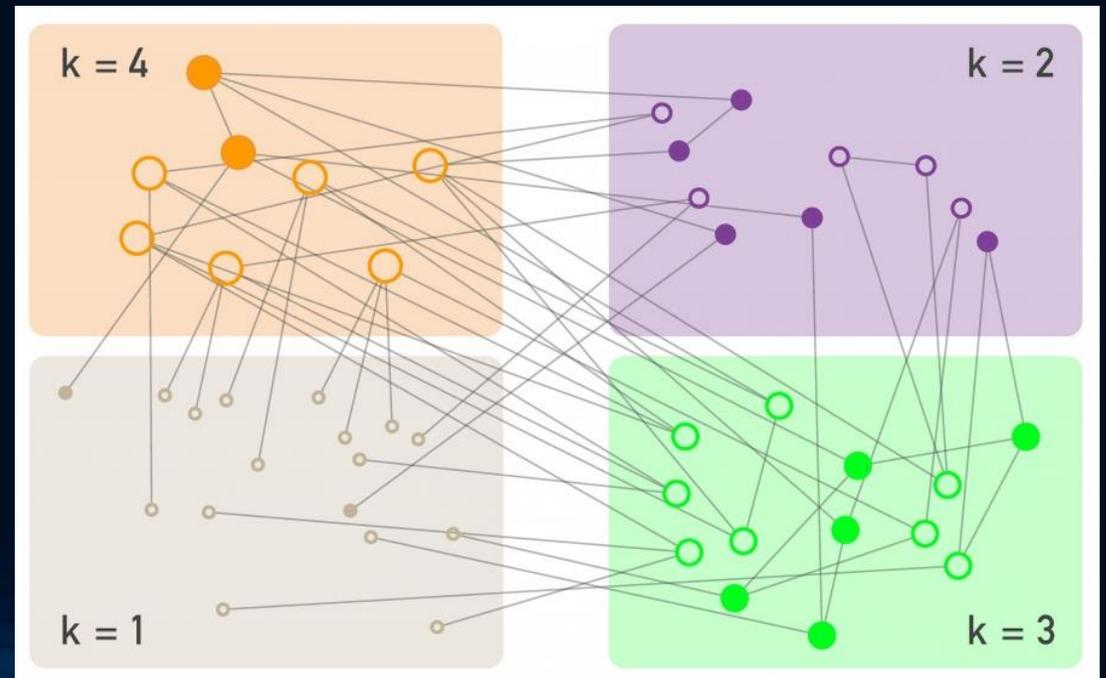


Image 10.16

A Face-to-face Interactions

A face-to-face contact network mapped out using RFA tags, capturing interactions between 232 students and 10 teachers across 10 classes in a school [31]. The structure of the maps obtained by RFID tags depend on the context in which they are collected. For example the school network shown here reveals the presence of clear communities. In contrast, a study capturing the interactions between individuals that visited a museum reveal an almost linear network [29]. Finally, a network of attendees of a small conference is rather dense, as most participants interact with most others [29]. After [31].



Jupyter Notebook: Ausbreitung eines Virus auf einem komplexen Netzwerk *Simulationsbasierte Lösungen*

Physik der sozio-ökonomischen Systeme
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

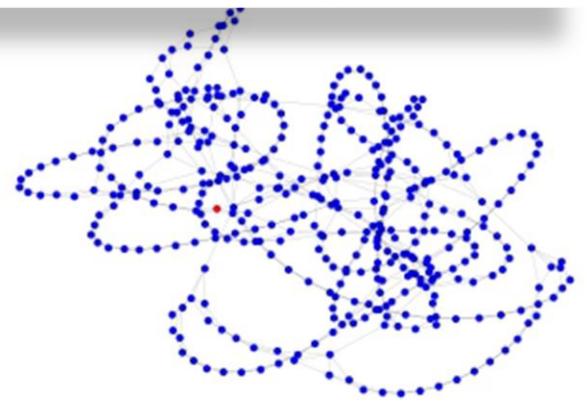
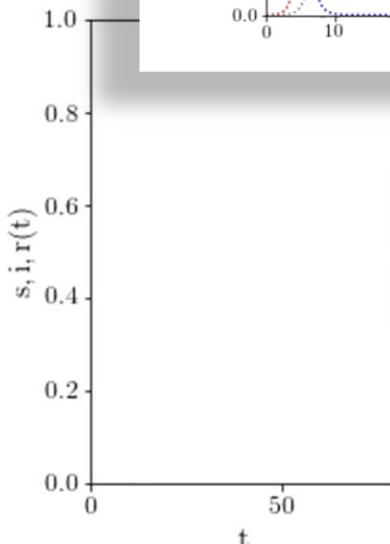
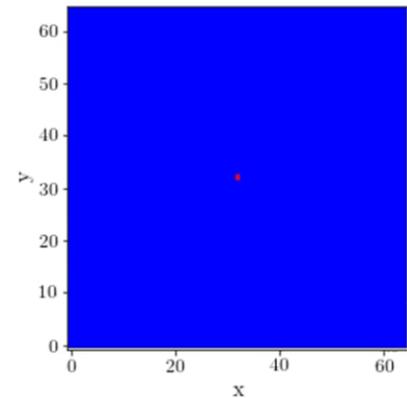
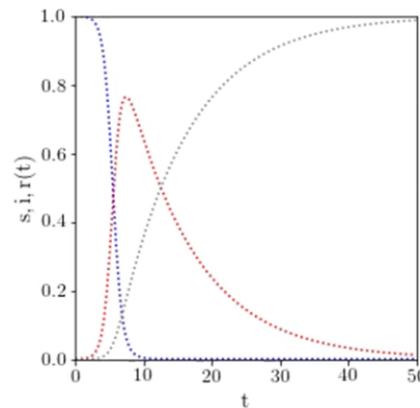
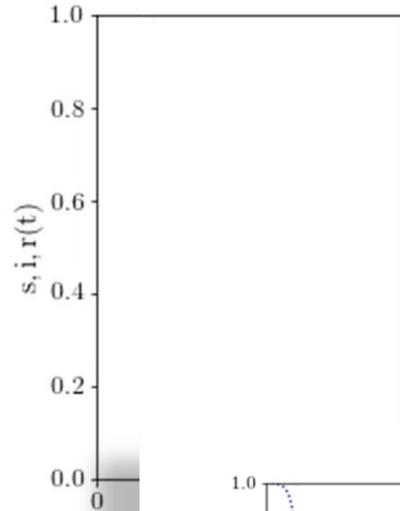
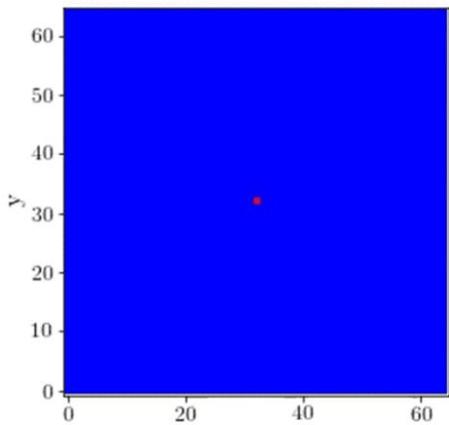
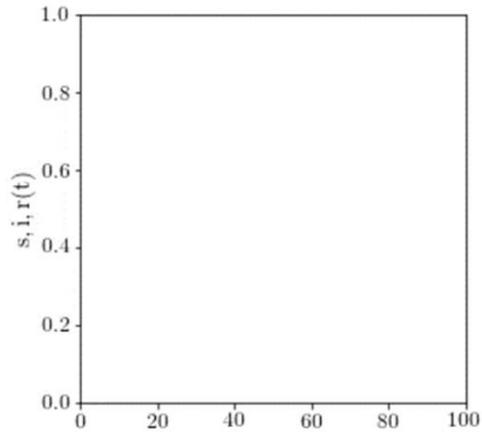
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 31.12.2020

Zweiter Vorlesungsteil:

Ausbreitung eines Virus auf einem komplexen Netzwerk
Simulationsbasierte Lösungen



Meeting is now streaming live on Custom Live Streaming Service

**Viren und Epidemien
aus Sicht der
Mathematik**

Ringvorlesung
im Rahmen der
Frankfurter Bürgeruniversität

online
ringvorlesung.math.
uni-frankfurt.de

Zeit
Jeweils dienstags,
18:00 Uhr



17. November 2020
Prof. Dr. Dirk Brockmann
RKI und HU Berlin
Pandemien und ihre Ausbreitung

01. Dezember 2020
Prof. Dr. Tom Britton
Universität Stockholm
**Mathematical models for epidemics
like COVID-19**

19. Januar 2021
Prof. Dr. Tanja Stadler
ETH Zürich
**Molekulare Epidemiologie:
Von Genomen, Statistik und Bioinformatik
zur Beurteilung der momentanen COVID-19 Situation**

09. Februar 2021
Dr. Viola Priesemann
MPI für Dynamik und Selbstorganisation, Göttingen
**Die Ausbreitung von SARS-CoV-2
abschätzen, vorhersagen und eindämmen**

GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Veranstalter: Verein zur Förderung der Mathematik und Institut für Mathematik, Goethe-Universität

Ringvorlesung „VIREN UND EPIDEMIEN AUS SICHT DER MATHEMATIK“

3. Vortrag:
Prof. Dr. Tanja Stadler
ETH Zürich

„Molekulare Epidemiologie:
Von Genomen, Statistik und Bioinformatik
zur Beurteilung der momentanen COVID-19 Situation“

Verein zur Förderung der Mathematik
www.mathe-uni-ffm.de

GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN




Meeting is now streaming live on Custom Live Streaming Service

Agenda

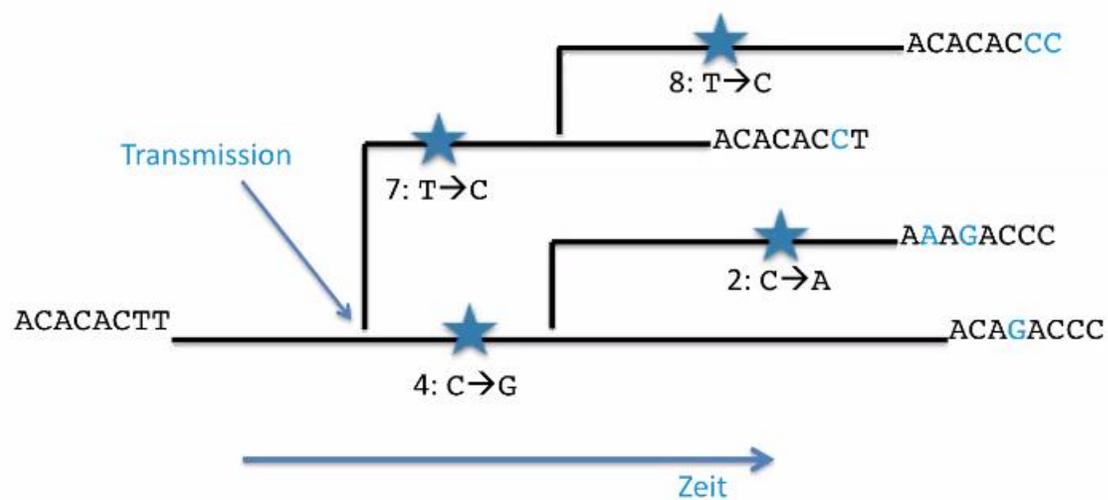
- Reproduktionszahl
- Strategien zum Umgang mit der Epidemie
- Informationen basierend auf Genom-Daten
 - Transmissionsketten
 - Varianten

2



Meeting is now streaming live on Custom Live Streaming Service

Die SARS-CoV-2 Genome verändern sich durch Mutationen



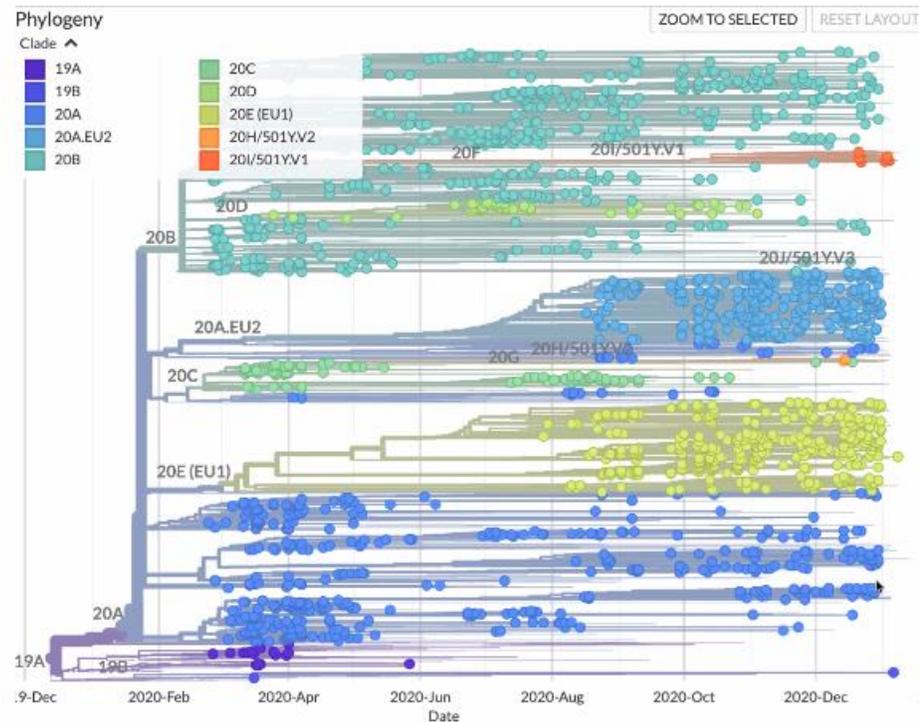
13



Tanja Stadler

Meeting is now streaming live on Custom Live Streaming Service

Der SARS-CoV-2 Transmissions-Baum



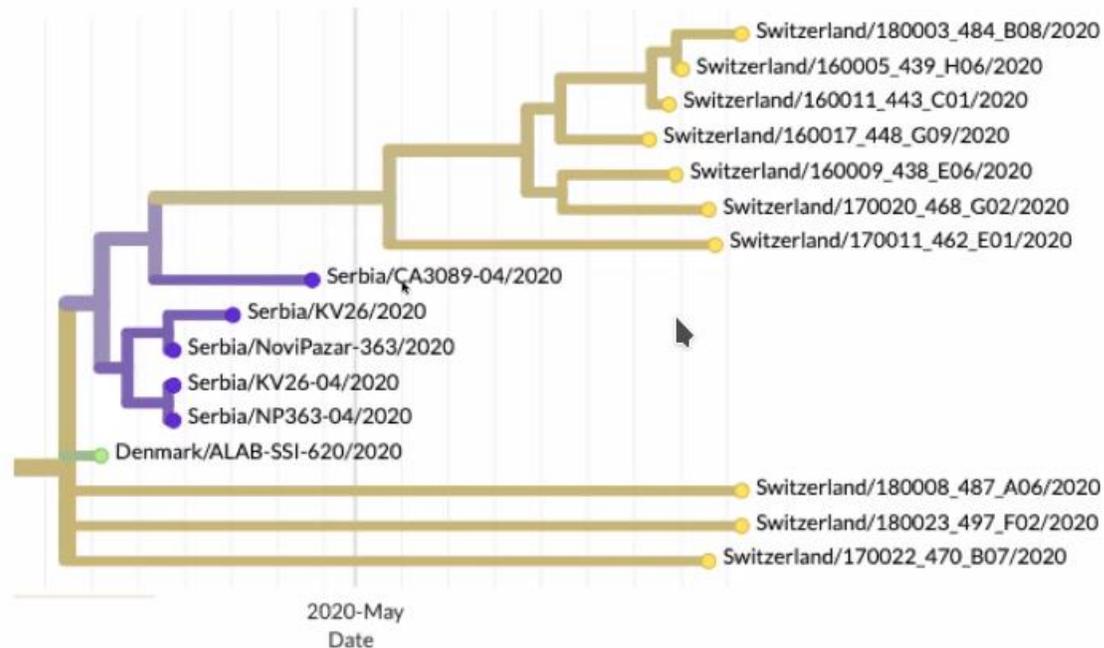
https://nextstrain.org/groups/swiss/ncov/switzerland?f_country=Switzerland

15



Meeting is now streaming live on Custom Live Streaming Service

Einblicke in die Epidemie - Transmissionen über Landesgrenzen hinweg



https://nextstrain.org/groups/swiss/ncov/switzerland?f_country=Switzerland

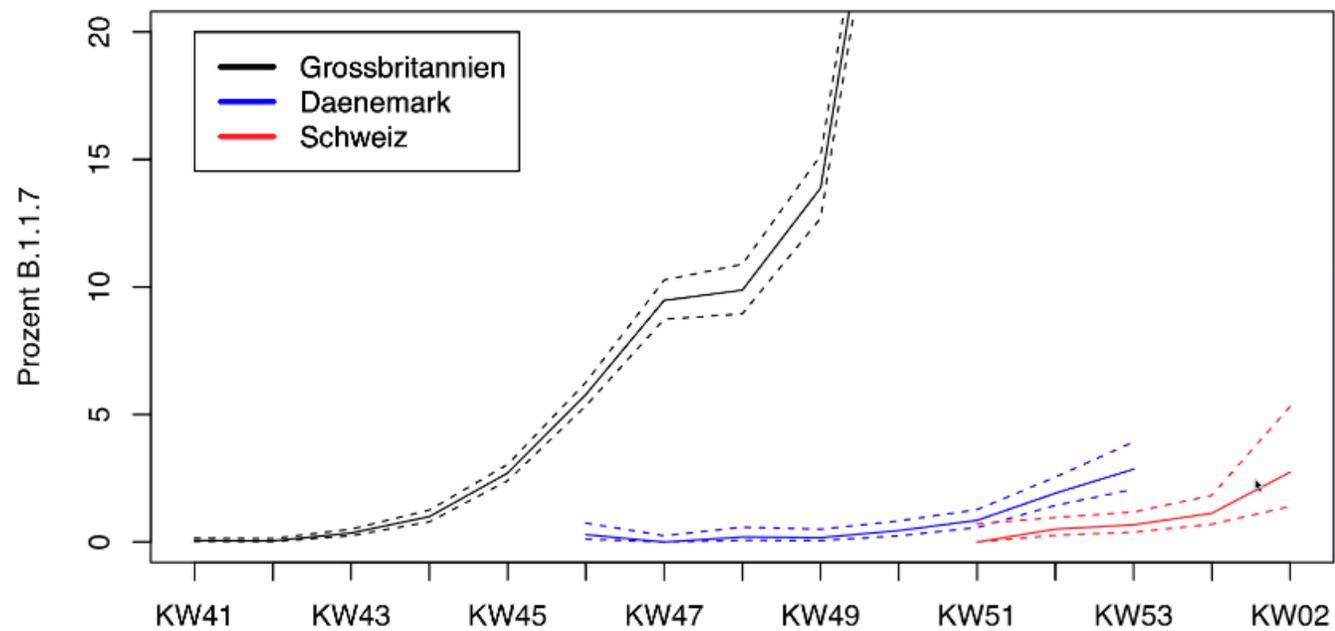
16



Tanja Stadler

Meeting is now streaming live on Custom Live Streaming Service

Dynamik der neuen Variante



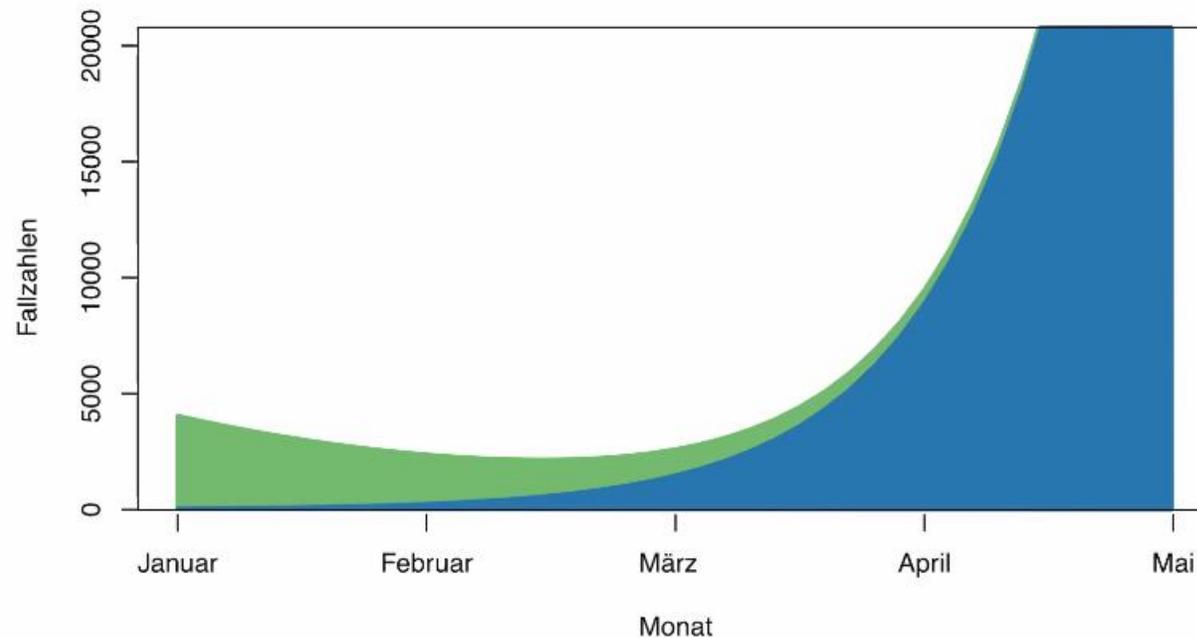
20



Meeting is now streaming live on Custom Live Streaming Service

Neue Variante B.1.1.7 hat erheblichen Transmissionsvorteil

R-Wert bekannte Variante: 0.9. Transmissions-Vorteil neue Variante: 50%.



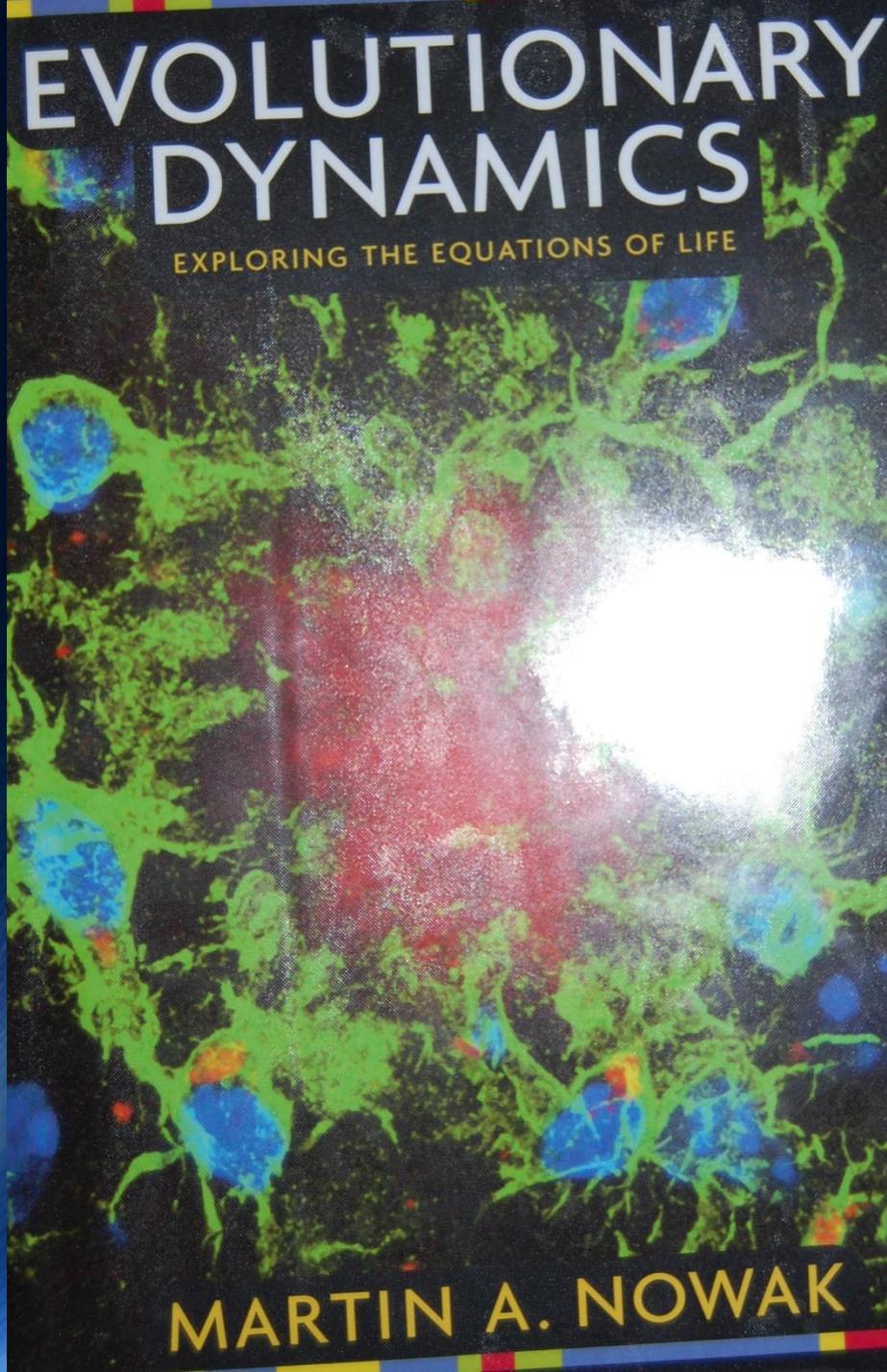
Annahmen:

- Anfangsprevalenz neue Variante 1%
- Ohne Effekt Impfung; Impfung wird auf Dauer R-Wert senken

23



Tanja Stadler



Einführung in Teil III

Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Die folgenden Beispiele sind an das Kapitel 9 im Buch M.A. Nowak „**Evolutionary Dynamics**“ (Kapitel 9: Spatial Games) angelehnt.

