

# Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

*JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
11.11.2022*

*MATTHIAS HANAUSKE*

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES  
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK  
D-60438 FRANKFURT AM MAIN  
GERMANY*

## 4. Vorlesung

In diesem Semester (WS 2022/23)  
findet die Vorlesung und die Übungstermine  
in Präsenz (und auch Online) statt.

# Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung der Inhalte der 3. Vorlesung
- Einführung in die Evolutionäre Spieltheorie
  - Die Differentialgleichung eines evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spiels
    - Dominante Spiele
    - Koordinationsspiele
    - Anti-Koordinationsspiele
  - Das System von Differentialgleichung eines evolutionären, unsymmetrischen (2x2)-Spiels (Bi-Matrix Spiele)
    - Eckenspiele (Corner Class Games)
    - Sattelpunktspiele (Saddle Class Games)
    - Zentrumsspiele (Center Class Games)

# Inhalte Vorlesung 3

- Symmetrische und nicht symmetrische Spiele
- Klassen symmetrischer (2x2)-Spiele
- Beispiel eines asymmetrischen Spiels: Kampf der Geschlechter
- Einführung in die Evolutionäre Spieltheorie
  - Die Replikatorodynamik der Quasispezies
  - Die Differentialgleichung eines evolutionären (2xm)-Spiels
  - Die Differentialgleichung eines evolutionären (2x2)-Spiels (Bi-Matrix Spiel)
  - Die Differentialgleichung eines evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spiels
  - Definition: Evolutionär stabile Strategien (ESS)

# Klassen symmetrischer (2x2)-Spiele

	Spieler B Strategie 1 $y=1$	Spieler B Strategie 1 $y=0$
Spieler A Strategie 1 $x=1$	$(a, a)$	$(b, c)$
Spieler A Strategie 2 $x=0$	$(c, b)$	$(d, d)$

Symmetrisches  
(2x2)-Spiel

Symmetrische (2x2)-Spiele lassen sich in drei unterschiedliche Klassen gliedern:

1. Dominante Spiele
2. Koordinationsspiele
3. Anti-Koordinationsspiele

## **Die Klasse der dominanten Spiele ( $a > c$ und $b > d$ bzw. $a < c$ und $b < d$ )**

Bei dieser Spielklasse dominiert eine Strategie die andere. Es existiert nur ein reines Nash-Gleichgewicht welches die dominante Strategie des Spiels darstellt. Dieser Fall tritt ein, falls:

$a > c$  und  $b > d$  : Strategie 1 dominiert Strategie 2; dominante Strategie bei  $(x,y)=(1,1)$ .

$a < c$  und  $b < d$  : Strategie 2 dominiert Strategie 1; dominante Strategie bei  $(x,y)=(0,0)$ .

## **Koordinationsspiele ( $a > c$ und $b < d$ )**

Ein Koordinationsspiel existiert, falls die Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  der Auszahlungsmatrix die folgenden Bedingungen erfüllen:  $a > c$  und  $b < d$  . Bei dieser Spielklasse existieren drei Nash-Gleichgewichte, ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und zwei reine, symmetrische Nash-Gleichgewicht bei  $(x,y)=(0,0)$  und  $(x,y)=(1,1)$ .

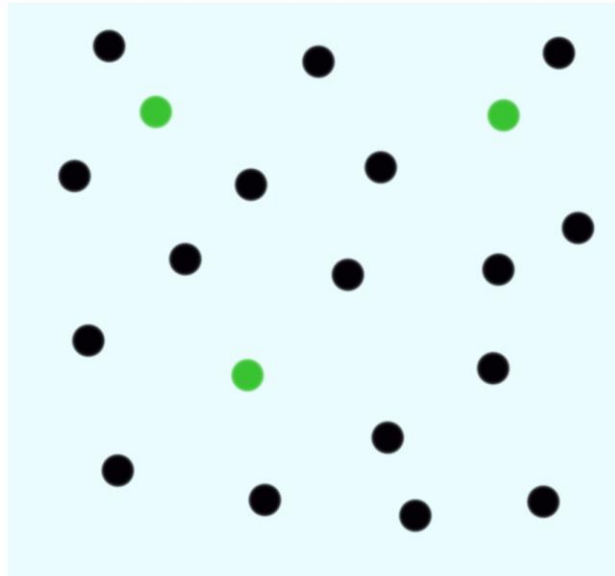
## **Anti-Koordinationsspiele ( $a < c$ und $b > d$ )**