Viele der in diesem Unterkapitel behandelten Systeme sind dem Buch Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life, 2006 entnommen, welches eine sehr gute und allgemein verständliche Einführung in das Themengebiet der evolutionären Dynamik darstellt. Obwohl der Fokus dieses Buches im Bereich der Evolution von biologischen Systemen liegt (siehe Kapitel 10: HIV Infection, Kapitel 11: Evolution of Virulence, Kapitel 12: Evolutionary Dynamics of Cancer, und Kapitel 13: Language Evolution), sind die Kapitel 1-9 weitgehend allgemein formuliert. Die evolutionäre Dynamik unterschiedlicher Spezien einer Tierart und der Mechanismus wie Tierarten ineinander übergehen wurde von Charles Darwin bereits im Jahre 1840 beschrieben. Im Jahre 1973 stellte John Maynard Smith eine Verbindung zwischen den Populationsgleichungen der Biologie und der evolutionären Spieltheorie her. Das Konzept der *Quasi-Spezien* (Ensemble von ähnlichen Genomen Sequenzen (Erbgut eines Lebewesens) welches durch einen Prozess der Mutation und Selektion entstanden ist) wurde von Manfred Eigen und Peter Schuster entwickelt (siehe Kapitel 3.3: Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life). Die Struktur der Quasi-Spezien Differentialgleichung ist den Gleichungen der evolutionären Spieltheorie sehr ähnlich (siehe Bild 3.4 und 4.5: Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life). Die evolutionäre Vorteilhaftigkeit einer Genom Sequenz wird hierbei als die *Fitness* der Quasi-Spezie bezeichnet. *Quasi-Spezien* entsprechen den Strategien der Spieltheorie und die Fitness kann als der Auszahlungswert einer Strategie aufgefasst werden. Die zeitliche Entwicklung der *Quasi-Spezien* am Beispiel des Paarungsverhalten von Eidechsen wird z.B. in siehe Sinervo, Barry, and Curt M. Lively. 'The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male strategies.' Nature 380.6571 (1996): 240. analysiert (siehe auch Vorlesung 6). Die evolutionäre Dynamik hängt von der unterliegenden Netzwerkstruktur der beteiligten Akteure ab und skalenfreie Netzwerkstrukturen agieren hier als Verstärker der evolutionären Selektion (siehe Kapitel 8, Evolutionary Graph Theory: Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life). Im folgenden Unterpunkt werden sie sogenannten *Spatial Games* behandelt (eine ausführliche Einführung findet sich im Kapitel 9: Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life).

A **quasispecies** is a population of reproducing RNA or DNA molecules

ATCAGGACTCA	0000110011000110
ATC G GGACTCA	0000110011 1 00110
ATCAGGA A TCA	1 000110011000 0 10
...	...

4-nucleotide alphabet Binary alphabet

Figure 3.3 The ensemble of genomes of a natural population form a quasispecies: the genomes of different individuals are similar but not identical. Biology has chosen a four-letter alphabet consisting of the nucleotides A, T, C, and G for its genes. Most in silico evolution uses a binary alphabet for convenience. Sequence differences (mutations) are shown in red.

Evolution is **adaptation** of the **quasispecies** on the fitness landscape



Figure 3.5 Quasispecies love to climb mountains in high-dimensional spaces. The higher they get, the fitter they are. Adaptation means to go up.

The **quasispecies equation**

Frequency of j Mutation from j to i

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n x_j f_j Q_{ji} - \phi(\vec{x}) x_i$$

Time derivative of frequency of i Fitness of j Average fitness

$$\phi(\vec{x}) = \sum_i f_i x_i$$

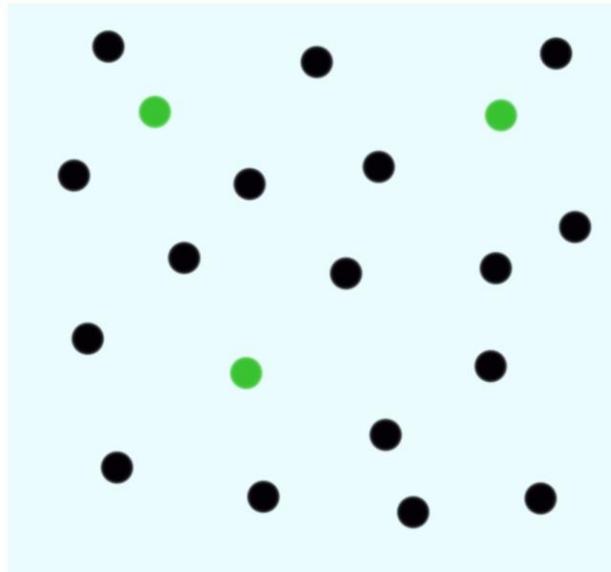
Figure 3.4 The quasispecies equation, formulated by Manfred Eigen and Peter Schuster, is one of the most important equations in theoretical biology. It describes the mutation and selection of an infinitely large population on a constant fitness landscape.

Das Konzept der Quasi-Spezien (Ensemble von ähnlichen Genomen Sequenzen (Erbgut eines Lebewesens) welches durch einen Prozess der Mutation und Selektion entstanden ist) wurde von Manfred Eigen und Peter Schuster entwickelt. Die Struktur der Quasi-Spezien Differentialgleichung ist den Gleichungen der evolutionären Spieltheorie sehr ähnlich.

Wiederholung: Evolutionäre Spieltheorie

Symmetrische (2x2)-Spiele einer Population

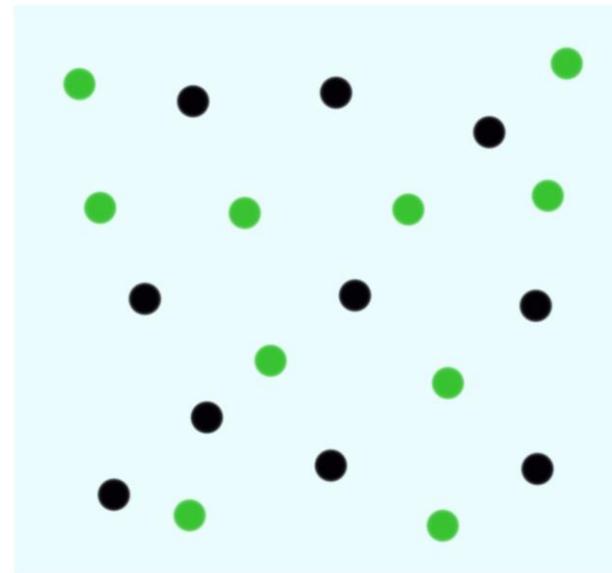
Die evolutionäre Spieltheorie betrachtet die zeitliche Entwicklung des strategischen Verhaltens einer gesamten Spielerpopulation.



$$x(0)=0.15$$



zeitliche
Entwicklung
der
Population



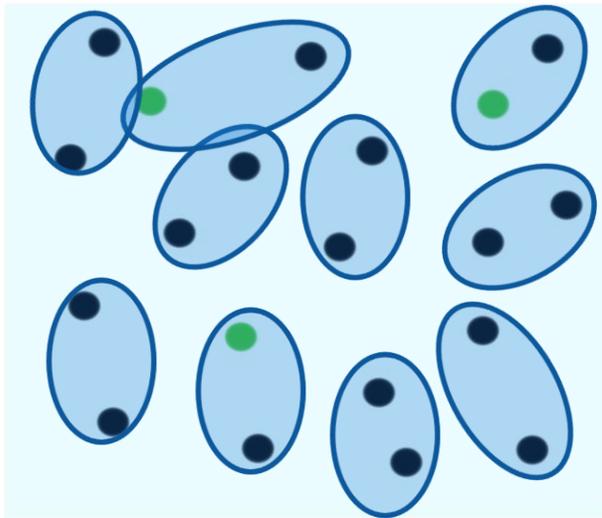
$$x(10)=0.5$$

Mögliche Strategien: (grün, schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
 $x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.

Evolutionäre Spieltheorie

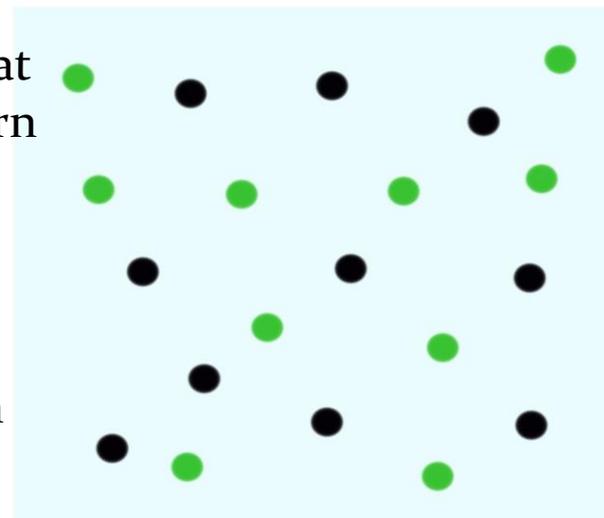
Symmetrische (2x2)-Spiele einer Population

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner wechseln .



$$x(0)=0.15$$

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt $t=0$ das erste Mal das Spiel. Die Spieler wählen im Mittel zu 15% die grüne Strategie.



$$x(10)=0.5$$

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die Spieler zunehmend attraktiver. Zum Zeitpunkt $t=10$ spielen schon 50% grün.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i^A(t)}{dt} &= \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$_{il}^A x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \$_{kl}^A x_k^A(t) x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \right] x_i^A(t) \quad (1) \\
\frac{dx_j^B(t)}{dt} &= \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$_{lj}^B x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \$_{lk}^B x_l^A(t) x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \right] x_j^B(t) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $x_i^A(t)$, $i = 1, 2, \dots, m_A$ und $x_j^B(t)$, $j = 1, 2, \dots, m_B$ die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit t gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen.

Nimmt man zusätzlich ein symmetrisches Spiel an ($\hat{\$} := \hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B\right)^T$), in welchem die Auszahlungswerte (Fitness-Werte) der Populationsgruppen gleich sind, so kann man die beiden Gruppen von ihrer mathematischen Struktur her als ununterscheidbare Spielergruppen mit identischen Populationsvektoren $x(t) = y(t)$ annehmen. Die Differentialgleichung schreibt sich dann wie folgt:

$$\frac{dx(t)}{dt} = [(\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2)] x(t) =: g(x) \quad (3)$$

Verallgemeinert man diese Differentialgleichung wieder auf mehr als zwei Strategien, so kann man abkürzend die folgende Formulierung schreiben:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{\mathbf{x}} \left(\hat{\$} \vec{x} \right) - \left(\left(\hat{\$} \vec{x} \right)^T \vec{x} \right) \vec{x}$$

Replikatorodynamik

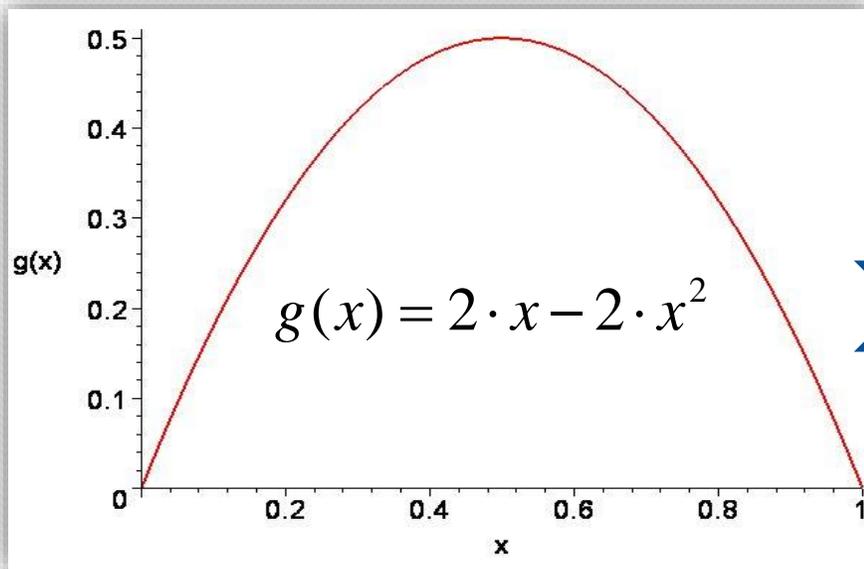
(für das Gefangenendilemma)

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Gefangenendilemma lautet:

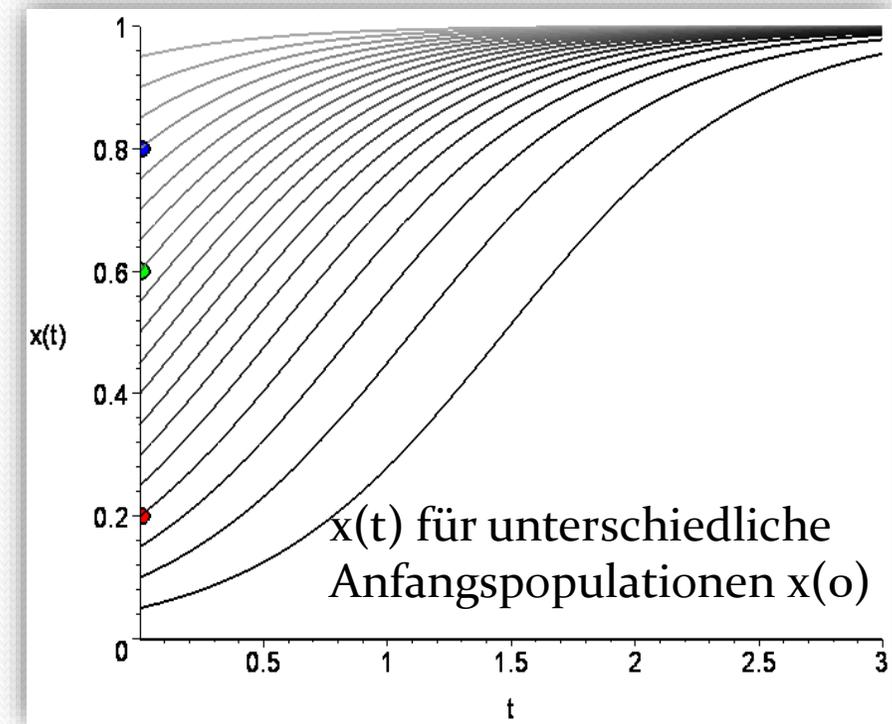
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot (x(t))^2 = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((-7 - (-9)) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (-3 - (-1)) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

	Ge	Sc
Ge	(-7, -7)	(-1, -9)
Sc	(-9, -1)	(-3, -3)



Beispiel: Gefangenendilemma
 $g(x)=g(x(t))$ im Bereich $[0,1]$ dargestellt



Replikatorodynamik

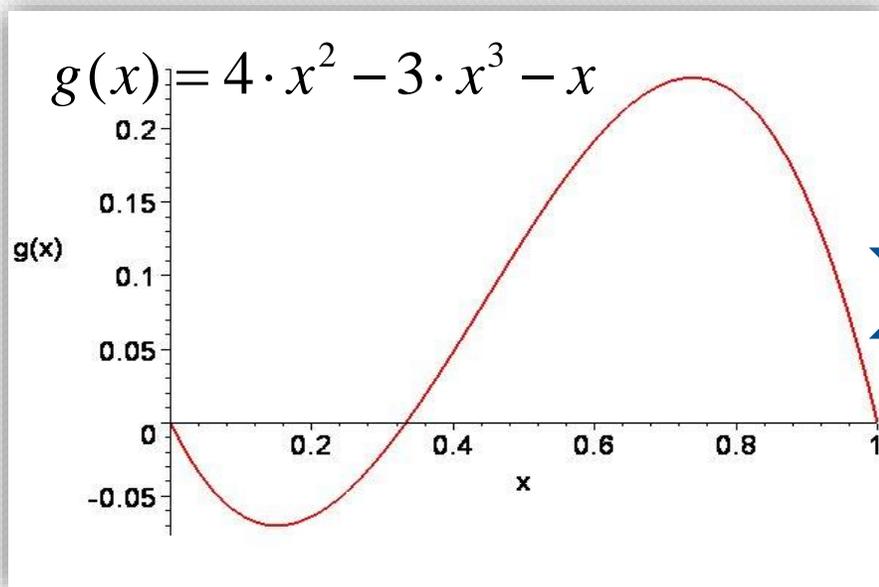
(für das Hirschjagt-Spiel)

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Hirschjagt-Spiel lautet:

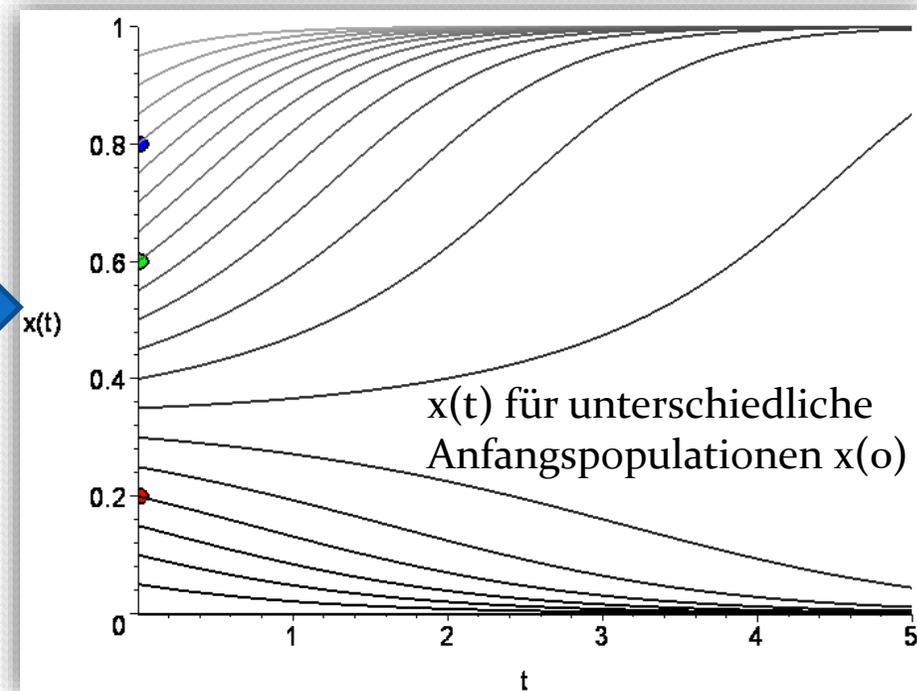
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 4 \cdot (x(t))^2 - 3 \cdot (x(t))^3 - x(t) =: g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((2 - 0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (5 - 4) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2, 2)	(4, 0)
Hirsch	(0, 4)	(5, 5)



Beispiel: Hirschjagt-Spiel
 $g(x) = g(x(t))$ im Bereich $[0,1]$ dargestellt



Replikatorodynamik

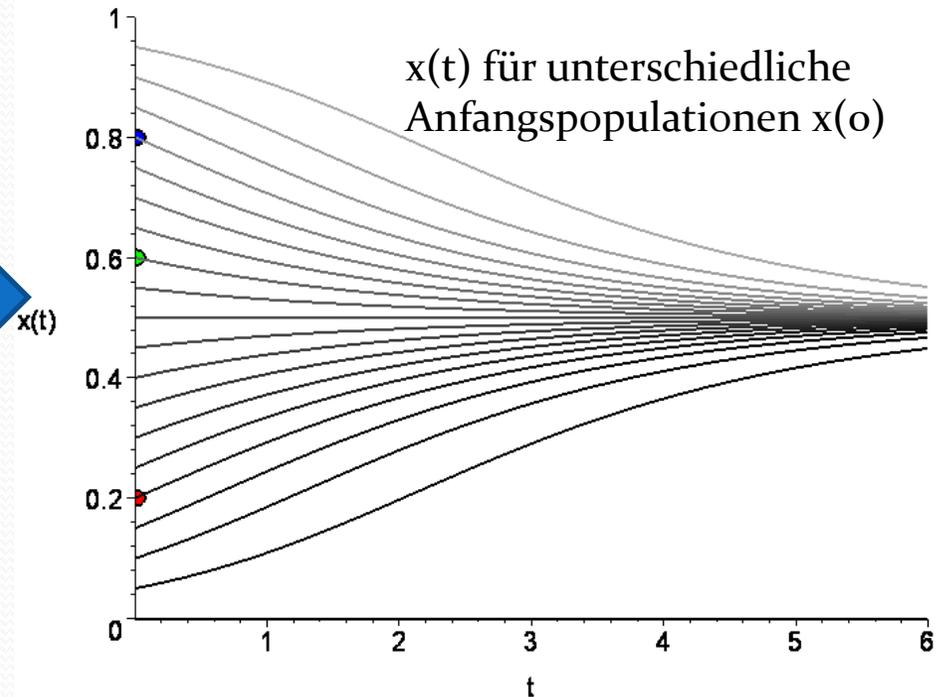
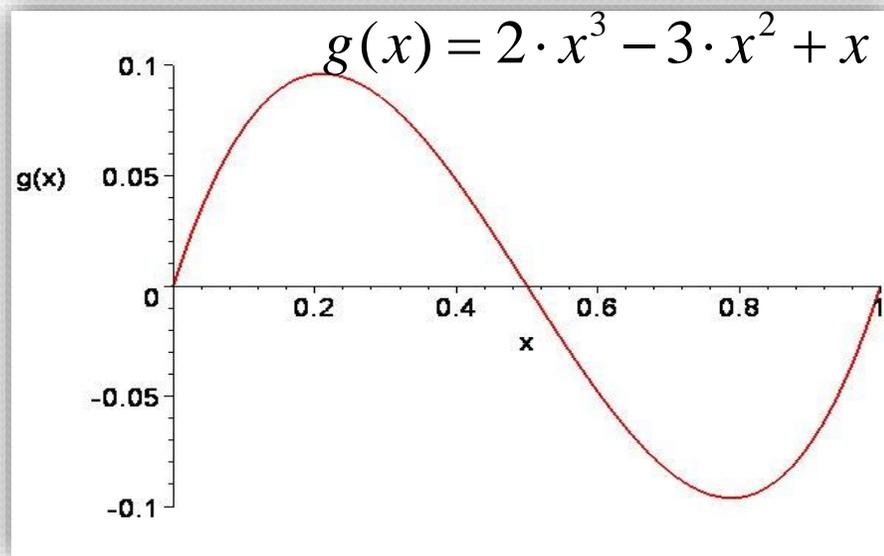
(für das Angsthasen-Spiel)

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Angsthasen-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot (x(t))^3 - 3 \cdot (x(t))^2 + x(t) = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((-1 - 0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (1 - 2) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

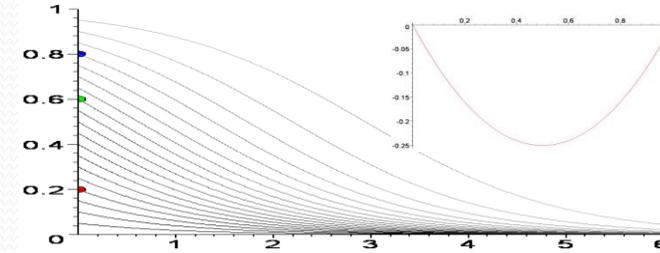
	Springe nicht	Springe
Springe nicht	(-1, -1)	(2, 0)
Springe	(0, 2)	(1, 1)



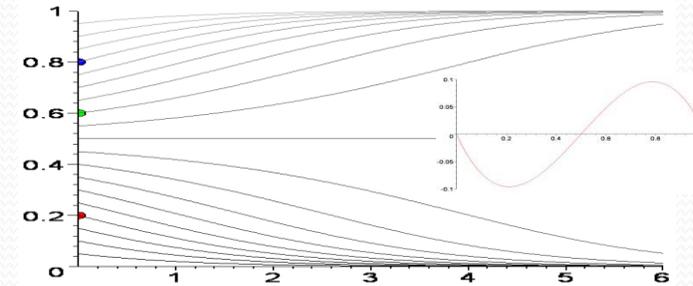
Beispiel: Angsthasen-Spiel
 $g(x)=g(x(t))$ im Bereich $[0,1]$ dargestellt

Klassifizierung von evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spielen

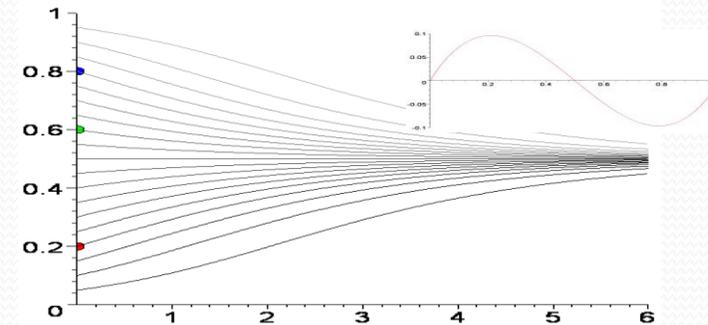
- **Dominante Spiele**
(2. Strategie dominiert 1.Strategie)
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei $x=0$.



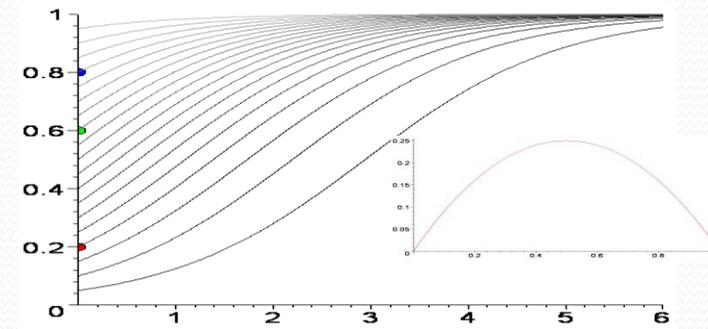
- **Koordinationsspiele**
Es existieren drei Nash - Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.



- **Anti - Koordinationsspiele**
Es existieren drei Nash - Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.



- **Dominante Spiele**
(1. Strategie dominiert 2.Strategie)
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei $x=1$.



Frequency-dependent selection dynamics between two strategies, A and B

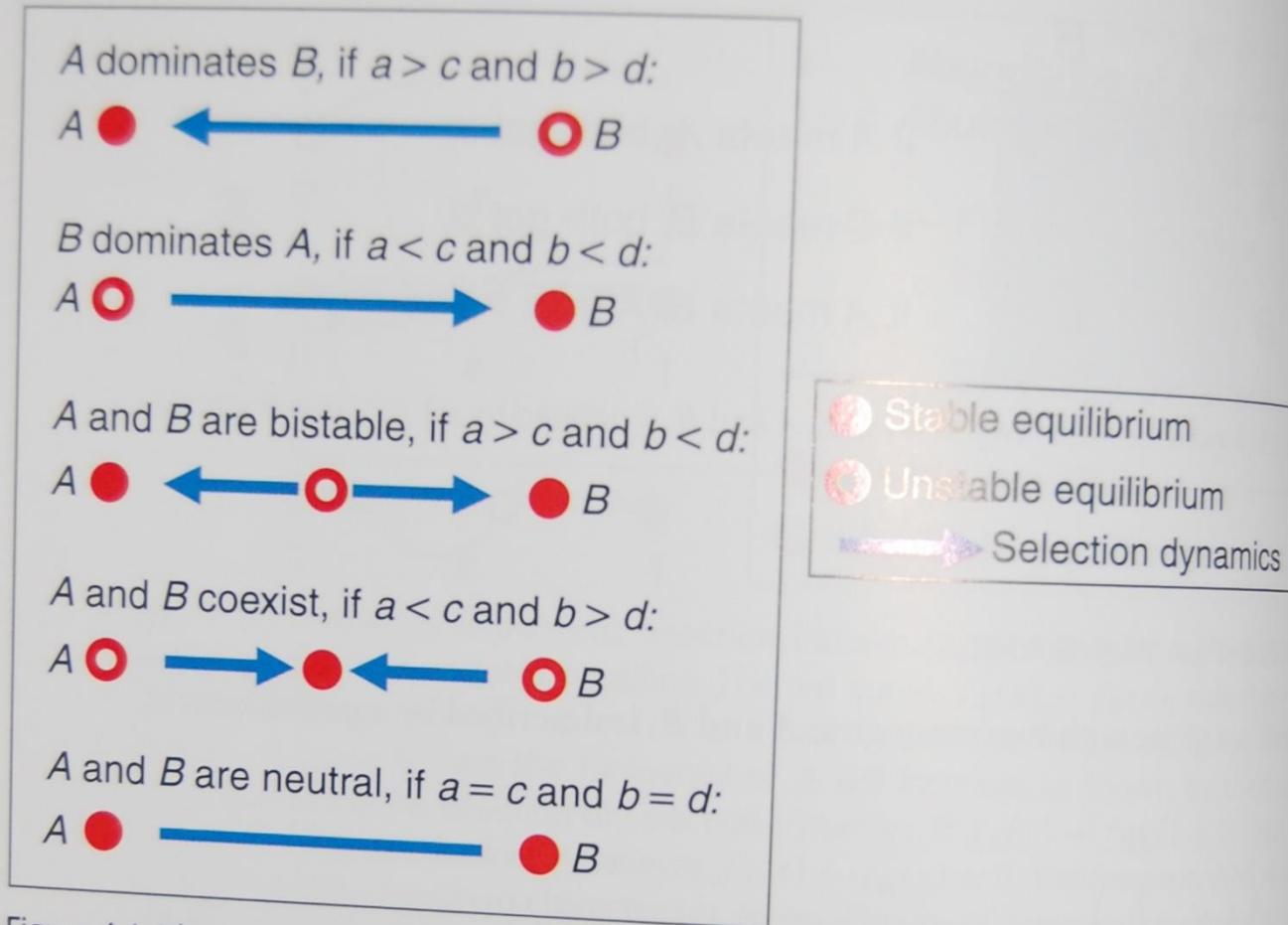
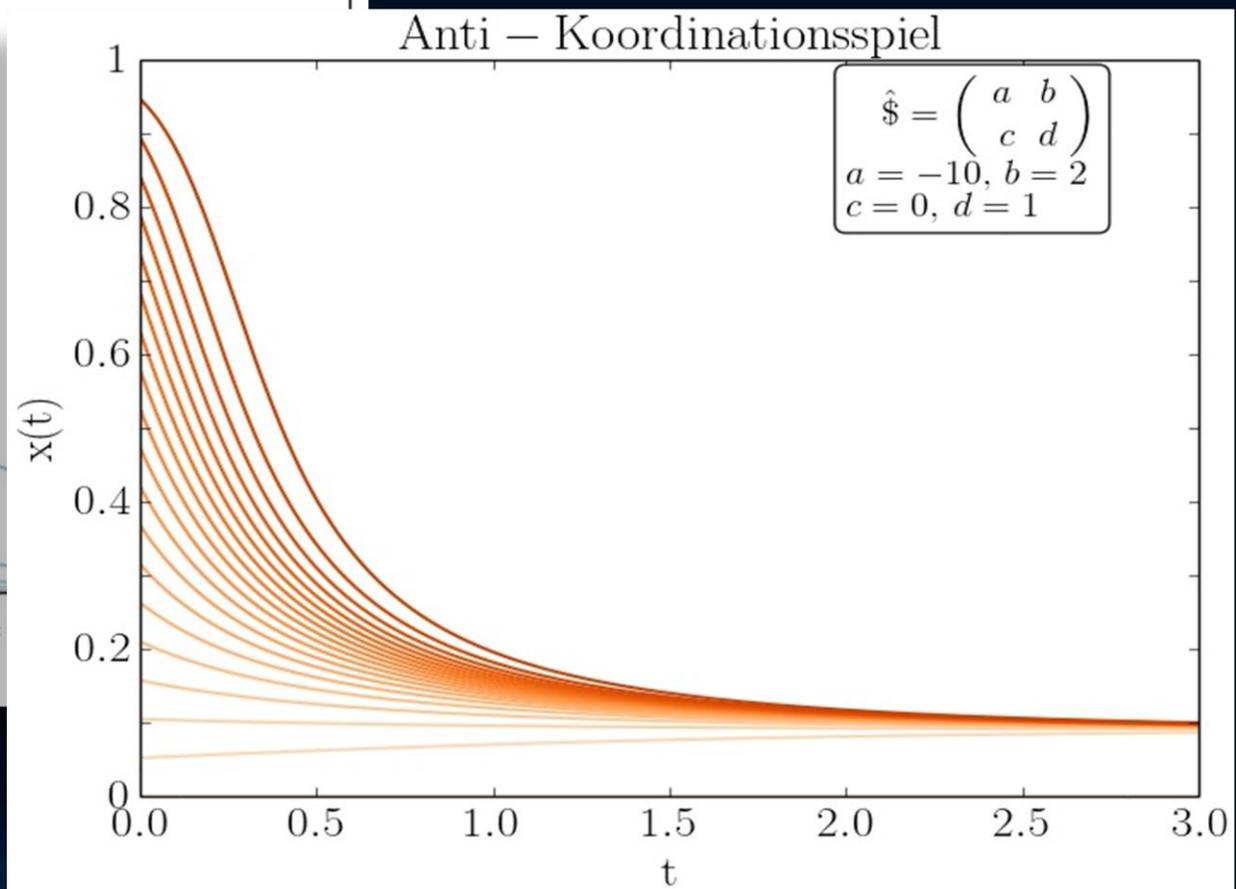
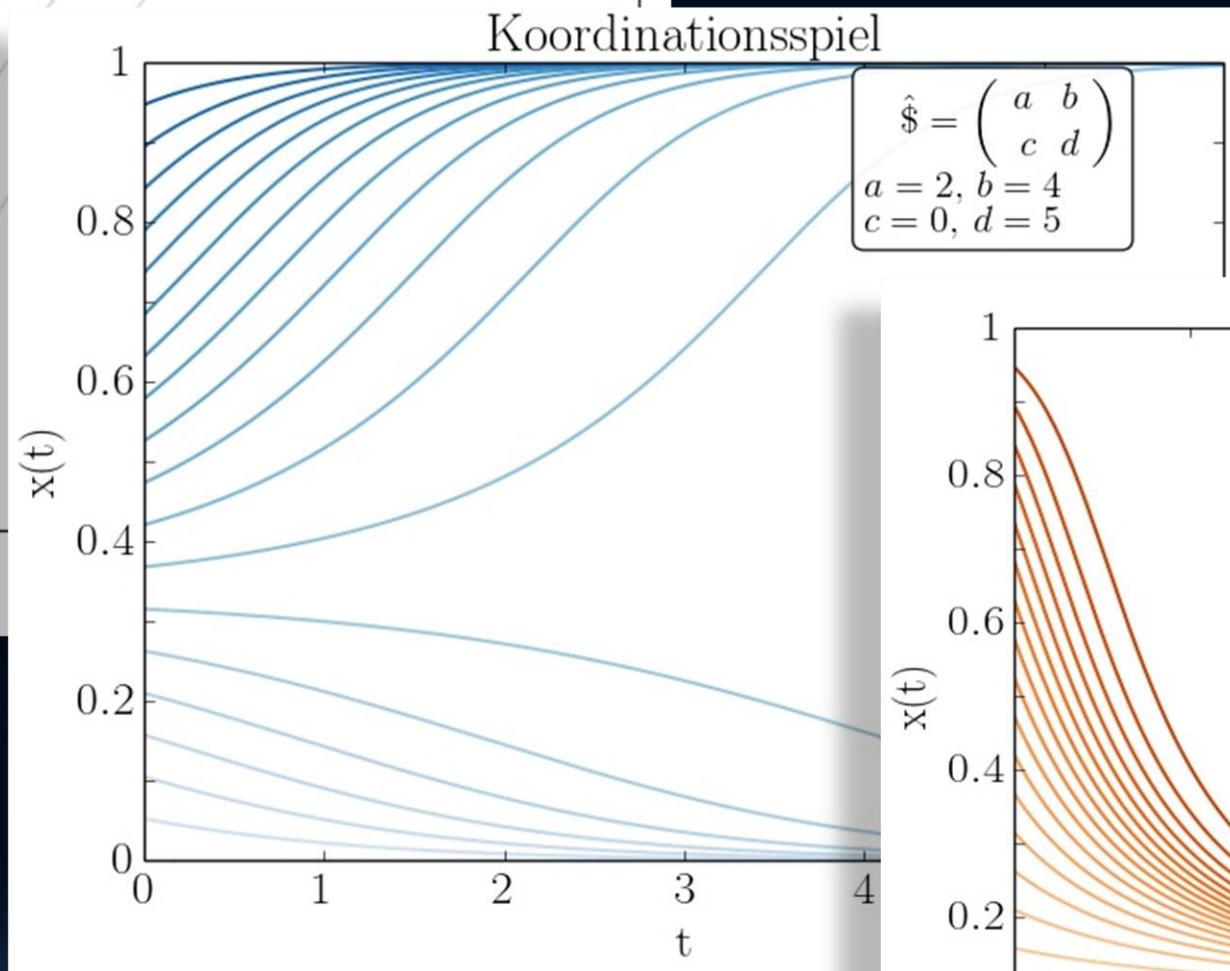
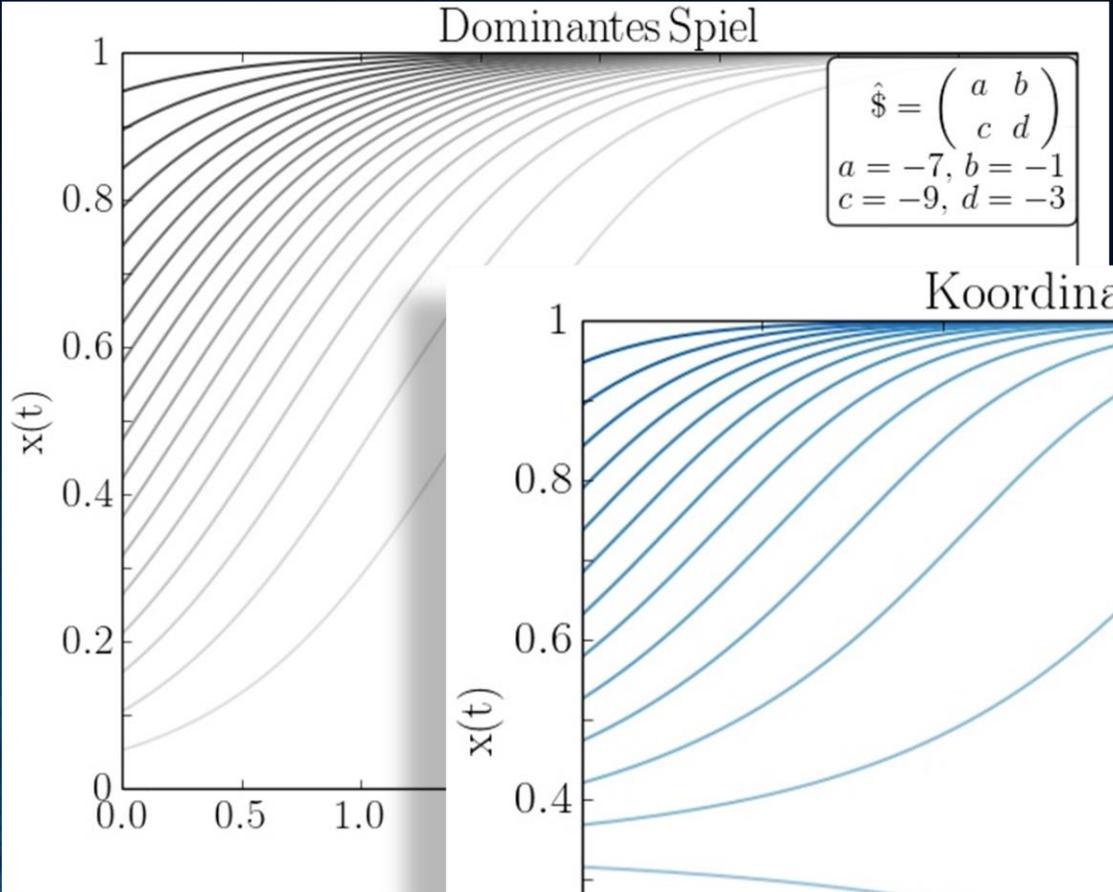


Figure 4.4 There are five possibilities for the selection dynamics between two strategies: (i) A dominates B, (ii) B dominates A, (iii) A and B are bistable, (iv) A and B coexist in a stable equilibrium, and (v) A and B are neutral variants of each other.

Das Kapitel 4 (Evolutionary Games) in dem Buch M.A. Nowak „**Evolutionary Dynamics**“ befasst sich mit Spieltheorie (siehe Teil I der Vorlesung)

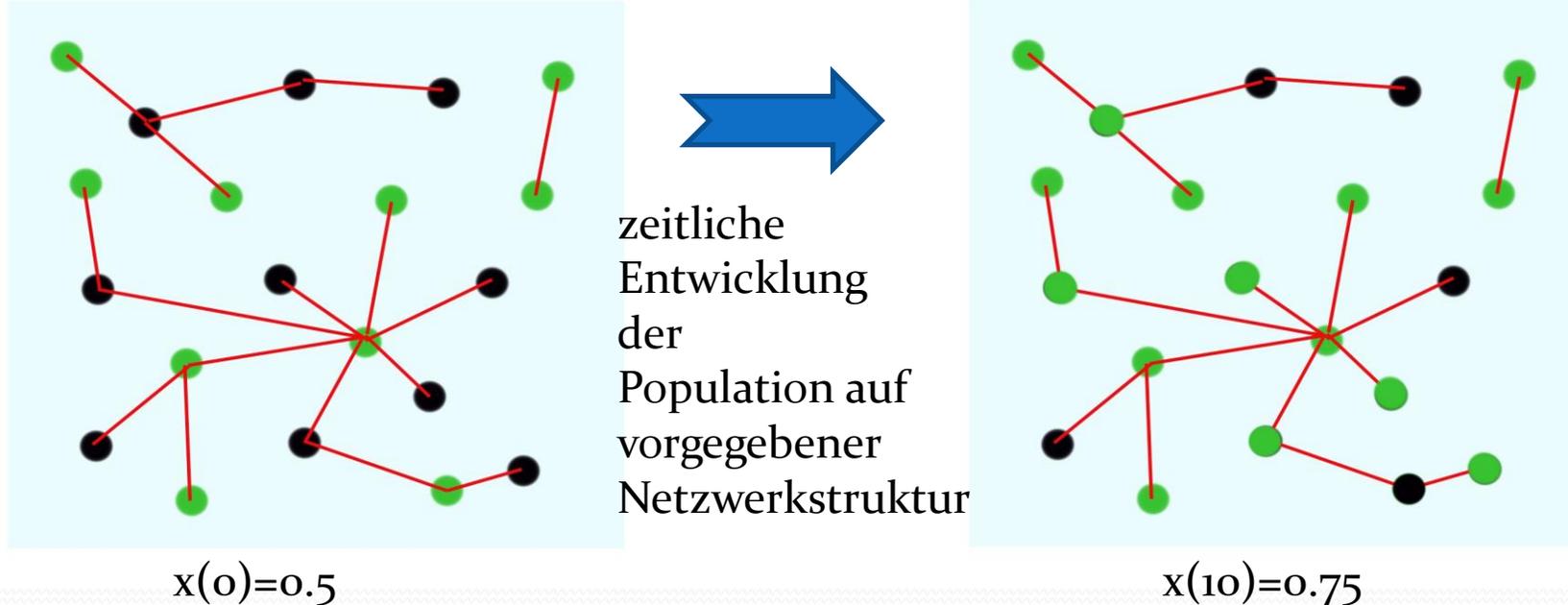
- **Dominante Spiele**
(2. Strategie dominiert 1. Strategie)
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei $x=0$.
- **Koordinationsspiele**
Es existieren drei Nash – Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.
- **Anti – Koordinationsspiele**
Es existieren drei Nash – Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.

Lösen des evolutionären Spiels mit Python Version evol1.py



Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Viele in der Realität vorkommende evolutionäre Spiele werden auf einer definierten Netzwerkstruktur (Topologie) gespielt. Die Spieler der betrachteten Population sind hierbei nicht gleichwertig, sondern wählen als Spielpartner nur mit ihnen durch das Netzwerk verlinkte (verbundene) Partner aus.



Mögliche Strategien: (grün, schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
 $x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.
Die roten Verbindungslinien beschreiben die möglichen Spielpartner des Spielers

Inhalte von Teil III

Einführung

Teil I

Teil II

Teil III

E-Learning

III.1 Evolutionäre Dynamik auf komplexen Netzwerkstrukturen

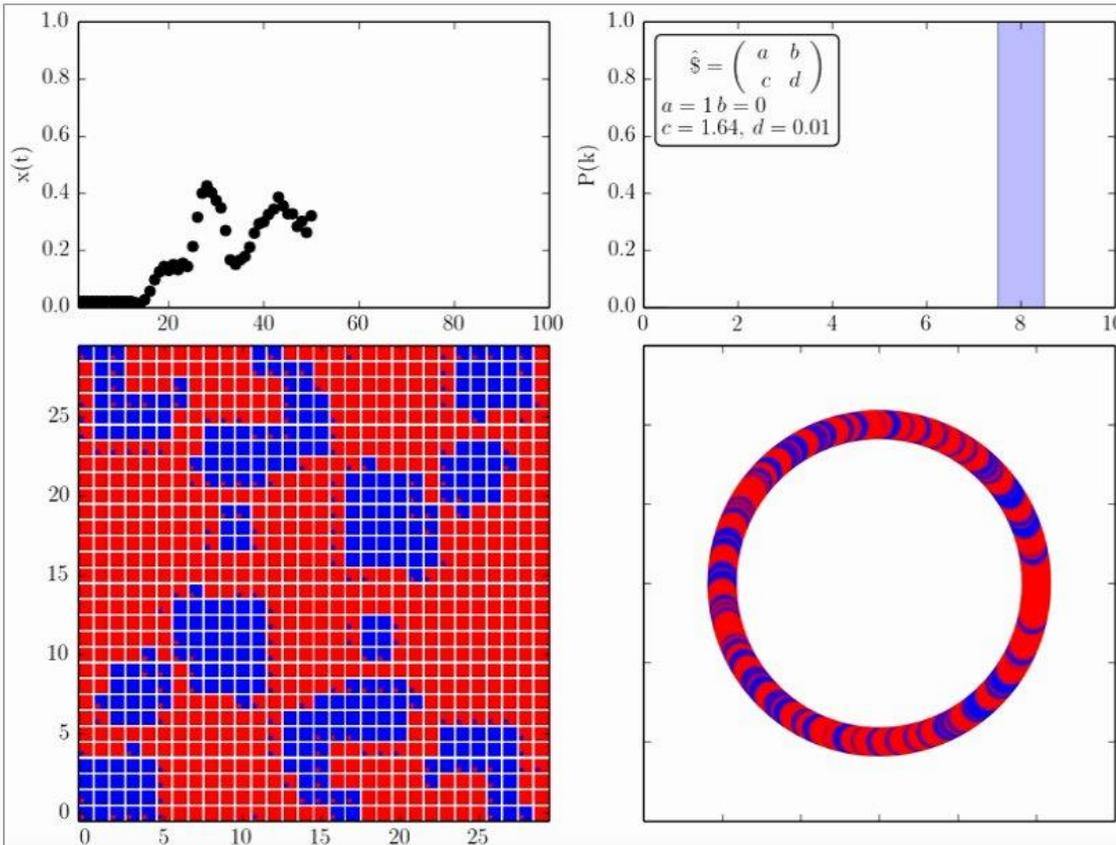
Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II der Vorlesung) mit der evolutionären Spieltheorie (siehe Teil I der Vorlesung) stellt ein vielversprechendes mathematisches Modell dar, welches sowohl der interdisziplinären Grundlagenforschung, als auch der angewandten, empirischen Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise einer Miteinbeziehung komplexer Netzwerktopologien in die evolutionäre Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk ablaufenden Entscheidungsprozesse können in den meisten Fällen lediglich mittels numerischer, agenten-basierter Computersimulationen veranschaulicht werden.