Ein Anti-Koordinationsspiel existiert, falls die Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  der Auszahlungsmatrix die folgenden Bedingungen erfüllen:  $a < c$  und  $b > d$  . Bei dieser Spielklasse existieren drei Nash-Gleichgewichte, ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und zwei reine, unsymmetrische Nash-Gleichgewicht bei  $(x,y)=(0,1)$  und  $(x,y)=(1,0)$ .

# Evolutionäre Spieltheorie

## Symmetrische (2x2)-Spiele einer Population

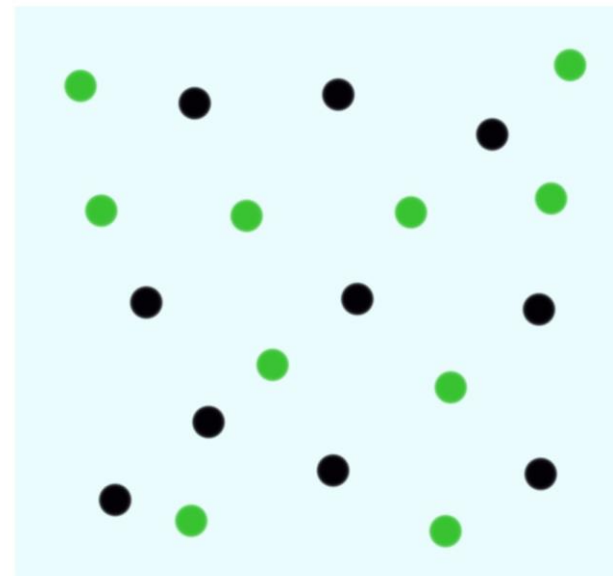
Die evolutionäre Spieltheorie betrachtet die zeitliche Entwicklung des strategischen Verhaltens einer gesamten Spielerpopulation.



$$x(0)=0.15$$



zeitliche  
Entwicklung  
der  
Population



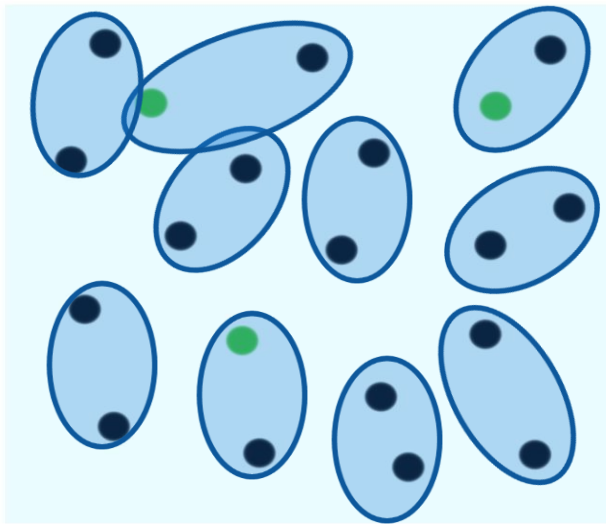
$$x(10)=0.5$$

Mögliche Strategien: (grün, schwarz), Parameter  $t$  stellt die „Zeit“ dar.  
 $x(t)$  : Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt  $t$  die Strategie „grün“ spielen.