III.1.1 Spatial Games: Evolutionäre räumliche Spiele

In diesem Unterpunkt werden die Spieler einer endlich großen Population auf einem räumlichen Gitter angeordnet, wobei jeder Spieler nur mit seinen nächsten Nachbarn spielen kann (*Moore Nachbarschaft*). Das zugrundeliegende Netzwerk der Spielerknoten besitzt somit eine reguläre Struktur und im betrachteten 2-dimensionalen Fall spielt jeder Spieler pro Spielperiode mit acht Spielern (Knotengrad $k_i = 8 \forall i \in \mathcal{I}$). Wir beschränken uns im folgenden auf symmetrische 2x2-Spiele (siehe Teil I.1.4: Ansatz eines allgemeinen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels mit symmetrischer Auszahlungsmatrix und Parametern a , b , c und d). Die Spielerknoten spielen pro Iteration mit jedem ihrer Nachbarn und am Ende von jedem Zeitschritt vergleichen die Spieler ihren summierten Gewinn/Verlust mit den Nachbarspielern ihres Umfeldes. Ist die Auszahlung eines Spielers höher als der eigene Auszahlungswert, so ändern der Spieler in der nächsten Spielperiode seine Strategie; ist sein eigener Wert der höchste, so bleibt er auch in der nächsten Iteration bei seiner gespielten Strategie.

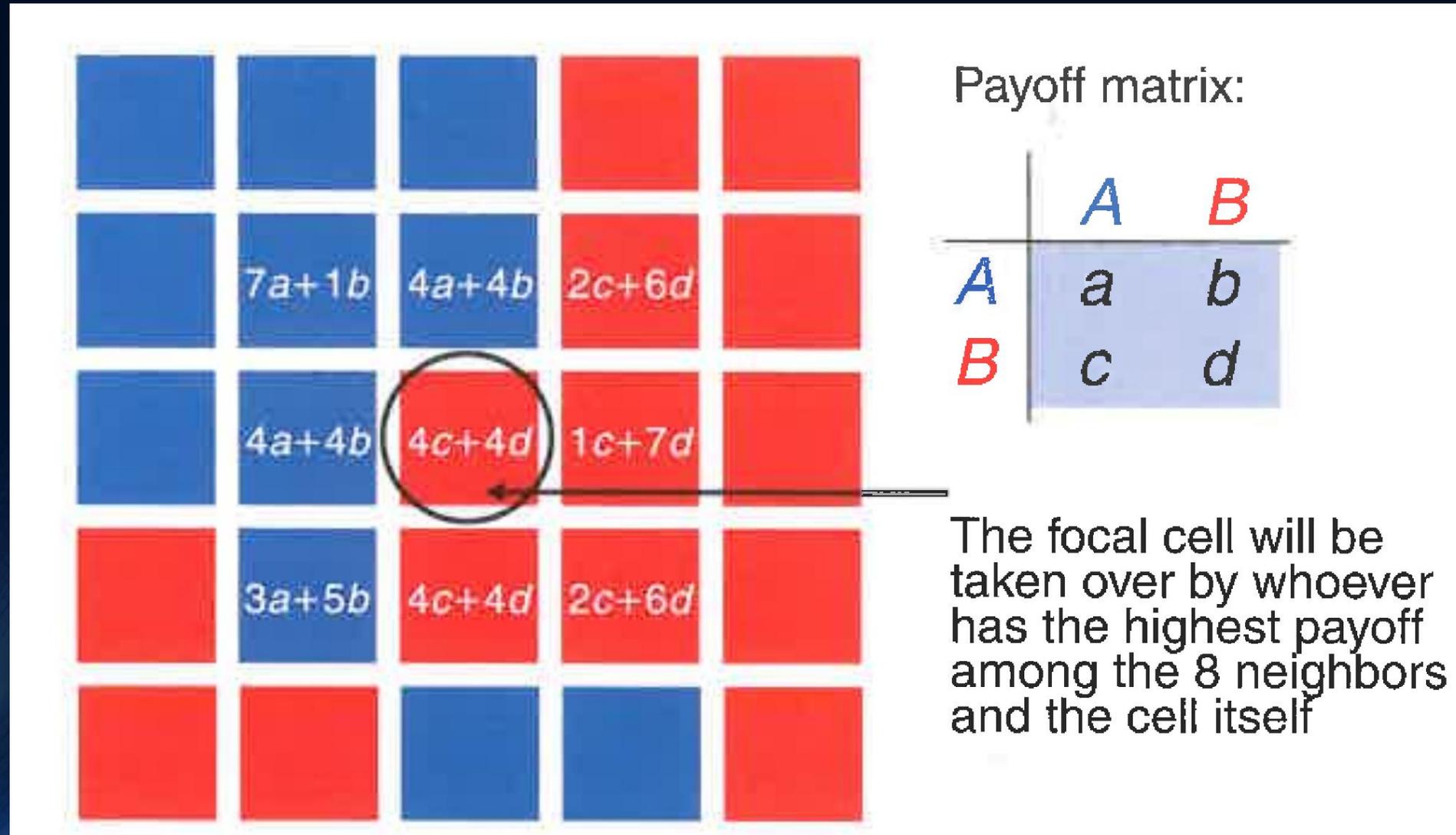
In dem oberen Link finden Sie eine Beispiel, das an das 9. Kapitel des Buches Martin A. Nowak, Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life, 2006 angelehnt ist und ein Gefangenendilemma auf einem räumlichen 2-dimensionalen Gitter beschreibt. In Abhängigkeit der Stärke der Dominanz der Strategie und der Anfangskonfiguration der Strategiewahl der Spieler sind unterschiedliche zeitlichen Entwicklungen der Population möglich. Die nebenstehende Animation zeigt die zeitliche Entwicklung einer speziellen sogenannten *Walker*-Anfangsbedingung, die nach der Kollision der beiden *Walker*-Strukturen eine Art explosionsartige

Ausbreitung der blauen Strategie verursacht (siehe Python Skript VPSOC-RandomNetwork_evol.py). Das linke obere Diagramm veranschaulicht die zeitliche Entwicklung des Populationsvektors $x(t)$. Obwohl die klassische evolutionäre Spieltheorie vorhersagt (siehe Teil I), dass der Anteil der Spieler die die dominante rote Strategie wählt im Laufe der Zeit kontinuierlich zunehmen sollte und gegen den Wert $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = 0$ konvergiert, bildet sich bei



Spatial Games

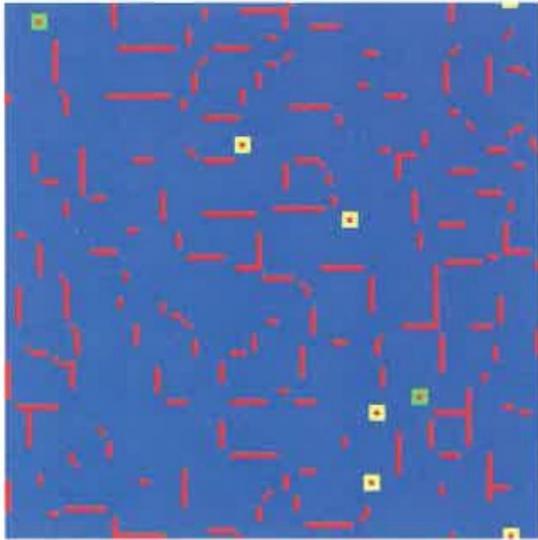
Das Kapitel 9 in dem Buch M.A. Nowak „Evolutionary Dynamics“ handelt über Spatial Games



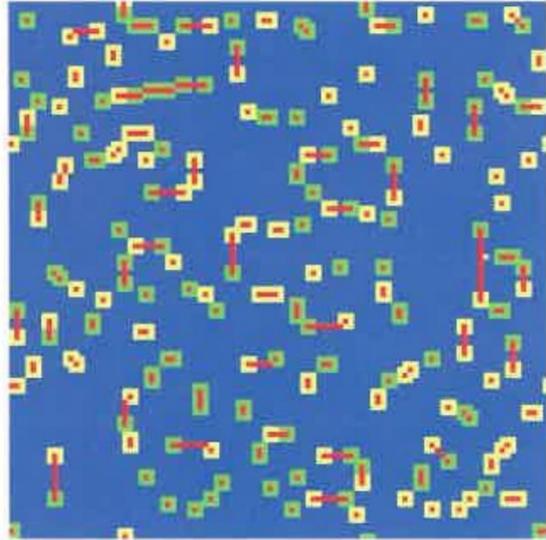
Die folgenden Abbildungen sind dem Buch M.A. Nowak „Evolutionary Dynamics“ entnommen.

Spatial Games

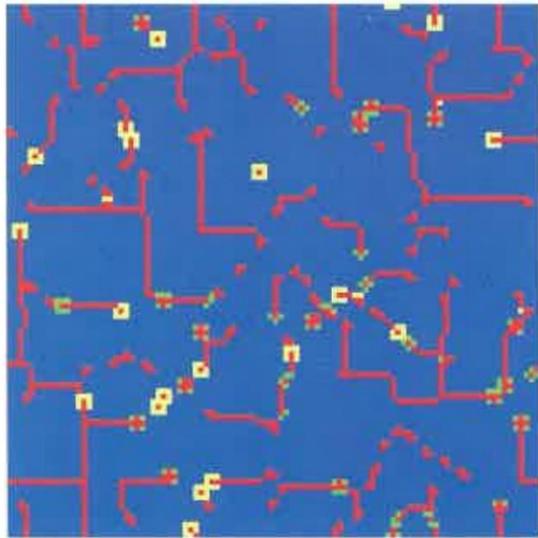
$b=1.10$



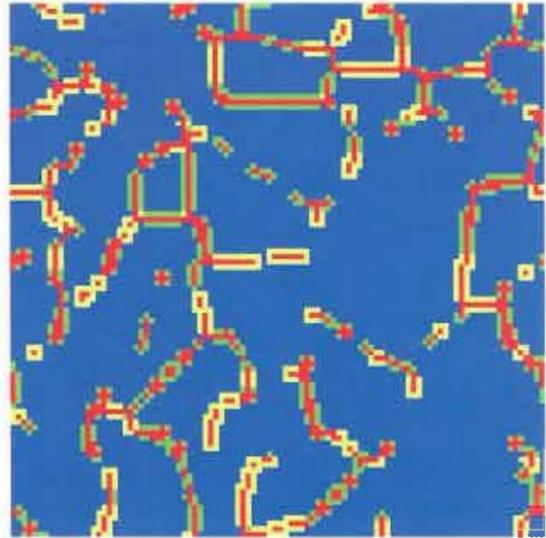
$b=1.15$



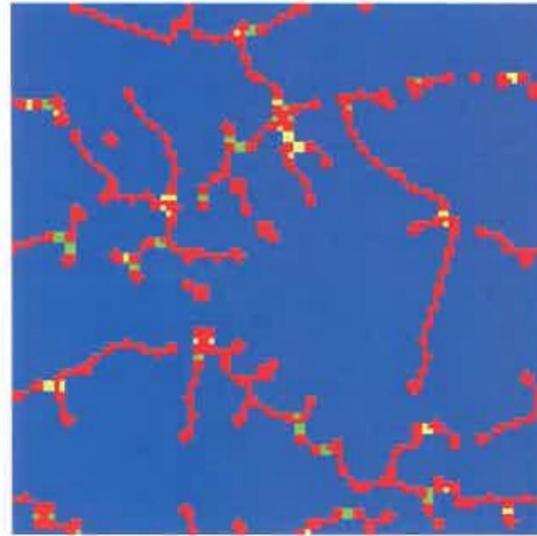
$b=1.24$



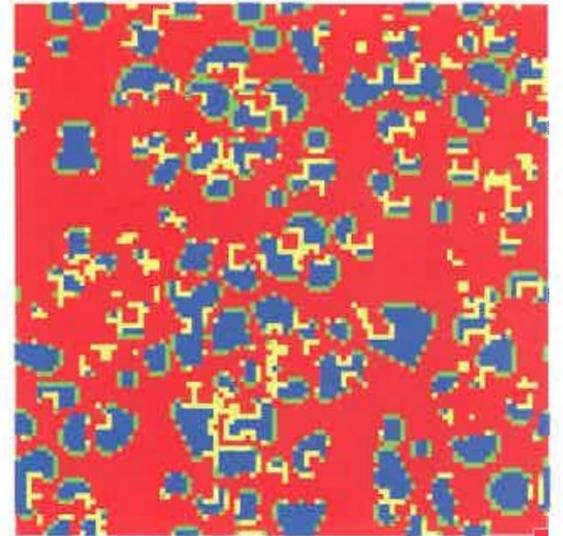
$b=1.35$



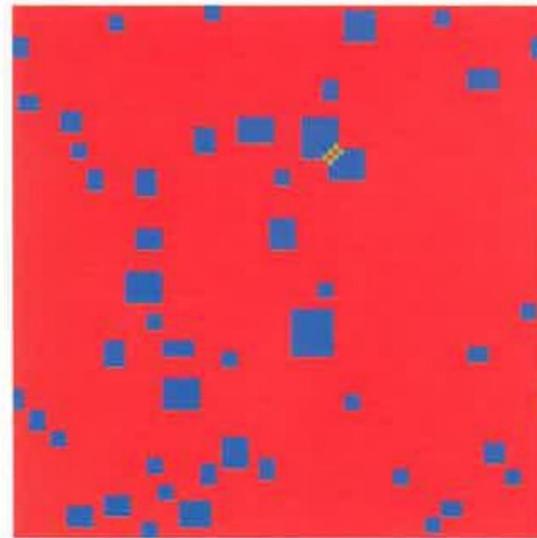
$b=1.55$



$b=1.65$



$b=1.70$



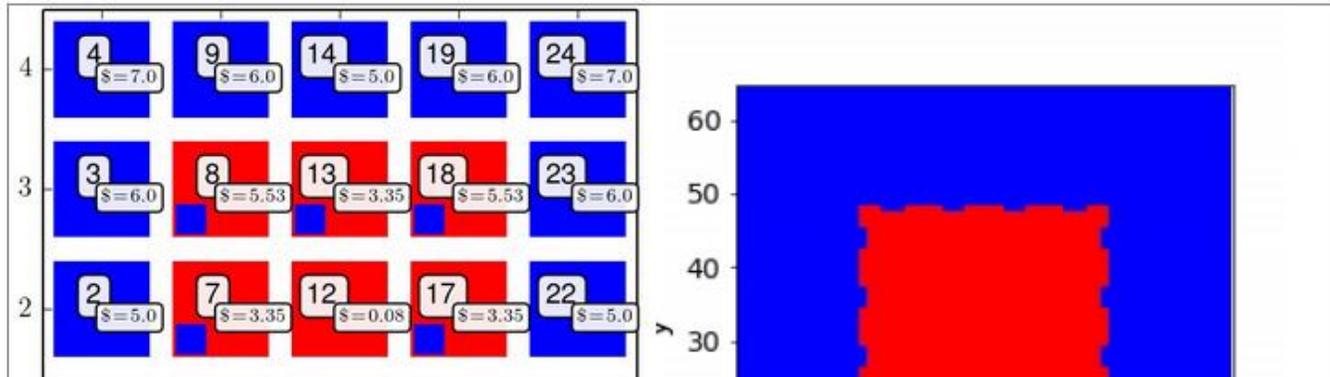
$$\begin{matrix} C & D \\ C & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & \epsilon \end{pmatrix} \\ D & \end{matrix}$$

Vorlesung 9

In dieser Vorlesung wird zunächst die zeitliche Entwicklung von räumlichen dominanten Spielen, Koordinations- und Anti-Koordinationspielen simuliert und mit den Lösungen der deterministischen evolutionären Spieltheorie verglichen. Danach wird die zeitliche Entwicklung der Strategiewahl der Population auf unterschiedlichen Netzwerktopologien analysiert.

Dominante räumliche Spiele

Wir betrachten zunächst ein räumliches, leicht dominantes Spiel mit der im rechten Panel angegebenen Auszahlungsmatrix und wählen als Anfangskonfiguration der Strategiewahl der Spielerpopulation eine Konstellation, bei der nur ein Spieler die dominante rote Strategie spielt und alle anderen Spieler die blaue Strategiewahl. Die Simulationen zeigen, dass $\forall 1 < c < 1.2$ in der zweiten Spielperiode ein Rechteck aus 9 roten Knoten entsteht, welches aber dann schon in der dritten Spielperiode wieder in einen einzelnen roten Zentrums-knoten übergeht. Die linke untere Abbildung zeigt die räumliche Spielkonstellation zu diesem Zeitpunkt ($c = 1.1$), wobei die eingezeichneten $\$$ -Werte den erzielten kumulierten Auszahlungswerten der Spieler entsprechen und die kleinen Vierecke innerhalb der großen Vierecke die zukünftige Strategiewahl der Spieler in der nächsten Spielperiode angeben.



Vorlesung 9

Die Verknüpfung der Theorie der komplexen Netzwerke mit der evolutionären Spieltheorie wird in dieser Vorlesung an mehreren Beispielen gezeigt. Die Entscheidungsprozesse der Spieler auf einem komplexen Netzwerk können mittels numerischer, agenten-basierter Computerprogramme simuliert werden.

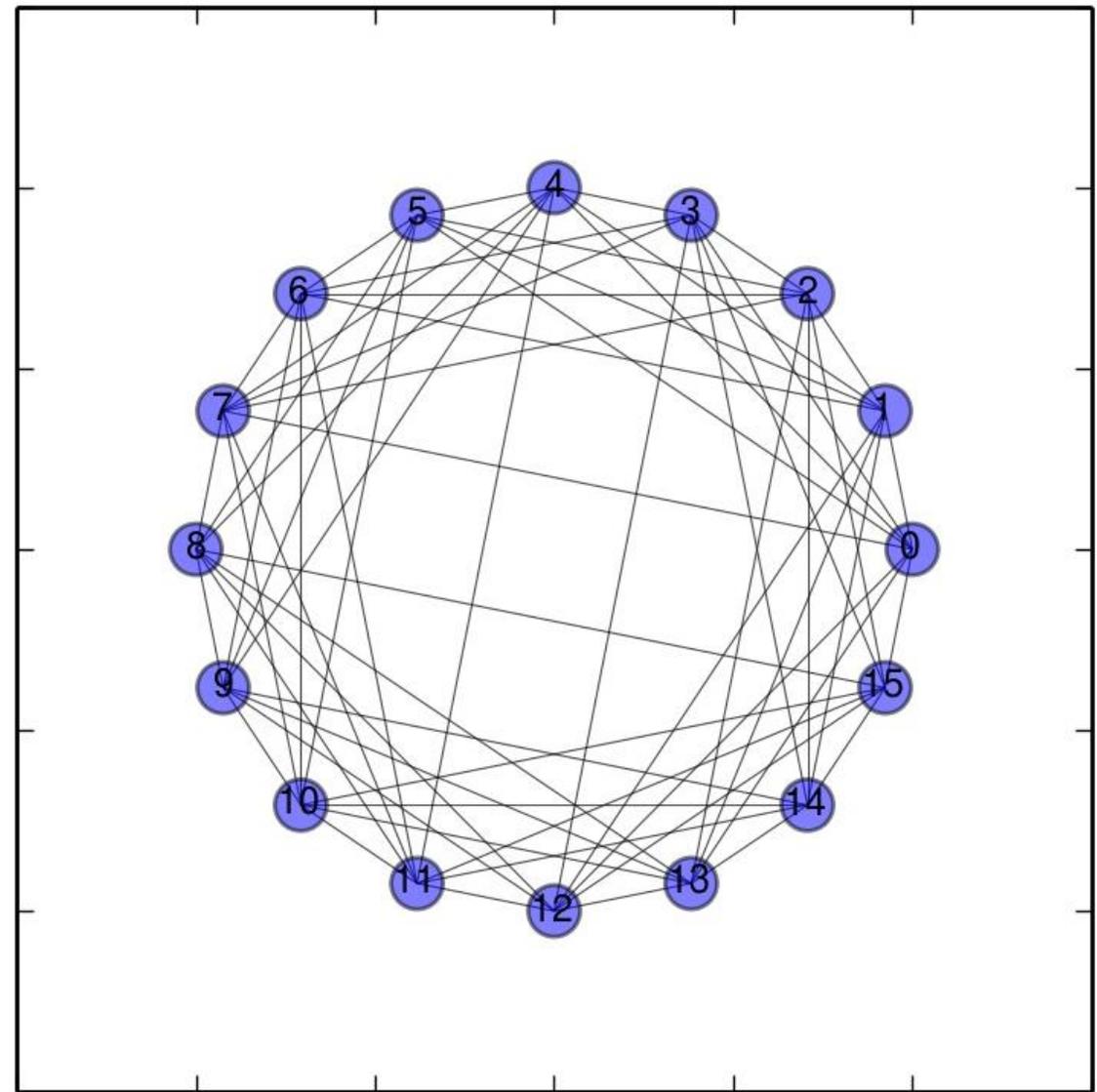
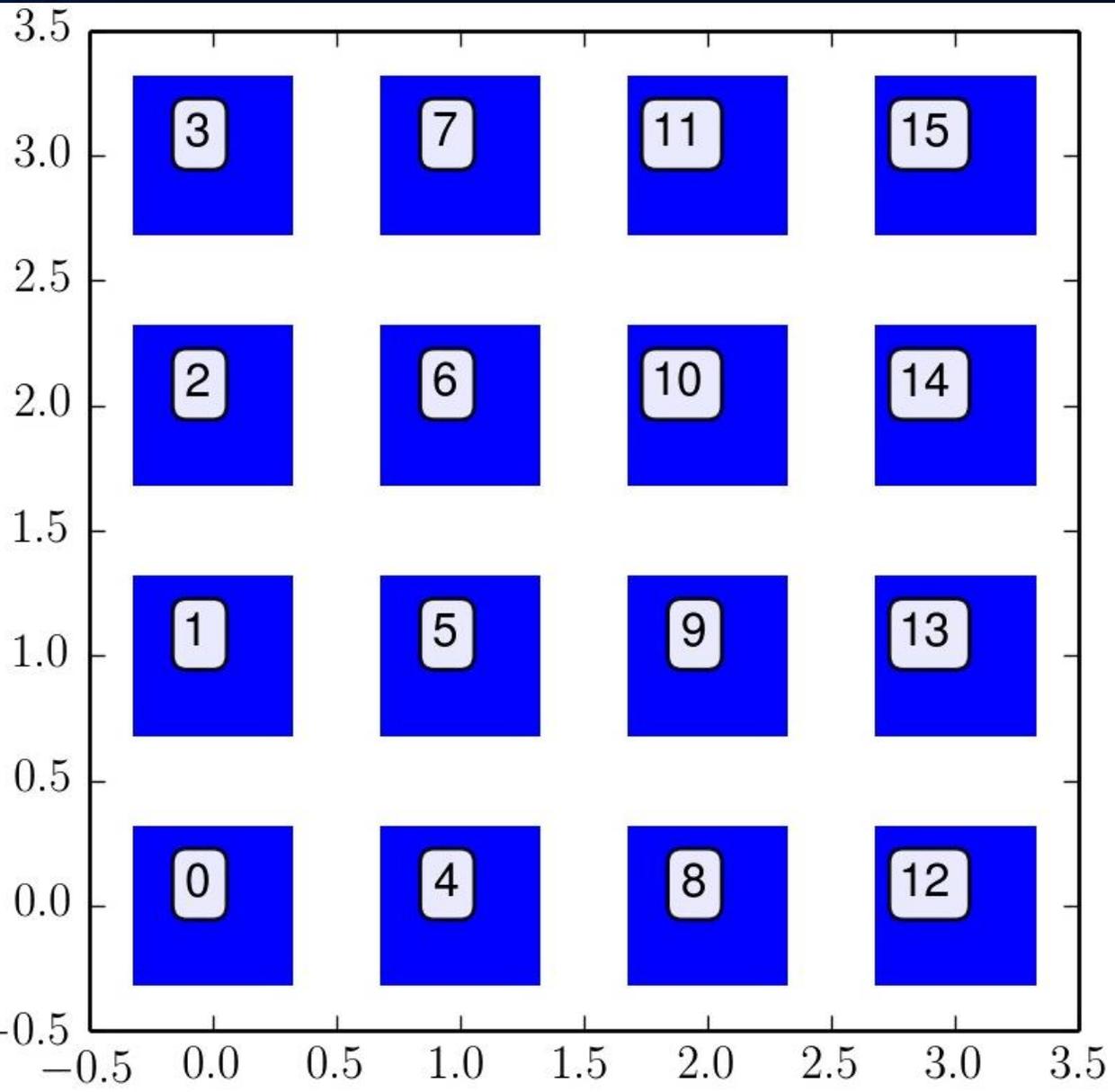
Wir betrachten zunächst ein evolutionäres räumliches Spiel (siehe Spatial Games), wobei die Spieler einer endlich großen Population auf einem räumlichen Gitter angeordnet und jeder Spieler nur mit seinen nächsten Nachbarn spielen kann (*Moore Nachbarschaft*). Das zugrundeliegende Netzwerk der Spielerknoten besitzt somit eine reguläre Struktur und im betrachteten 2-dimensionalen Fall spielt jeder Spieler pro Spielperiode mit acht Spielern (Knotengrad $k_i = 8 \forall i \in \mathcal{I}$).

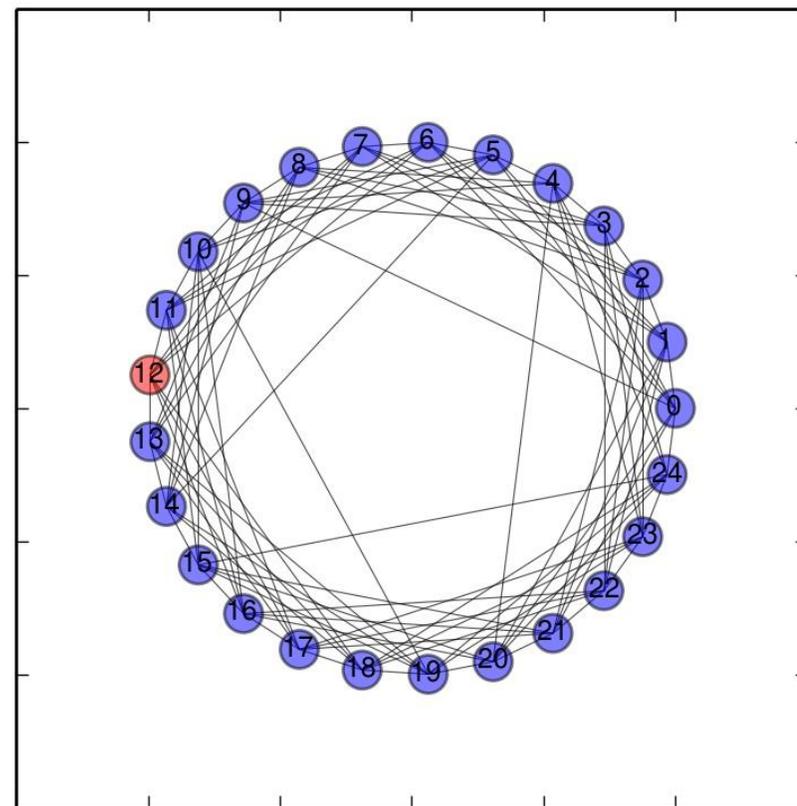
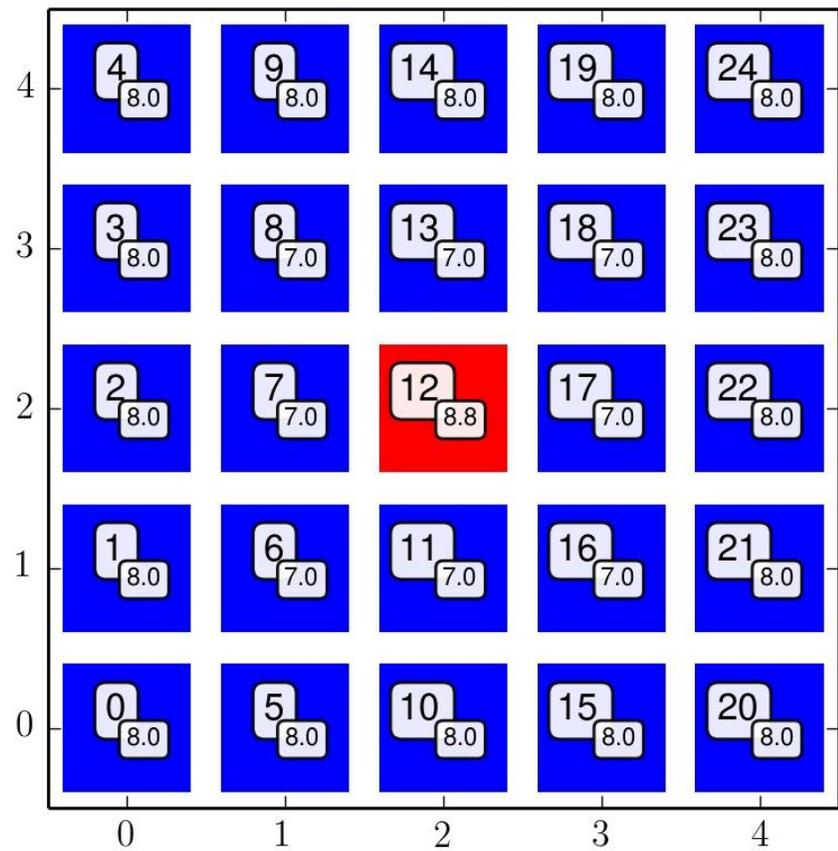
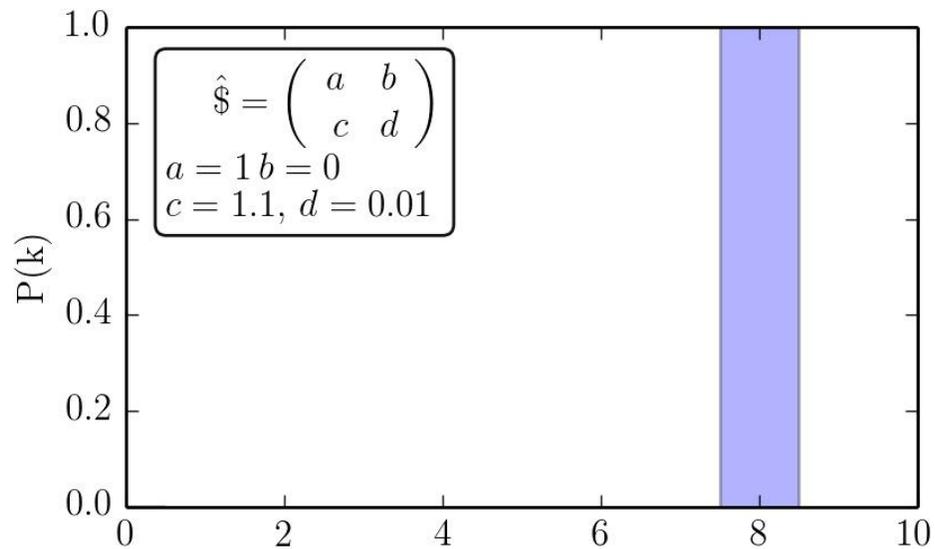
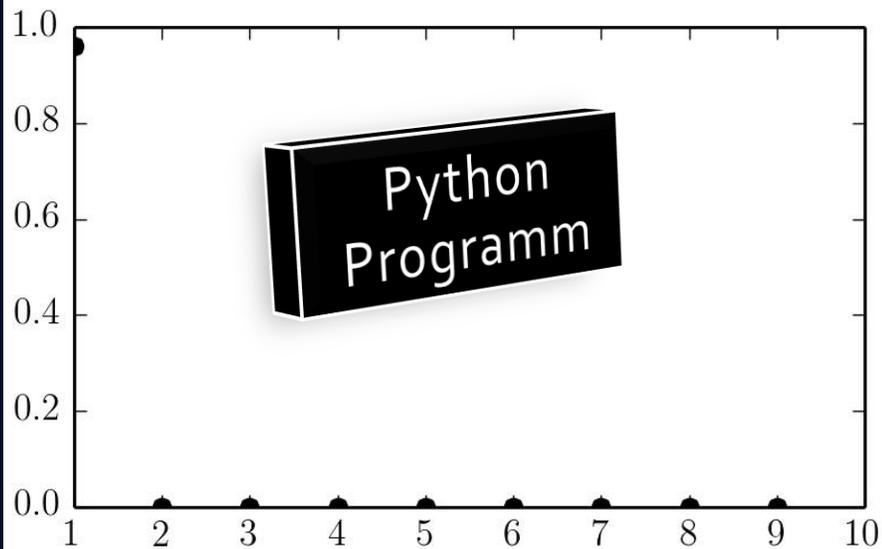
	Spieler B Strategie 1	Spieler B Strategie 2
Spieler A Strategie 1	(1, 1)	(0, c)
Spieler A Strategie 2	(c, 0)	(0.01, 0.01)

Wir beschränken uns im Folgenden auf symmetrische 2x2-Spiele und in diesem linken Panel der Vorlesung betrachten wir im Speziellen ein 'leicht' dominantes Spiel mit nebenstehender

Auszahlungsmatrix. Es handelt sich bei diesem Spiel um eine Version des Gefangenendilemmas, wobei der Parameter $c > 1$ die Stärke der Dominanz

Moore's Neighborhood





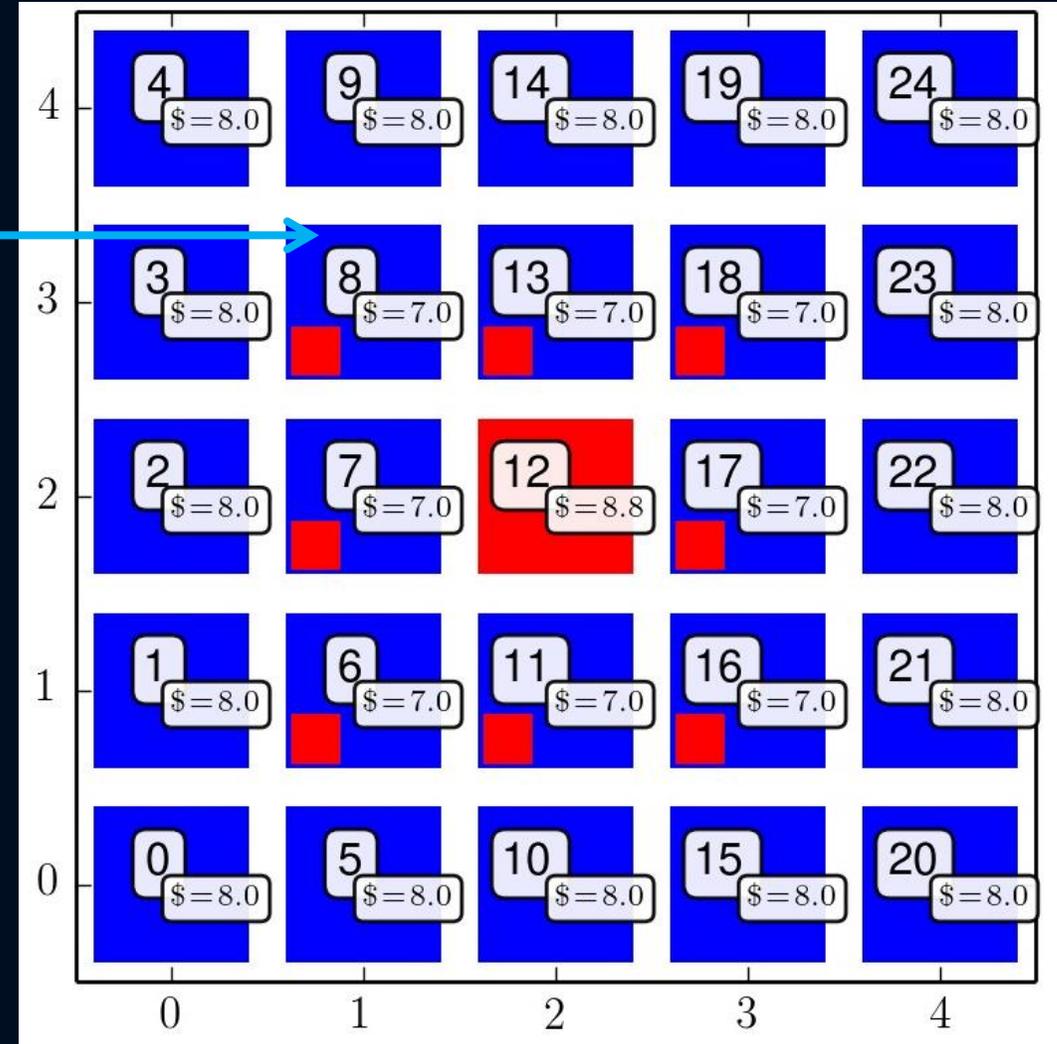
Betrachtetes Gefangenendilemma-ähnliches (2x2)-Spiel

	Spieler B Strategie 1	Spieler B Strategie 2
Spieler A Strategie 1	$(1, 1)$	$(0, c)$
Spieler A Strategie 2	$(c, 0)$	$(0.01, 0.01)$

The diagram shows a 2x2 game matrix with four strategy combinations. The top-left cell (1, 1) is light gray, the top-right cell (0, c) is light gray, the bottom-left cell (c, 0) is light gray, and the bottom-right cell (0.01, 0.01) is dark gray. Four blue curved arrows form a clockwise cycle: from (1, 1) to (0, c), from (0, c) to (0.01, 0.01), from (0.01, 0.01) to (c, 0), and from (c, 0) back to (1, 1).

Python Programm Spatial Games

In diesem Python Programm wird die Menge der Spieler (hier $N=24$) auf einem 2D-Gitter mit Moorschen Nachbarschaftsbedingungen angeordnet (siehe S:147 in M.A.Nowak, „Evolutionary Dynamics“). In jeder Iterationsperiode spielt jeder Spieler mit seinen nächsten Nachbarn ein symmetrisches (2x2)-Spiel. Am Ende einer Periode vergleicht jeder Spieler seinen Gesamtgewinn mit seinen Nachbarn und bestimmt in einem „Update Rule“ seine Strategie in der nächsten Spielperiode.



Die rechte Simulation benutzte die folgenden Werte der Auszahlungsmatrix (siehe linke Abb.): $a=1$, $b=0$, $c=1.1$ und $d=0.01$

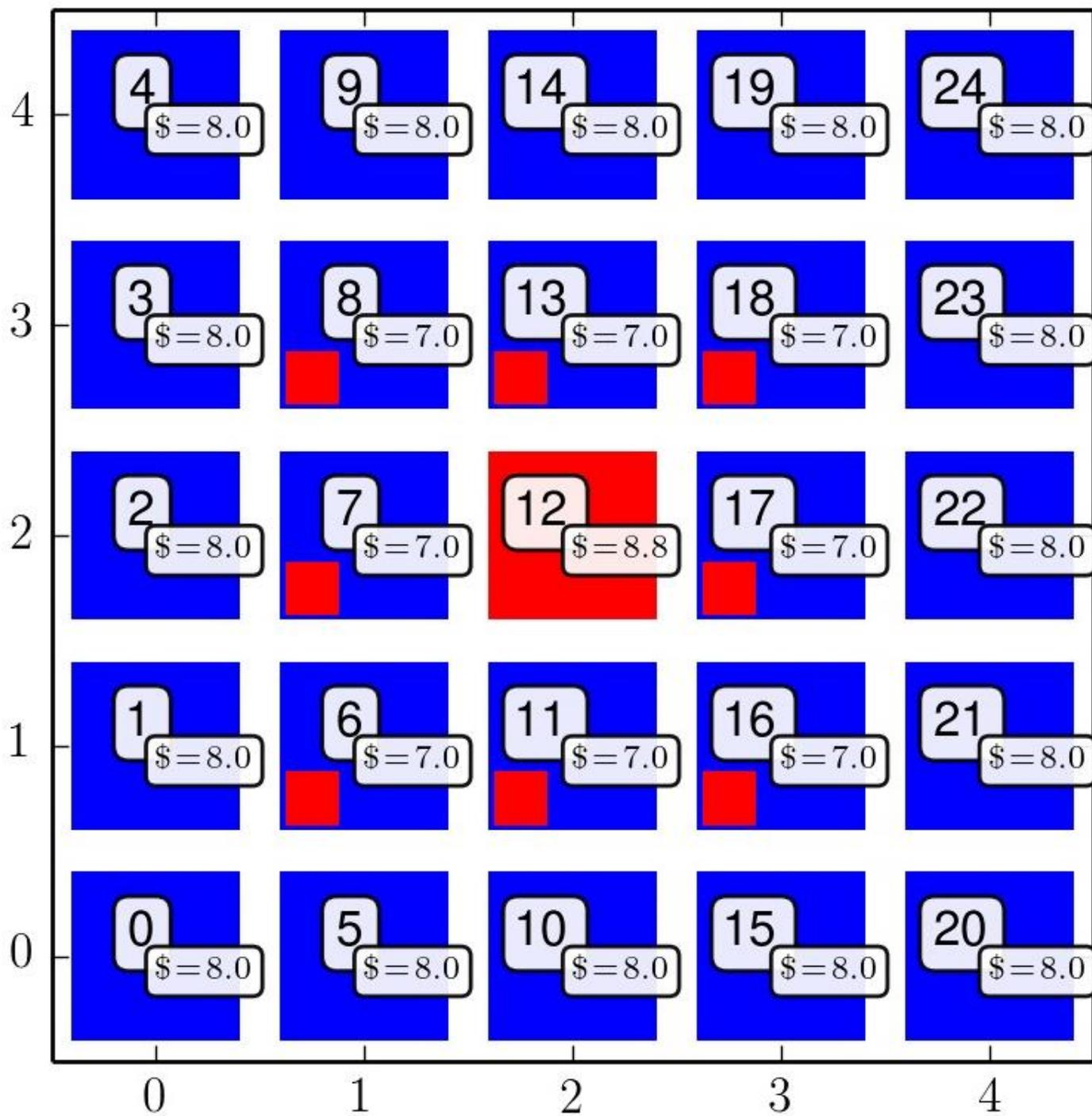
Beachte!: Definition von b und c ist in M.A.Nowak, „Evolutionary Dynamics“ vertauscht.

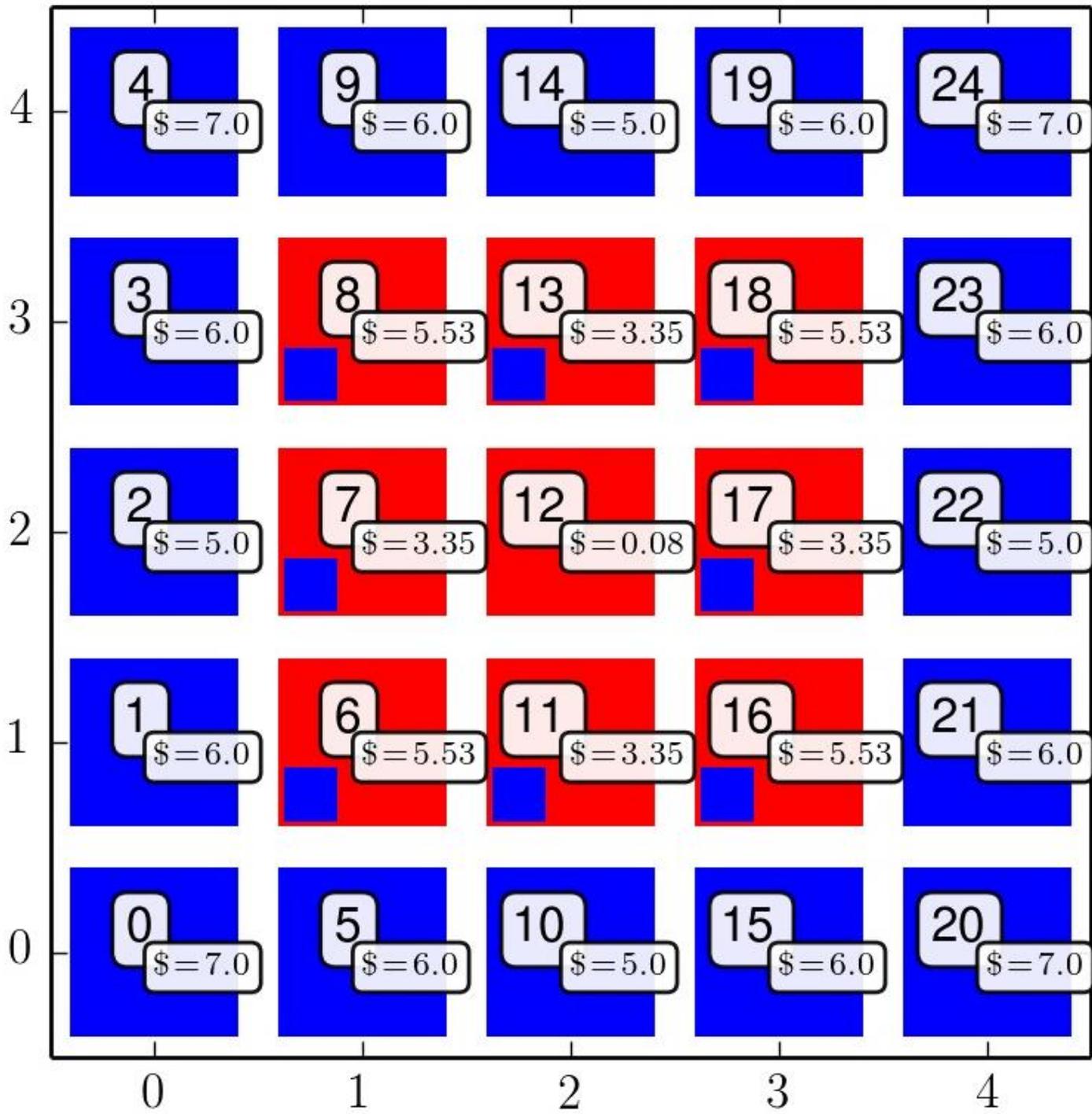
	Spieler B Strategie 1 $y=1$	Spieler B Strategie 1 $y=0$
Spieler A Strategie 1 $x=1$	(a , a)	(b , c)
Spieler A Strategie 2 $x=0$	(c , b)	(d , d)