# Evolutionäre Spieltheorie

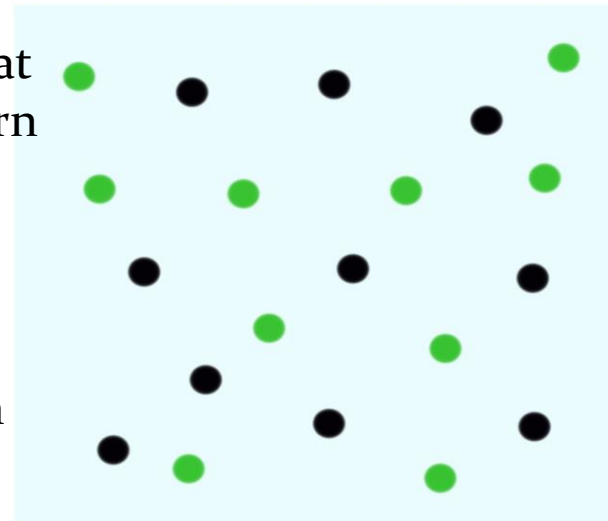
## Symmetrische (2x2)-Spiele einer Population

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner wechseln .



$$x(0)=0.15$$

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt  $t=0$  das erste Mal das Spiel. Die Spieler wählen im Mittel zu 15% die grüne Strategie.



$$x(10)=0.5$$

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die Spieler zunehmend attraktiver. Zum Zeitpunkt  $t=10$  spielen schon 50% grün.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i^A(t)}{dt} &= \left[ \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$_{il}^A x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \$_{kl}^A x_k^A(t) x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \right] x_i^A(t) \quad (1) \\
\frac{dx_j^B(t)}{dt} &= \left[ \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$_{lj}^B x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \$_{lk}^B x_l^A(t) x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \right] x_j^B(t) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei  $x_i^A(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_A$  und  $x_j^B(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_B$  die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit  $t$  gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen.



Nimmt man zusätzlich ein symmetrisches Spiel an ( $\hat{\$} := \hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B\right)^T$ ), in welchem die Auszahlungswerte (Fitness-Werte) der Populationsgruppen gleich sind, so kann man die beiden Gruppen von ihrer mathematischen Struktur her als ununterscheidbare Spielergruppen mit identischen Populationsvektoren  $x(t) = y(t)$  annehmen. Die Differentialgleichung schreibt sich dann wie folgt:

$$\frac{dx(t)}{dt} = [(\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2)] x(t) =: g(x) \quad (3)$$

Verallgemeinert man diese Differentialgleichung wieder auf mehr als zwei Strategien, so kann man abkürzend die folgende Formulierung schreiben:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{\mathbf{x}} \left( \hat{\$} \vec{x} \right) - \left( \left( \hat{\$} \vec{x} \right)^T \vec{x} \right) \vec{x}$$

# Replikatordynamik

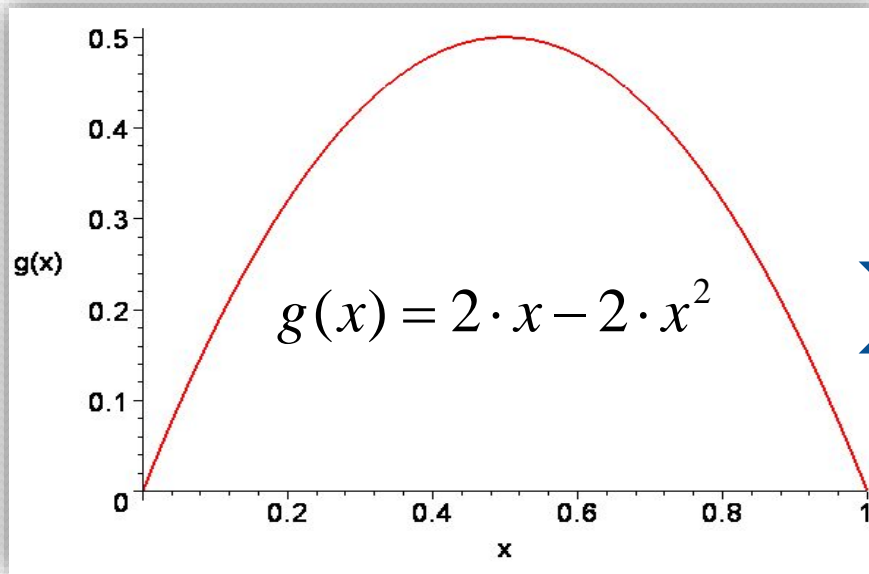
(für das Gefangenendilemma)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Gefangenendilemma lautet:

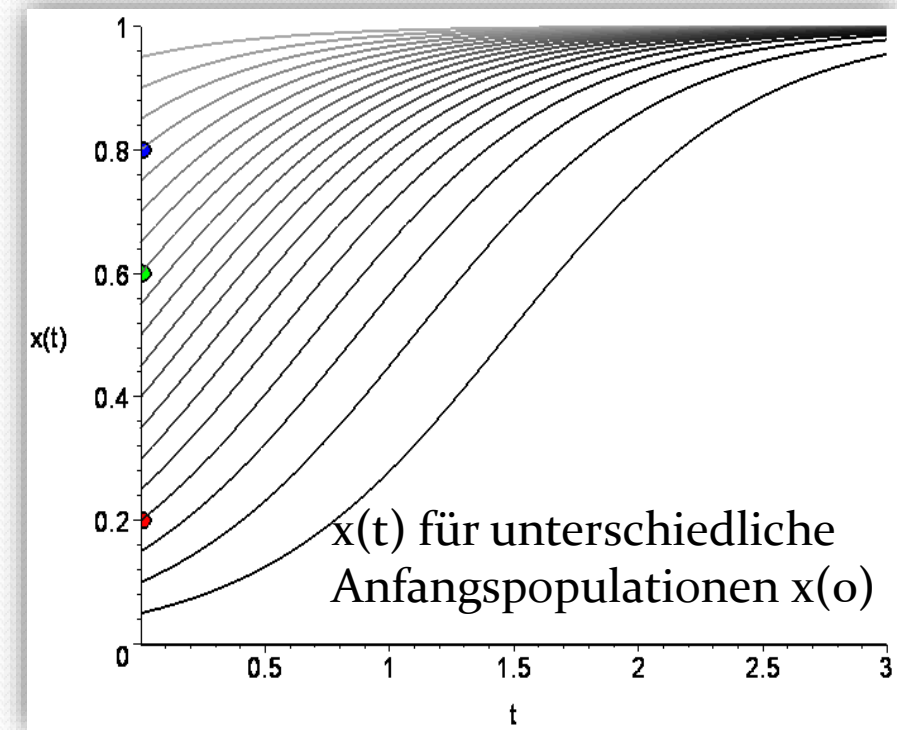
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot (x(t))^2 = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left( (-7 - (-9)) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (-3 - (-1)) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

	Ge	Sc
Ge	(-7, -7)	(-1, -9)
Sc	(-9, -1)	(-3, -3)



Beispiel: Gefangenendilemma  
 $g(x)=g(x(t))$  im Bereich  $[0,1]$  dargestellt



# Evolutionär stabile Strategien (ESS)

- Evolutionär stabile Strategien sind die stabilen Endzustände der Häufigkeitsverteilung  $x(t)$ :

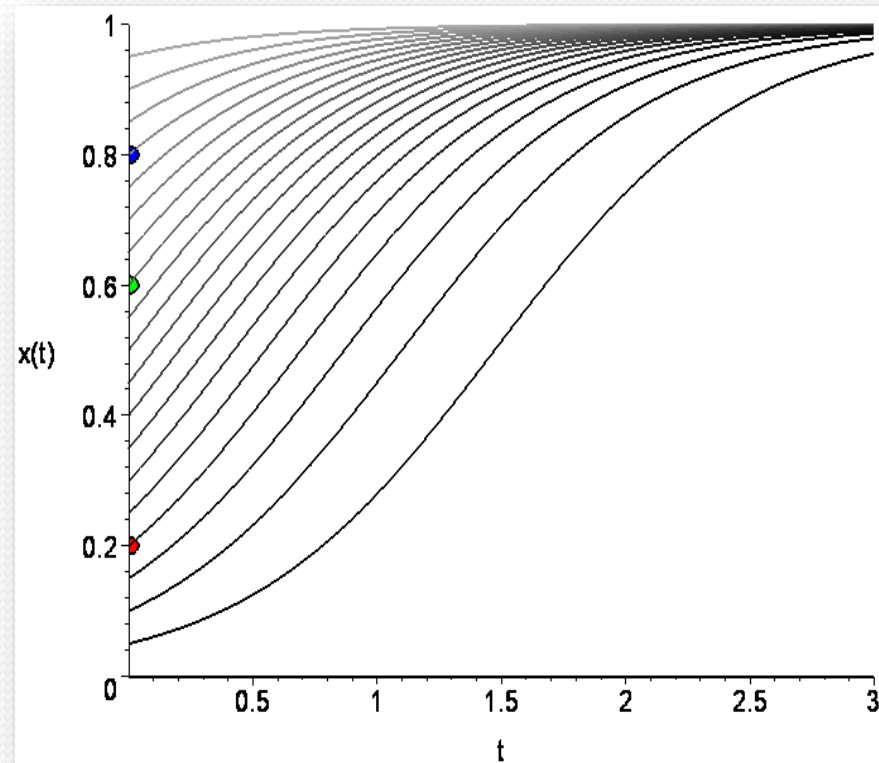
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t))$$

Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz einer ESS ist, dass diese ein Nash – Gleichgewicht des zugrundeliegenden Spiels ist.

## Beispiel:

*Gefangenendilemma ähnliche Spiele*  
Für die ESS des evolutionären Gefangenendilemma – Spiels ergibt sich:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = 1 \Rightarrow \text{alle "gestehen"}$$



# Replikatorodynamik

(für das Hirschjagt-Spiel)

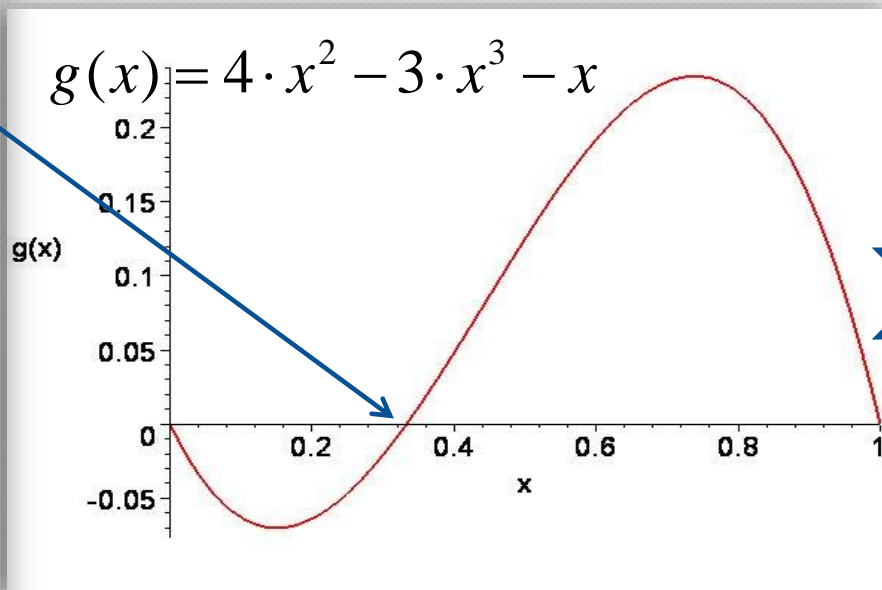
Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Hirschjagt-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 4 \cdot (x(t))^2 - 3 \cdot (x(t))^3 - x(t) = g(x(t))$$