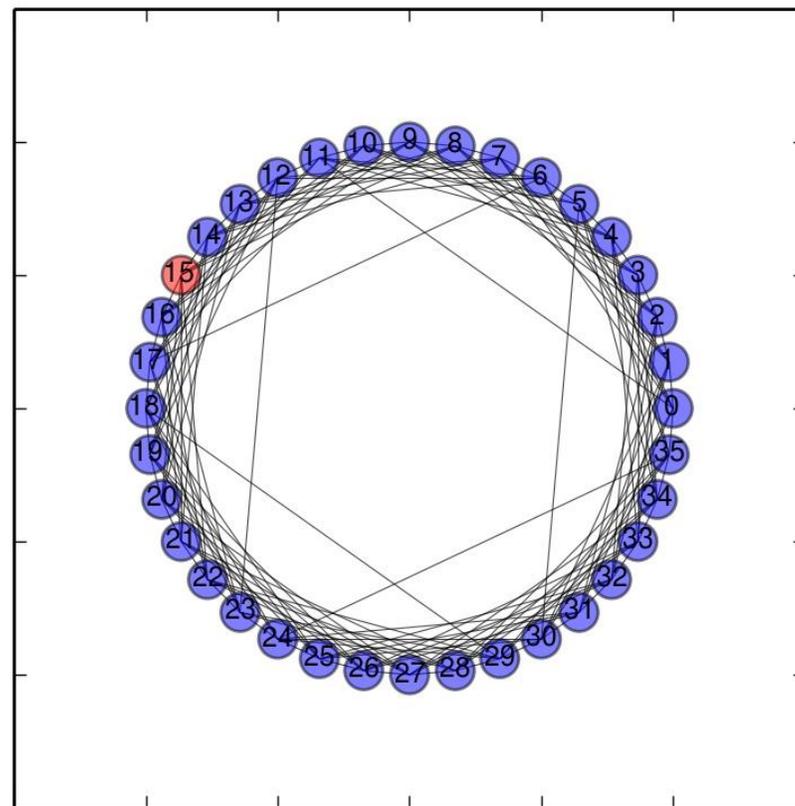
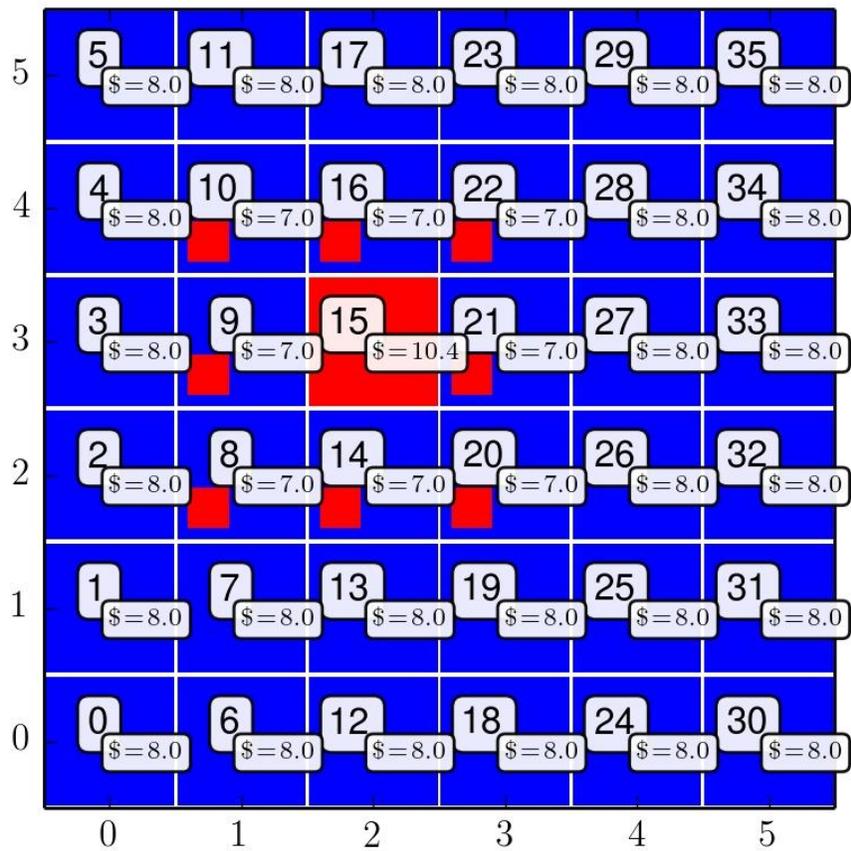
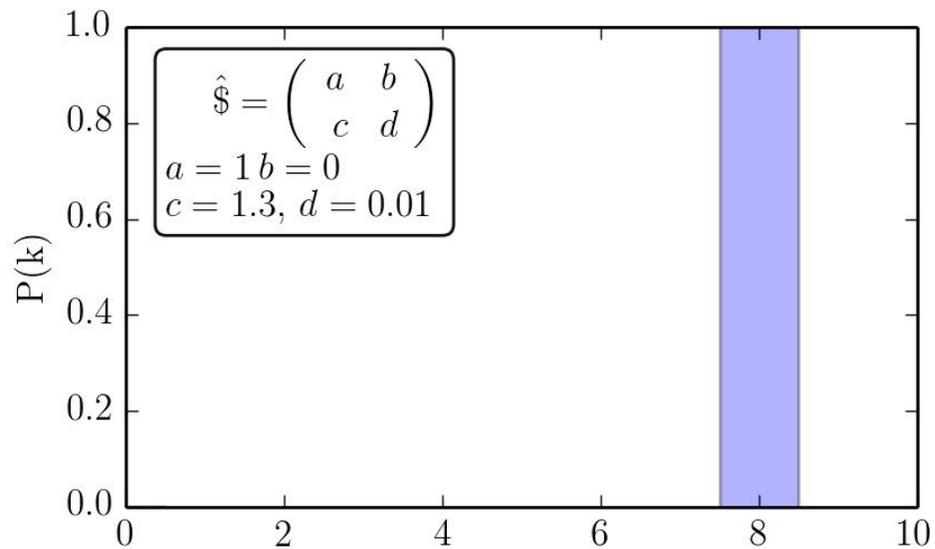
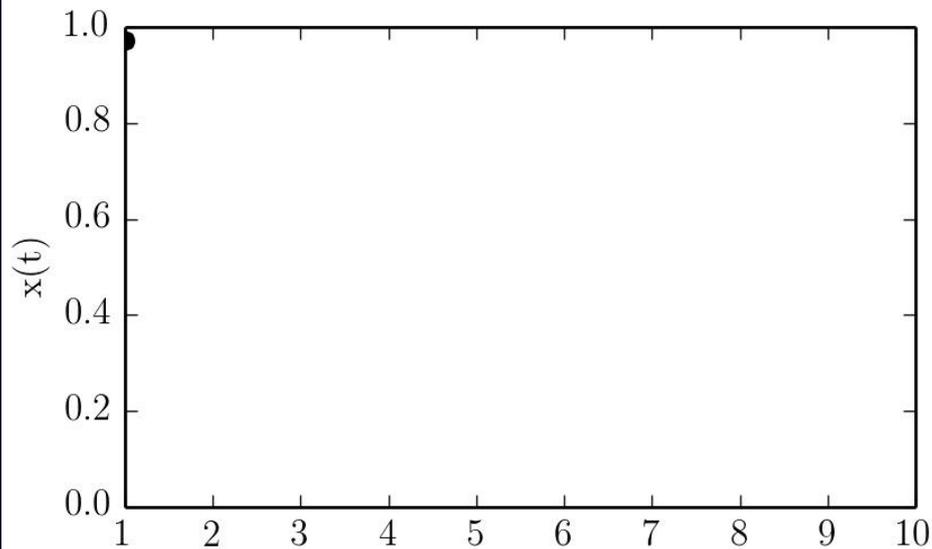
Update Rules und der Entscheidungsprozess

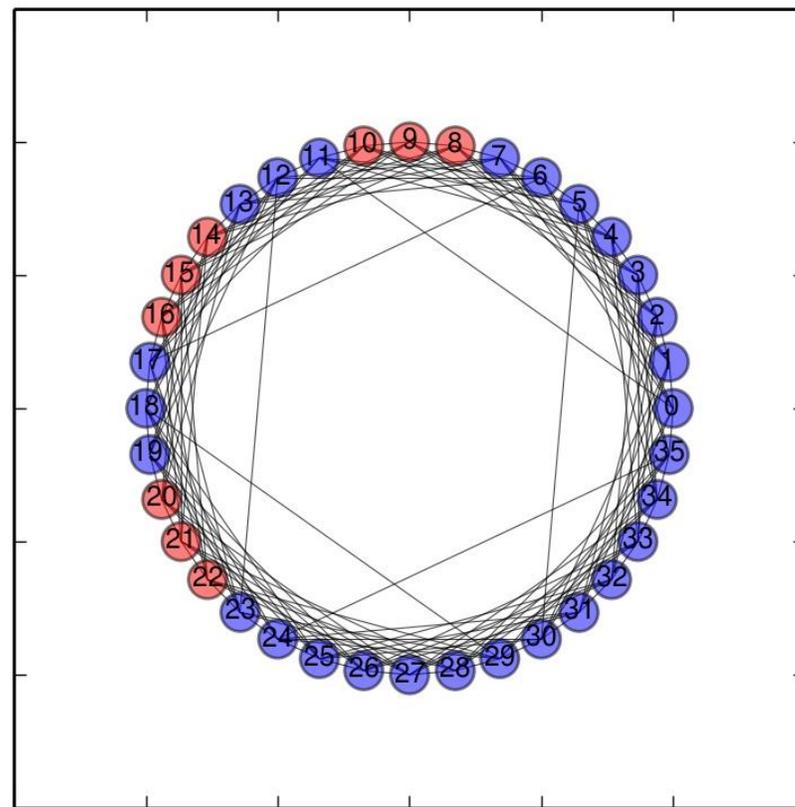
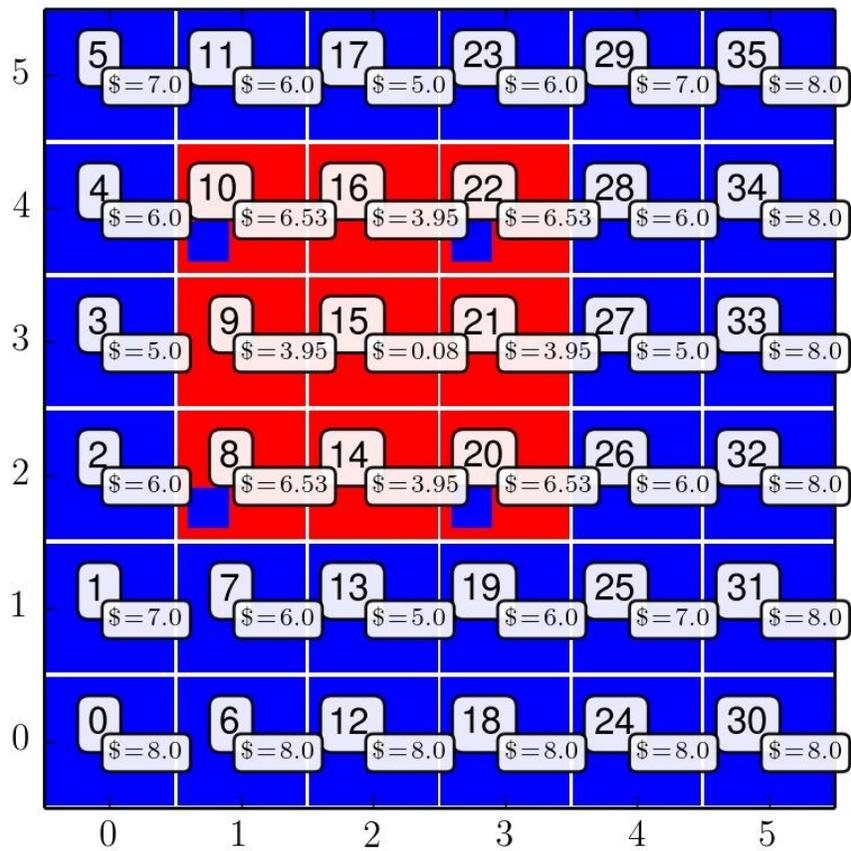
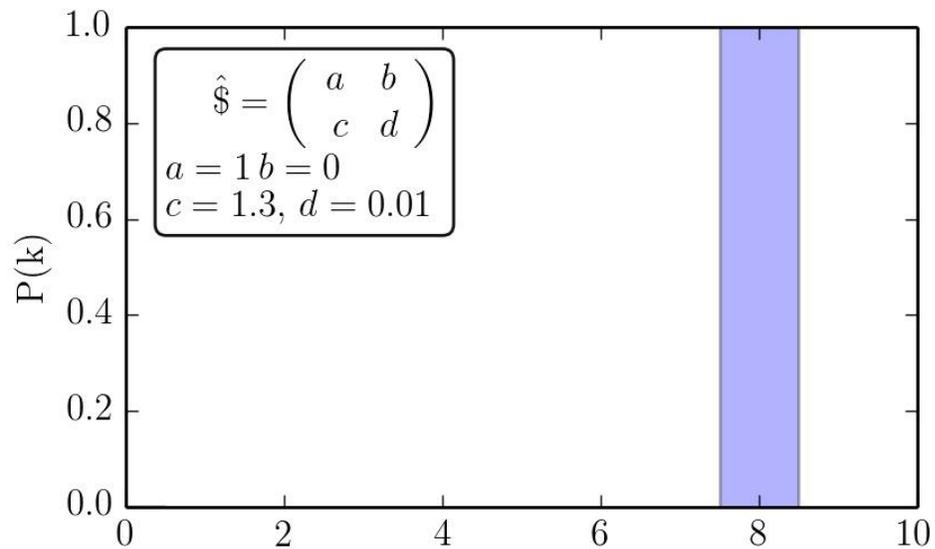
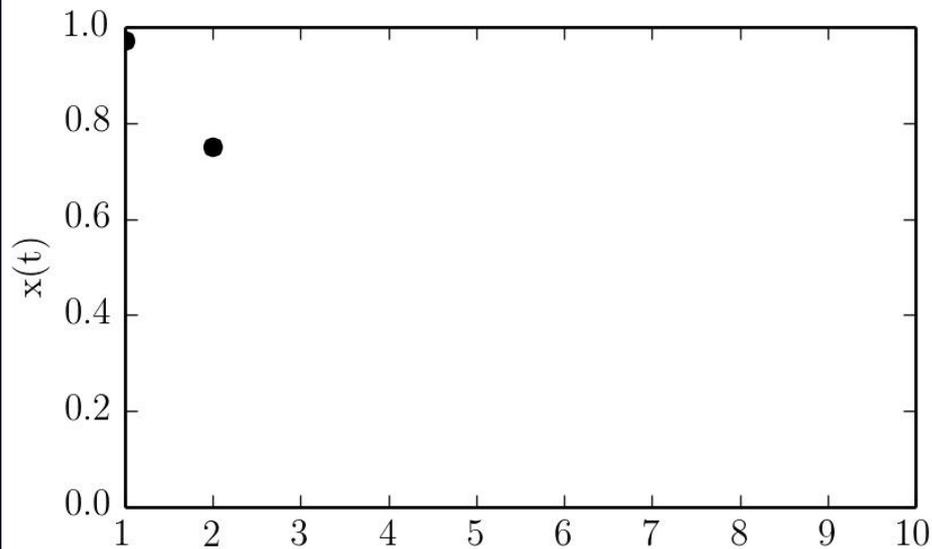
Spieler mit Knotennummer 8 hatte in der aktuellen Periode Strategie „blau“ gespielt und eine gesamte Auszahlung von $\$=7$ erhalten. Er wird in der nächsten Periode „rot“ spielen (siehe kleines rotes Kästchen), da einer seiner nächsten Nachbarn (Knoten 12) eine höhere Auszahlung als er hatte und dieser die Strategie „rot“ spielte.

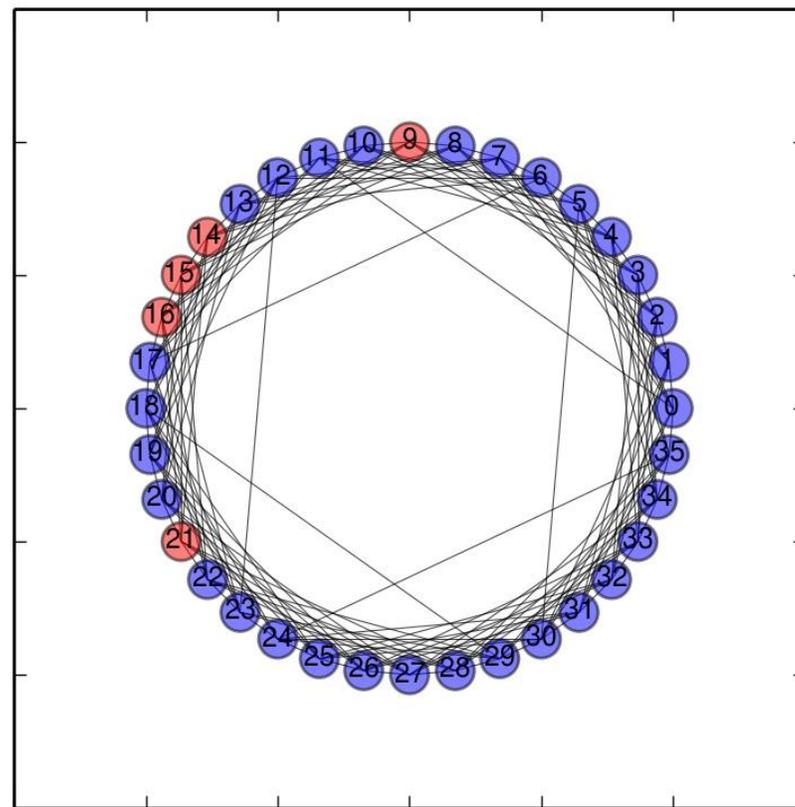
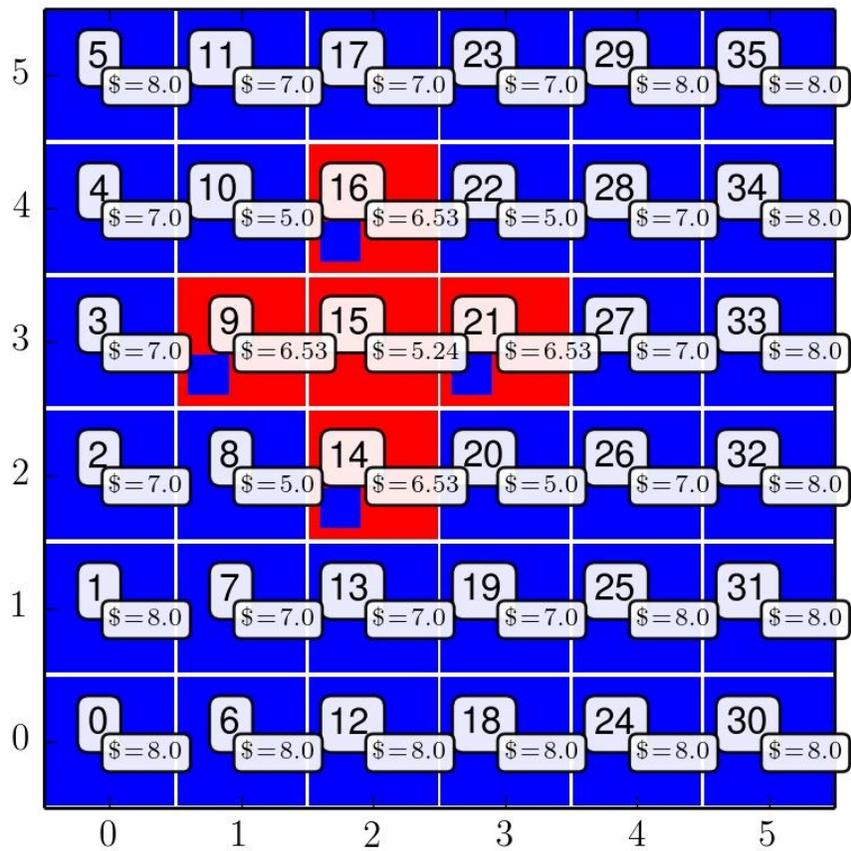
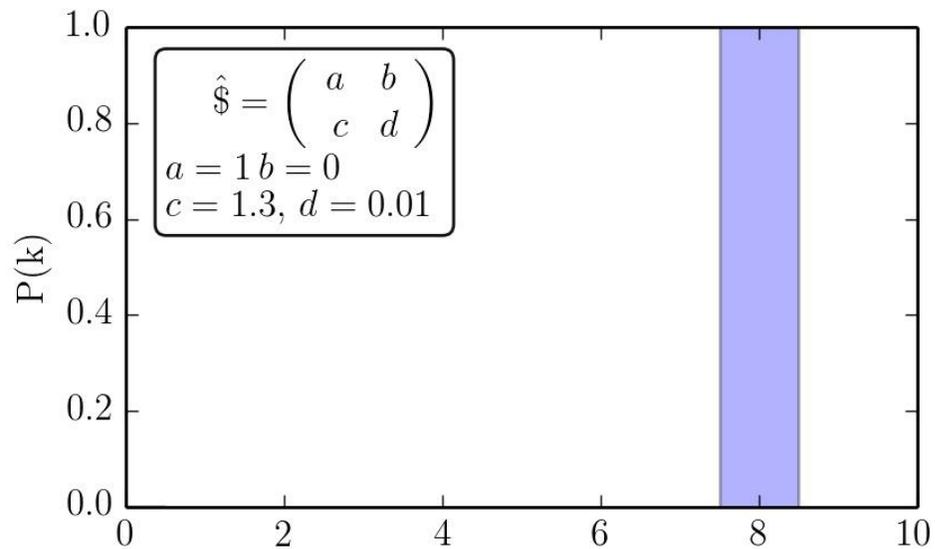
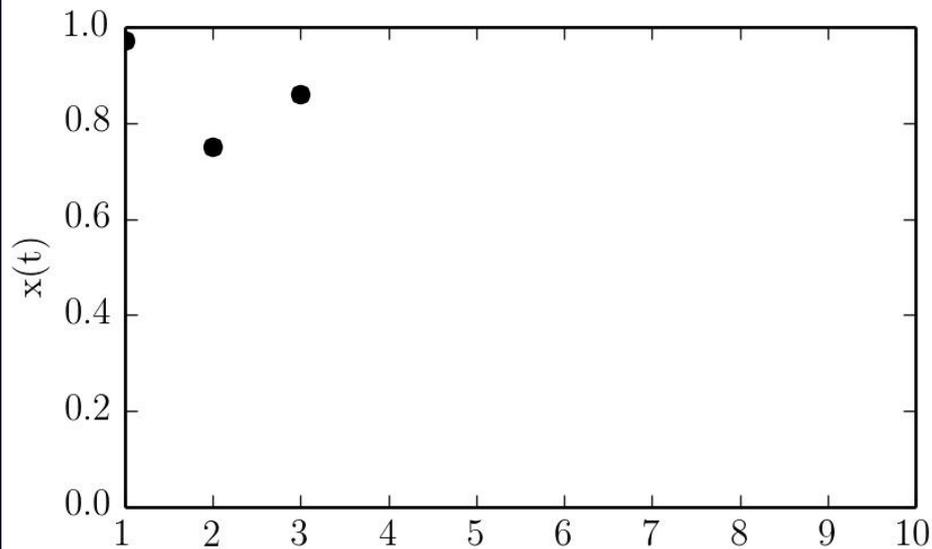
C=1.1

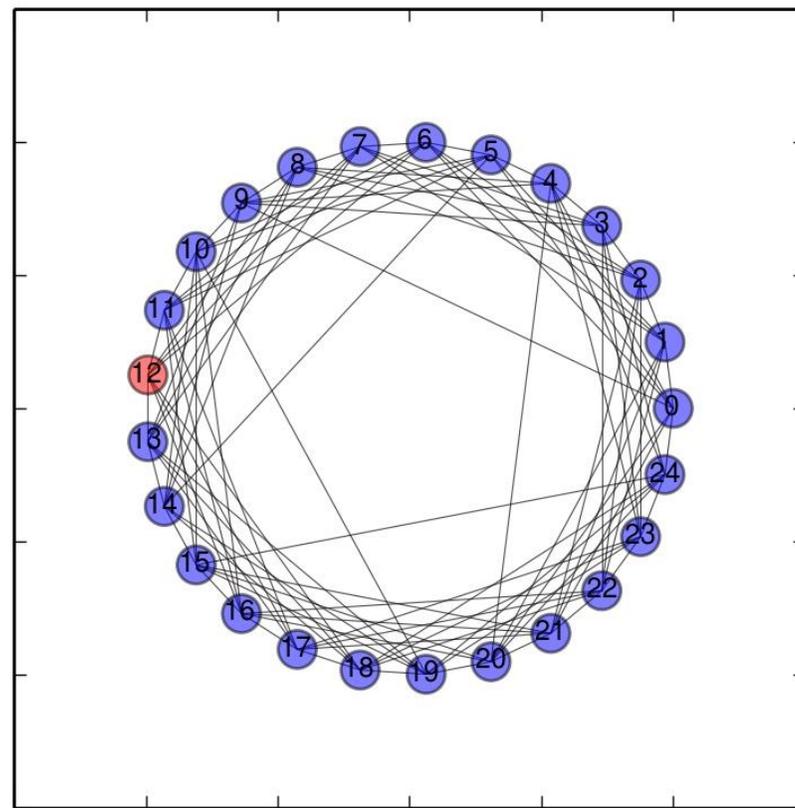
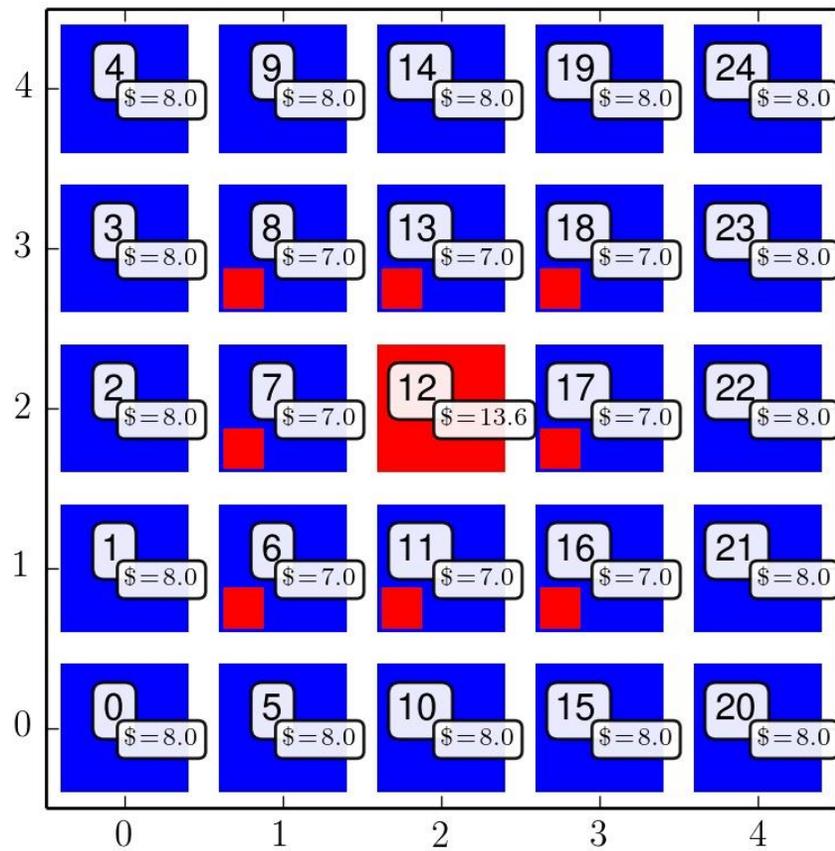
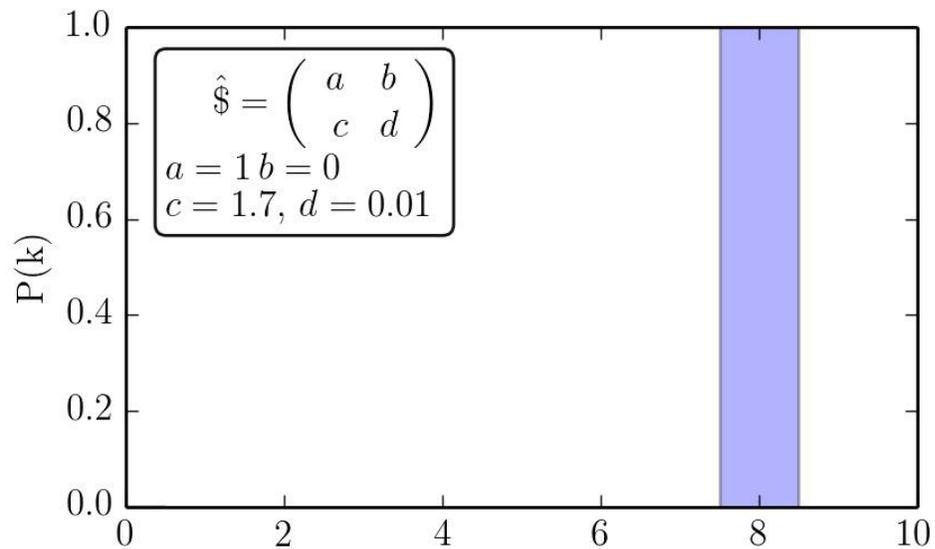
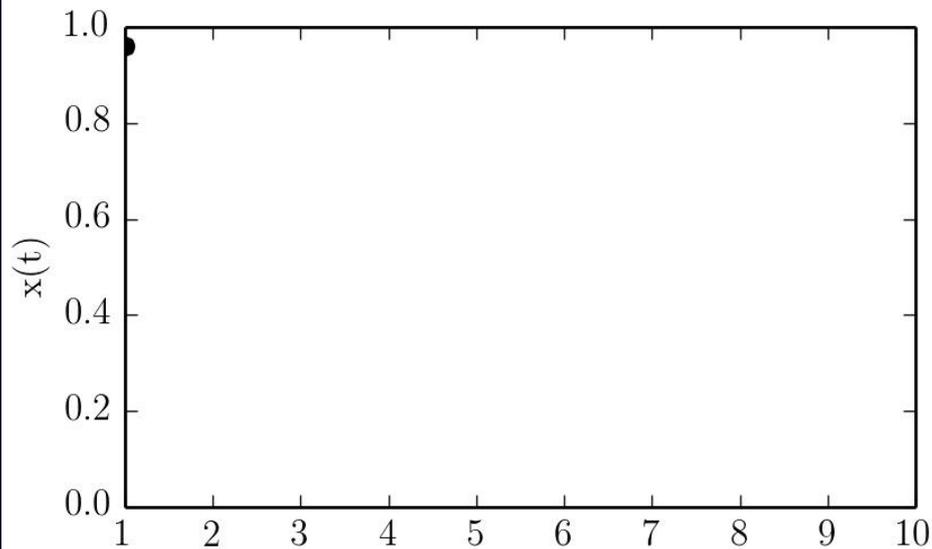


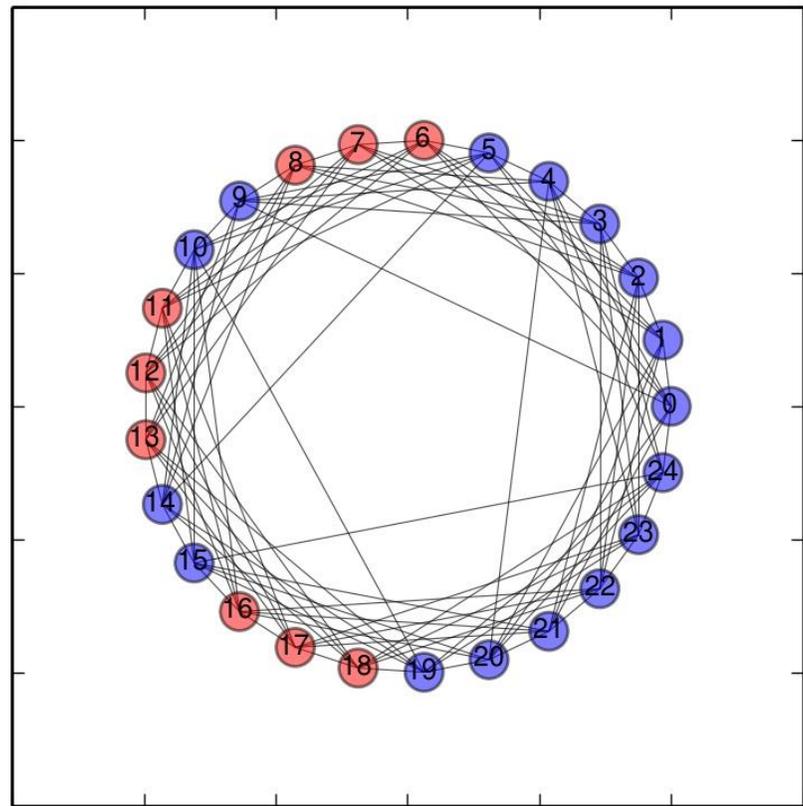
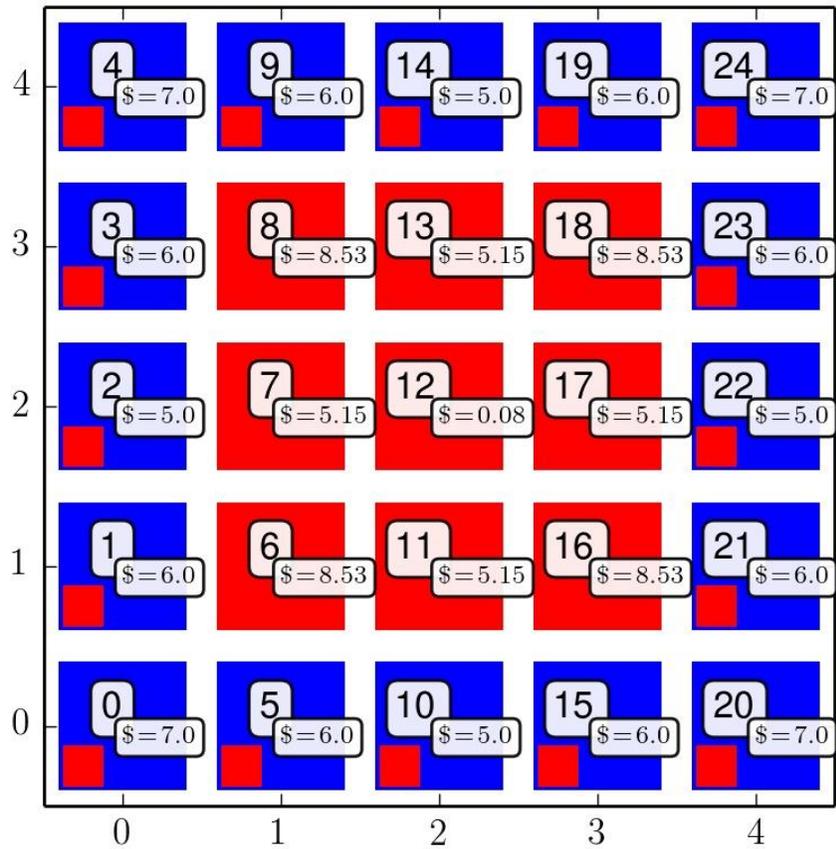
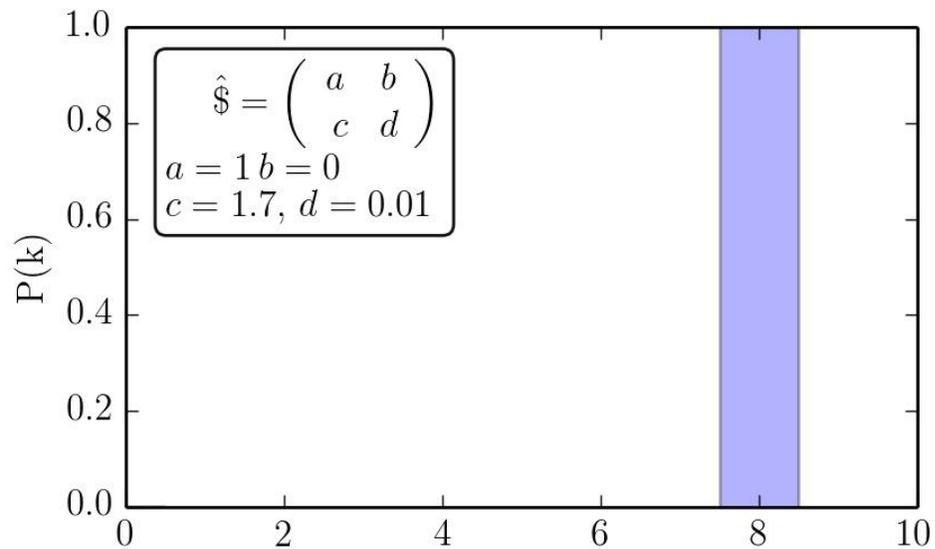
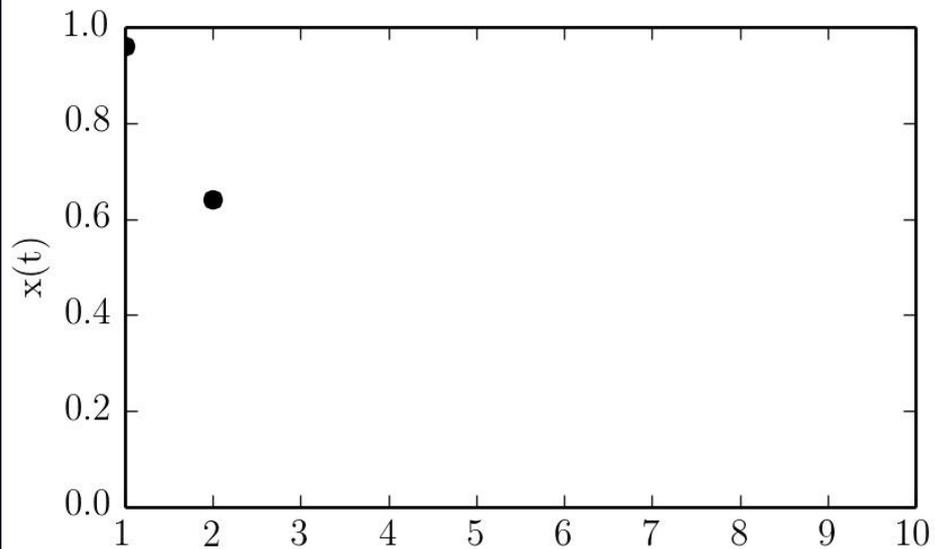


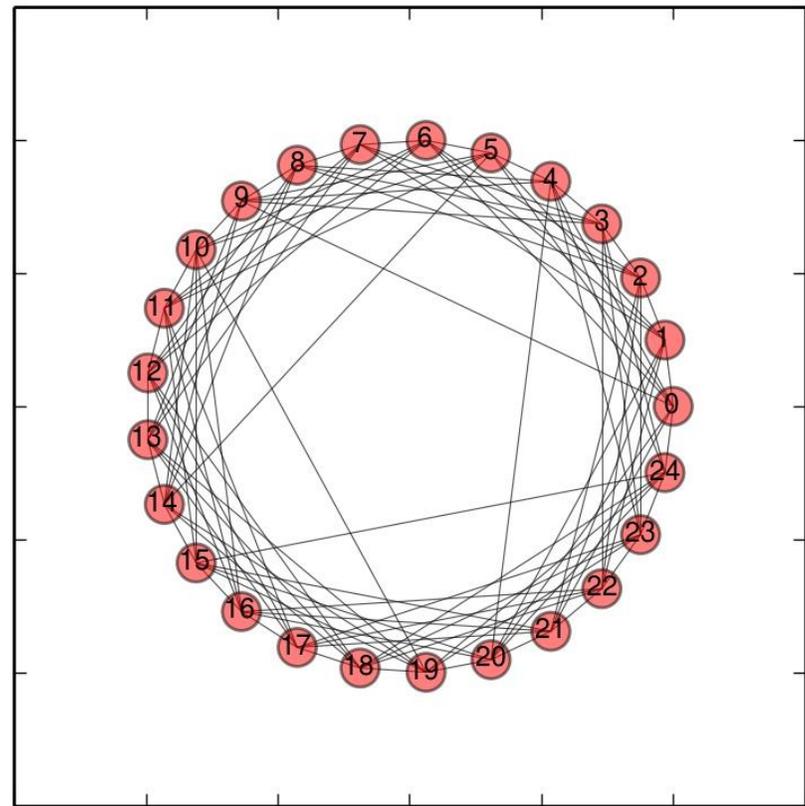
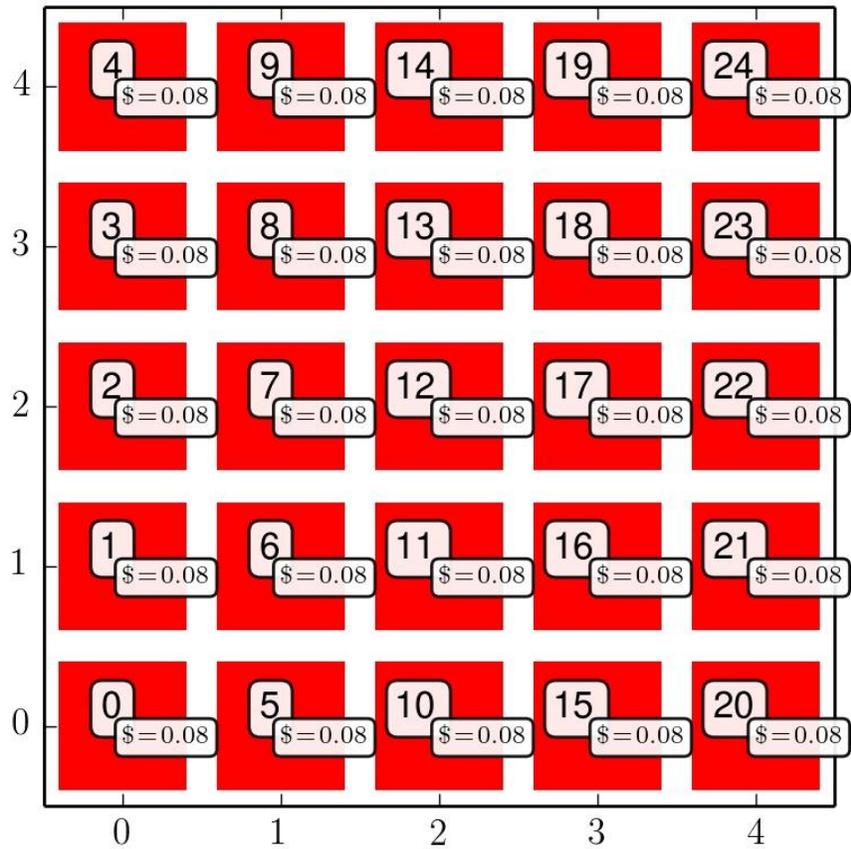
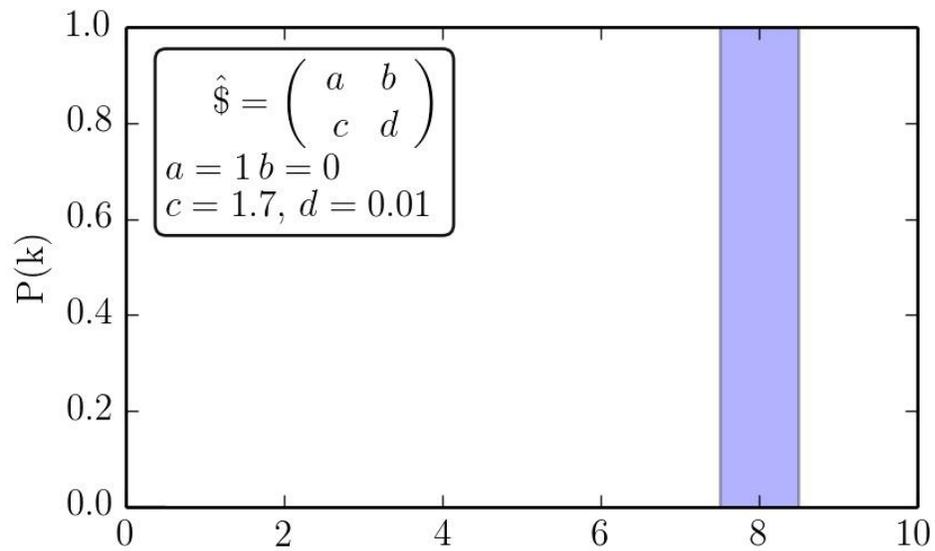
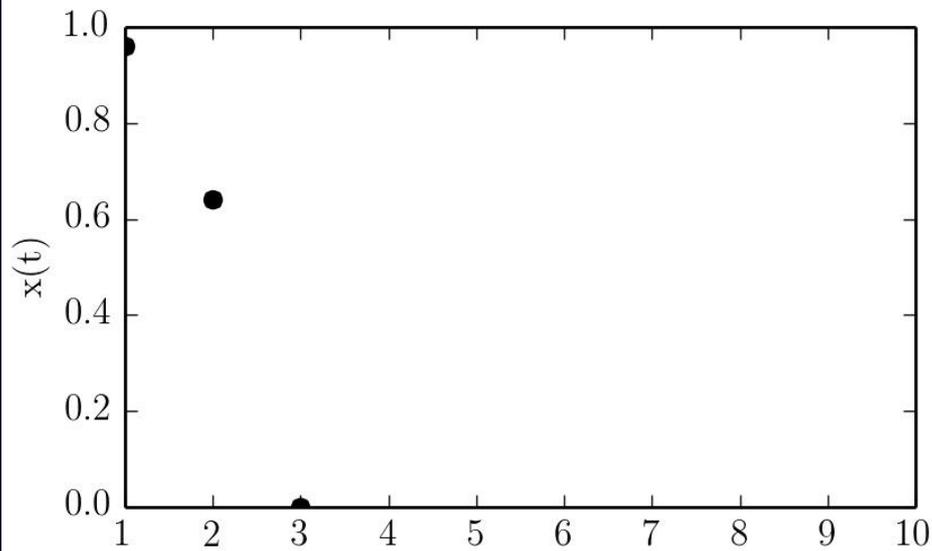




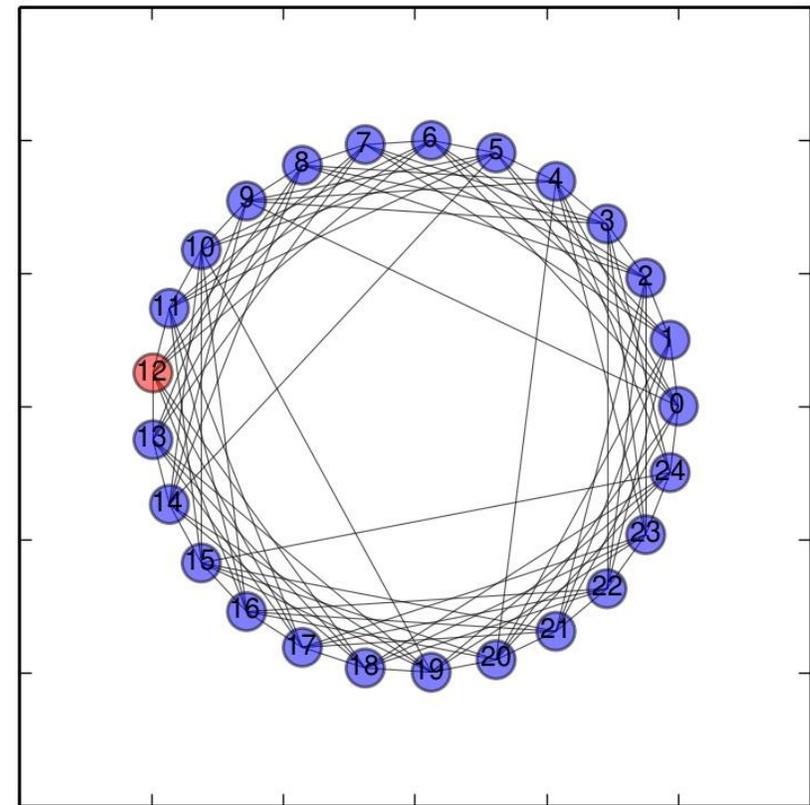
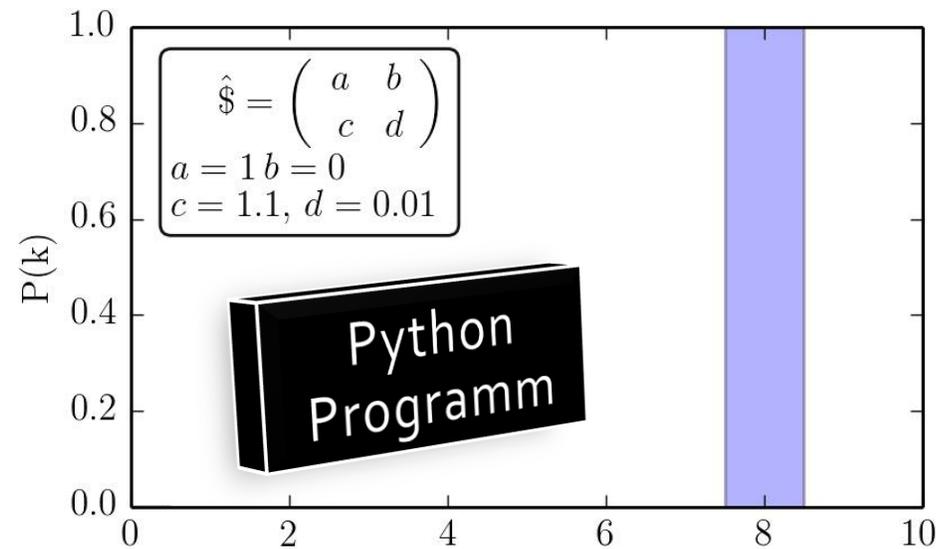
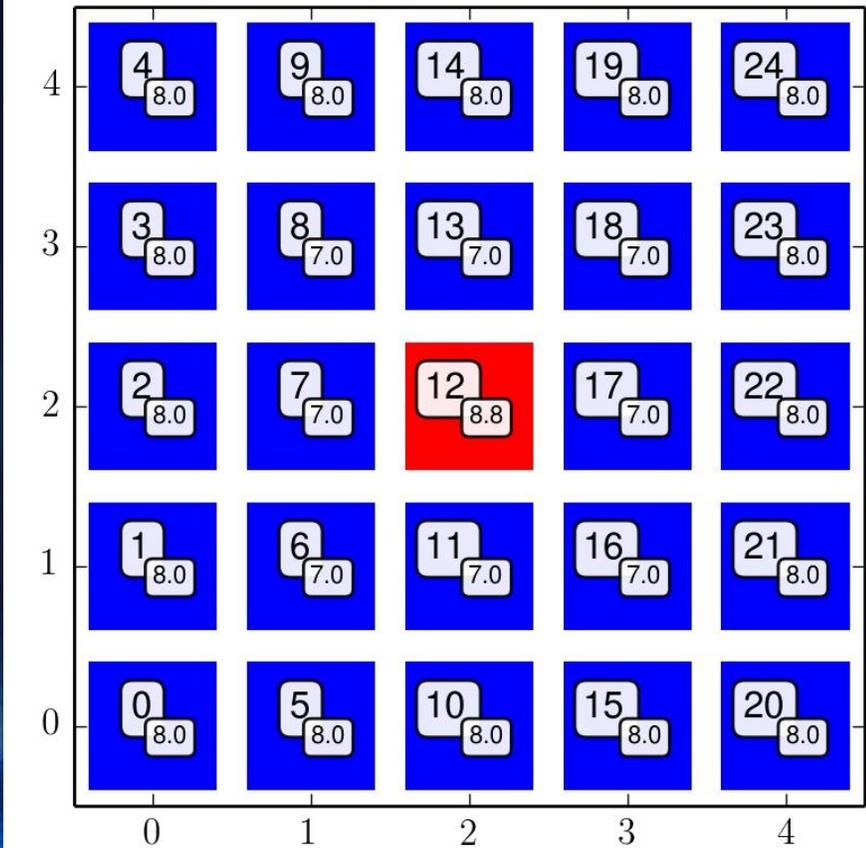




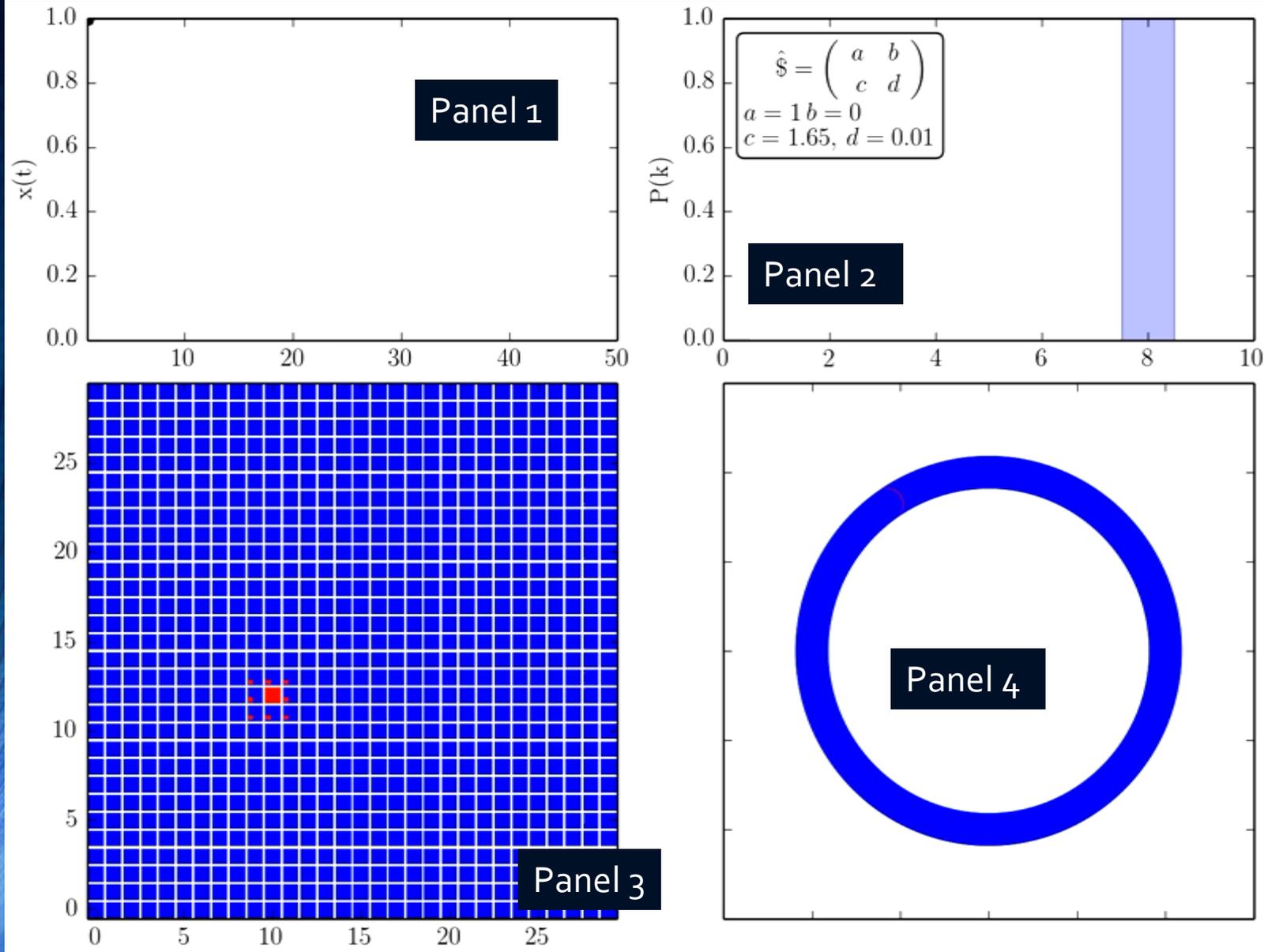




Bei größeren Spielermengen ist es vorteilhaft die Angaben des Knotengrades und die erzielte Auszahlung bei der Visualisierung nicht anzugeben. Die zukünftige Entscheidung ist hier nicht durch kleine Kästchen markiert.



Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken



Das Python Programm visualisiert in vier unterschiedlichen „Panels“ die Evolution des „Spatial Games“. In Panel 1 wird die zeitliche Entwicklung des Populationsvektors $x(t)$ veranschaulicht. Panel 2 zeigt die Verteilungsfunktion der Knotengrade $P(k)$ des zugrundeliegenden Moorschen Netzwerks. Panel 3 zeigt die Entwicklung der Strategieentscheidung der einzelnen Spielerknoten in der benutzten räumlichen Anordnung. Panel 4 veranschaulicht dagegen die Menge der Spieler in einem Kreis, geordnet nach ihrer Knotenzahl.

Neben der Auszahlungsmatrix, den implementierten Update Rules und der zugrundeliegenden Netzwerkstruktur hängt die zeitliche Entwicklung auch von den gewählten Anfangsbedingungen ab (hier wurde ein roter Spieler in einem Umfeld von blauen Spieler angeordnet).

Jupyter Notebook:
Evolutionäre räumliche Spiele
Klasse der dominanten Spiele

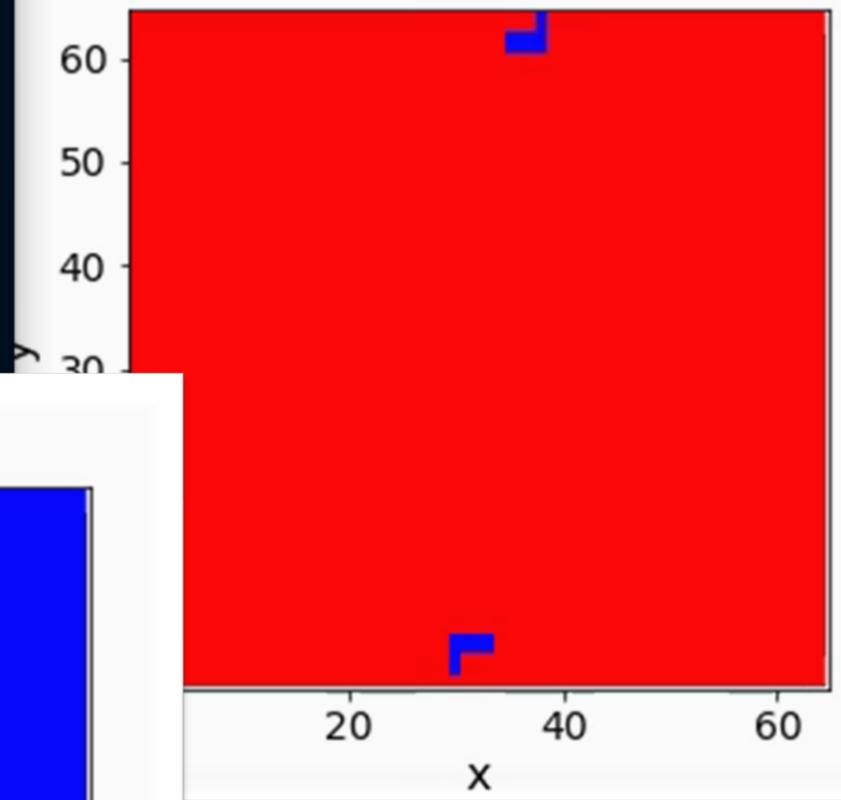
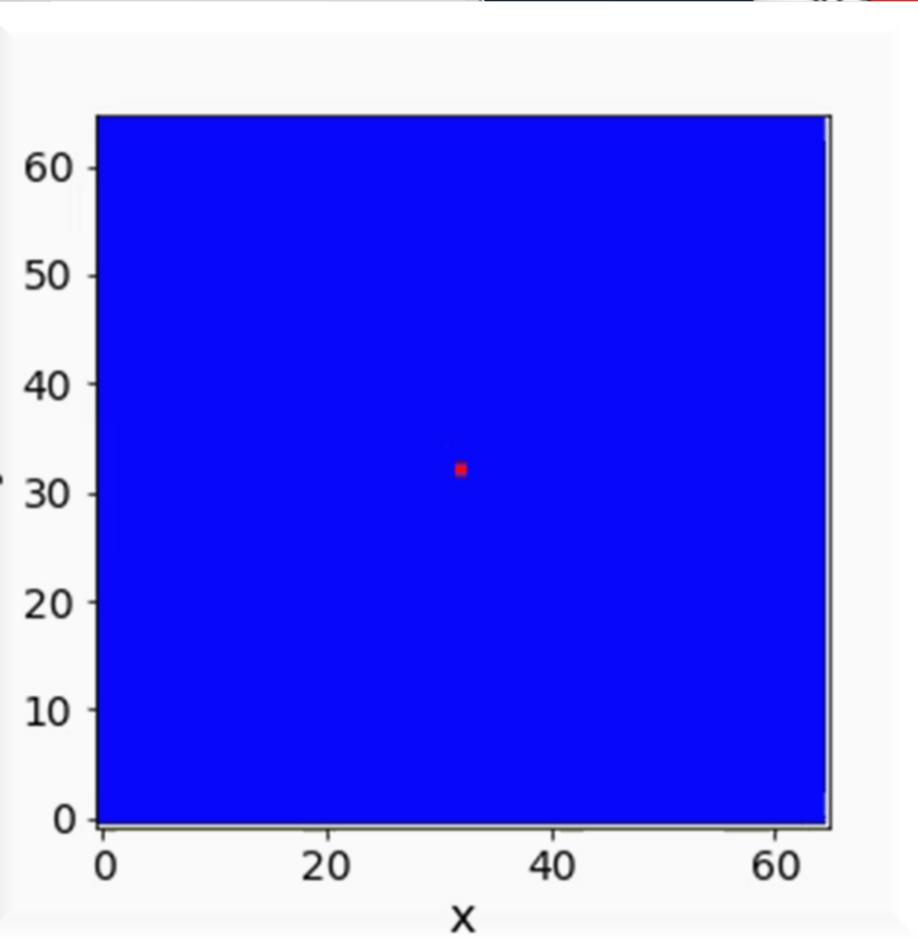
Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Wintersemester 2020/21)
von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
Frankfurt am Main 02.11.2020

Dritter Vorlesungsteil:
Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)
Beispiel: Dominante Spiele

Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II
vielversprechendes mathematisches Modell dar, welches sowohl
Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel wird die Vo



Jupyter Notebook: Evolutionäre räumliche Spiele Klasse der Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

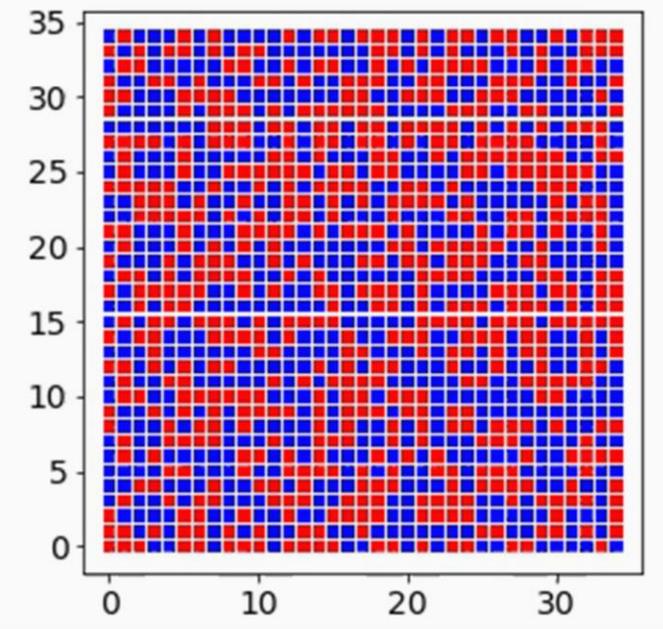
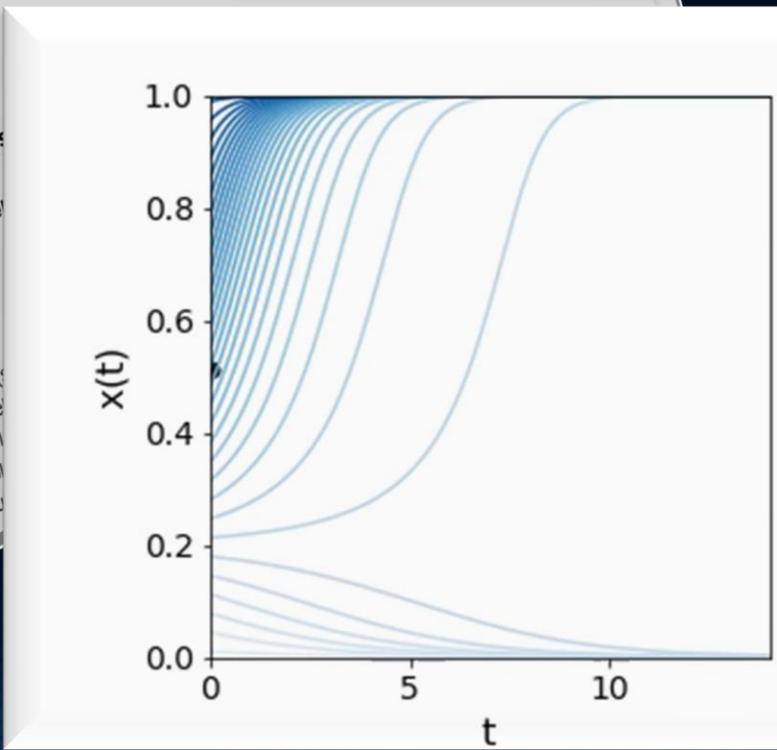
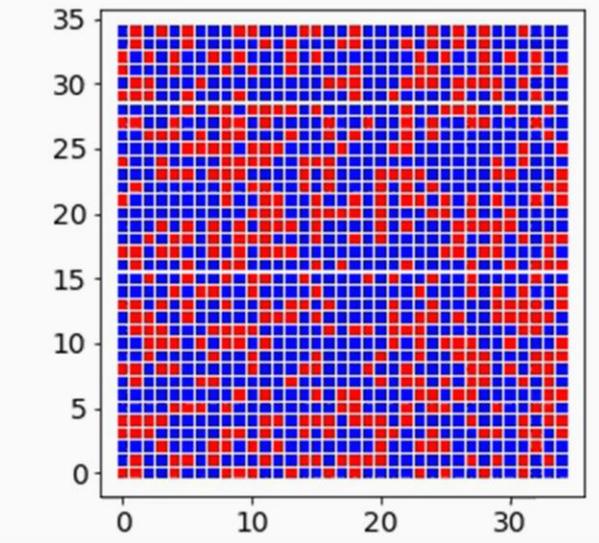
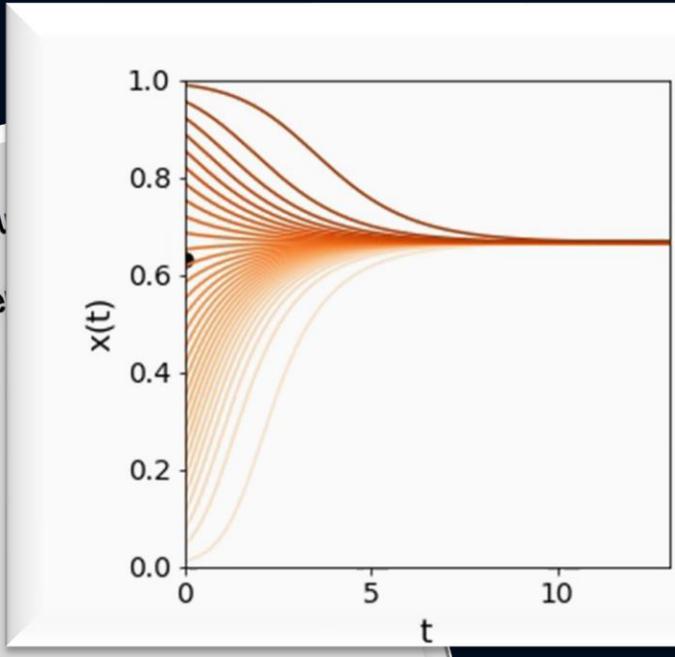
Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Wintersemester 2020/21)
von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
Frankfurt am Main 02.11.2020

Dritter Vorlesungsteil:
Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)

Beispiel: Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele

Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (network theory) mit der Theorie der evolutionären räumlichen Spiele (spatial games) wird in diesem Kapitel durch ein mathematisches Modell dargestellt, welches die Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel werden die evolutionären räumlichen Spiele (spatial games) numerisch, agenten-basierter Computersimulationen beschrieben. Die dann auf einem sozio-ökonomischen System basierenden Computersimulationen werden in den folgenden Kapiteln dargestellt.



Jupyter Notebook: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen komplexen Netzwerken

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
Frankfurt am Main 31.12.2020

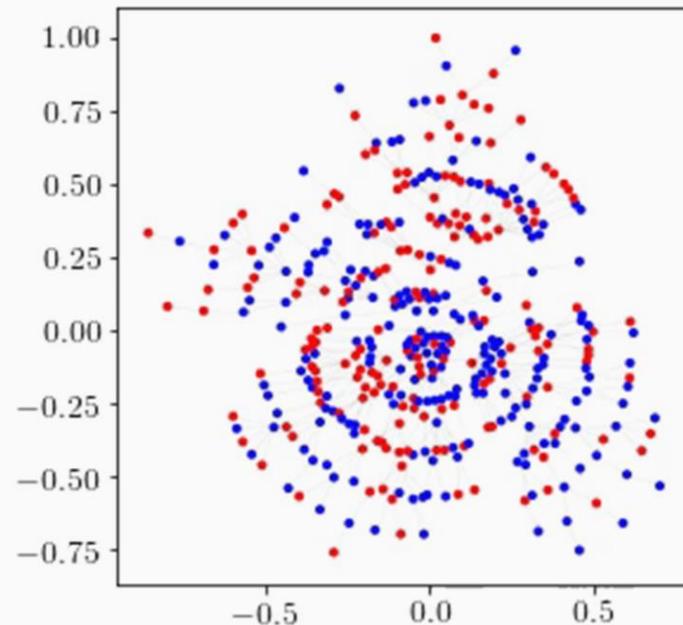
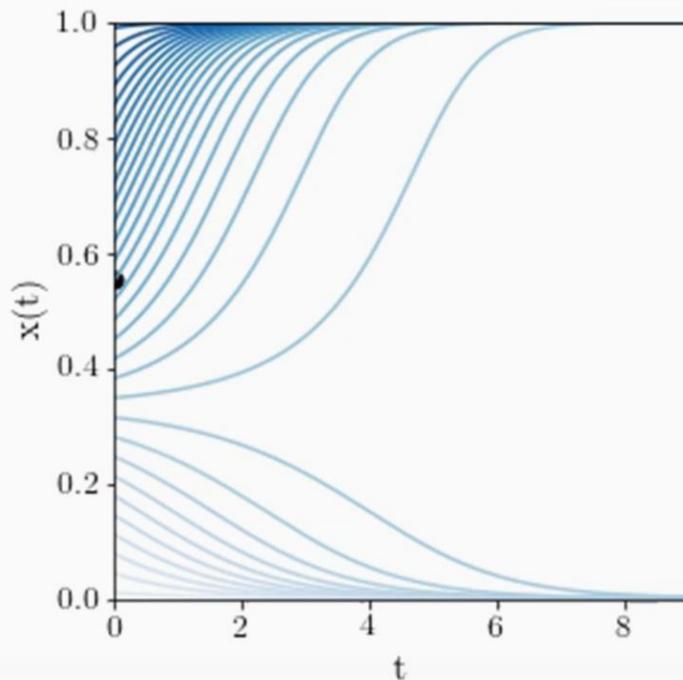
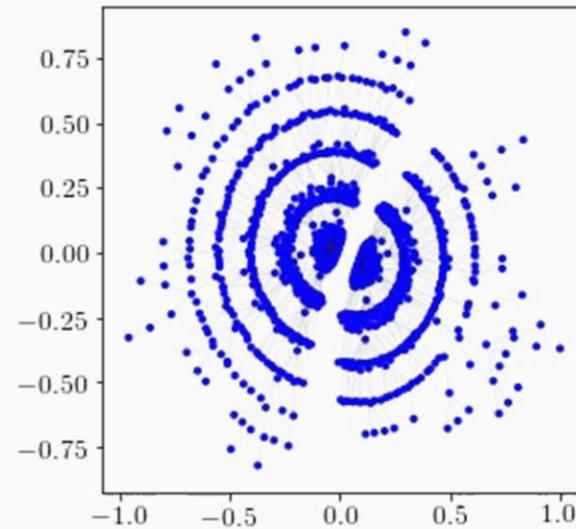
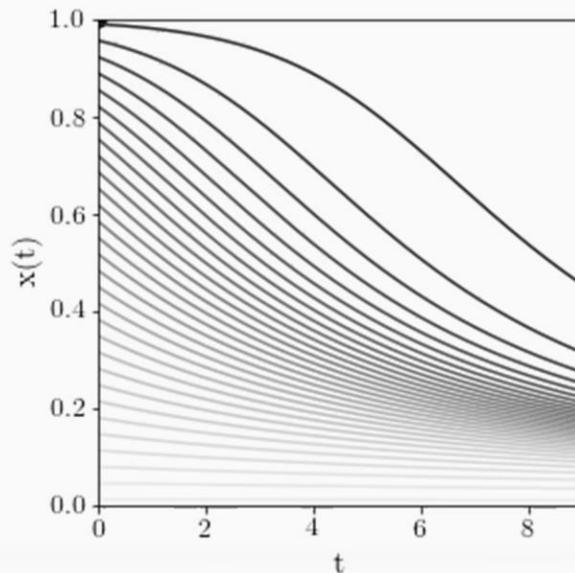
Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre Spiele auf komplexen Netzwerken

Beispiel: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-

Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II) mit der Spieltheorie dienen kann. In diesem Kapitel wird die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II) mit der Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk basierender Computersimulationen werden in den nächsten Jupyter Notebooks hatten wir die Spieltheorie mit den nächsten Nachbarn spielen kann (Moore Nachbarn). In diesem Kapitel wird die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II) mit der Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk basierender Computersimulationen werden in den nächsten Jupyter Notebooks hatten wir die Spieltheorie mit den nächsten Nachbarn spielen kann (Moore Nachbarn). In diesem Kapitel wird die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II) mit der Spieltheorie beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk basierender Computersimulationen werden in den nächsten Jupyter Notebooks hatten wir die Spieltheorie mit den nächsten Nachbarn spielen kann (Moore Nachbarn).



Vorlesungsprojekte

In den Vorlesungs- und Übungsterminen am 05. und 12.02.2021 werden Sie an selbst gewählten Vorlesungsprojekten arbeiten. Am letzten Termin, 19.02.2021, können Sie dann Ihre Projektergebnisse kurz präsentieren.

Die studentischen Projekte können alleine oder in Gruppen (bis zu drei Personen) durchgeführt werden.

Überlegen Sie sich bis zur nächsten Vorlesung in welchem Themenbereich Sie Ihr Projekt machen möchten.

Z.B. Thema: Evolutionäres (2×3) -Spiel auf einem räumlichen Gitter