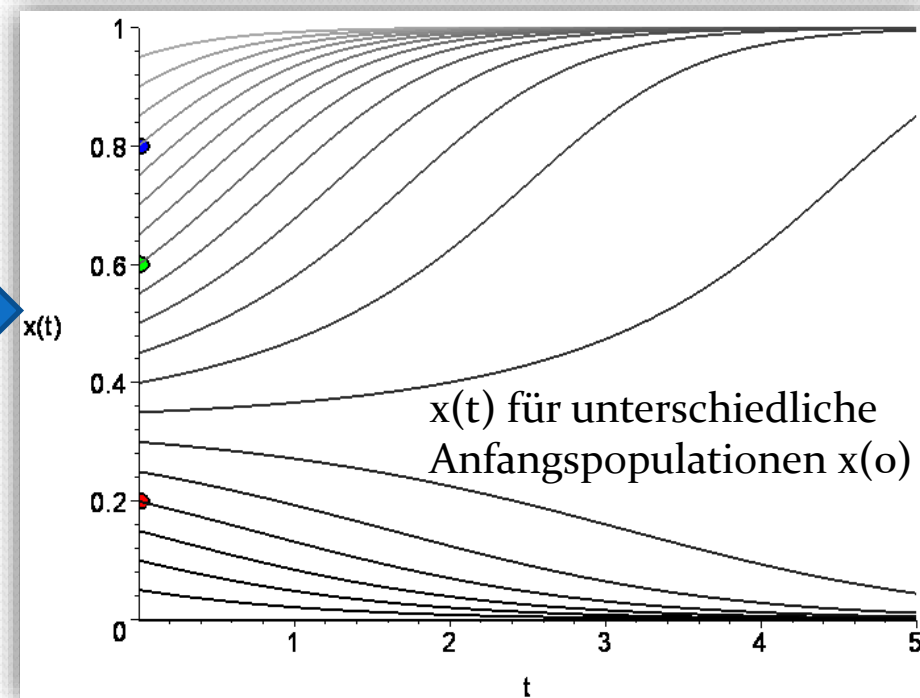
$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left( (2-0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (5-4) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2, 2)	(4, 0)
Hirsch	(0, 4)	(5, 5)

Die interne Nullstelle der Funktion  $g(x)$  entspricht dem Wert des gemischten Nash-Gleichgewichts und bestimmt den separations-Anfangswert der Population



Beispiel: Hirschjagt-Spiel  
 $g(x)=g(x(t))$  im Bereich  $[0,1]$  dargestellt



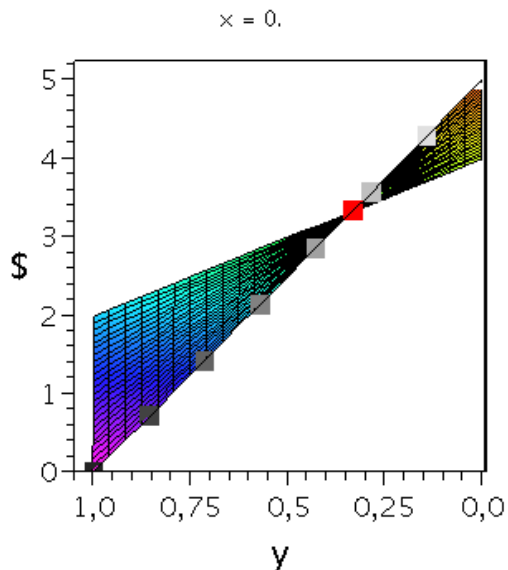
# Das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichts besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfläche verschwindet. Man nennt dann ein solches Nash-Gleichgewicht  $(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*})$  ein internes Nash-Gleichgewicht bzw. ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

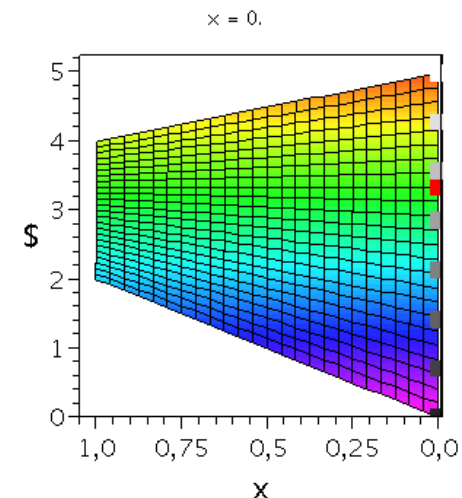
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^A} \right|_{\tilde{s}^B = \tilde{s}^{B*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^A \in [0, 1] , \tilde{s}^{B*} \in ]0, 1[$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^B(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^B} \right|_{\tilde{s}^A = \tilde{s}^{A*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^B \in [0, 1] , \tilde{s}^{A*} \in ]0, 1[$$



Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd-Spiel liegt bei der Strategien-kombination  $(x=1/3, y=1/3)$ . Das gemischte Nash-Gleichgewicht entspricht der internen Nullstelle der Funktion  $g(x)$ .



# Replikatorodynamik

(für das Angsthasen-Spiel)

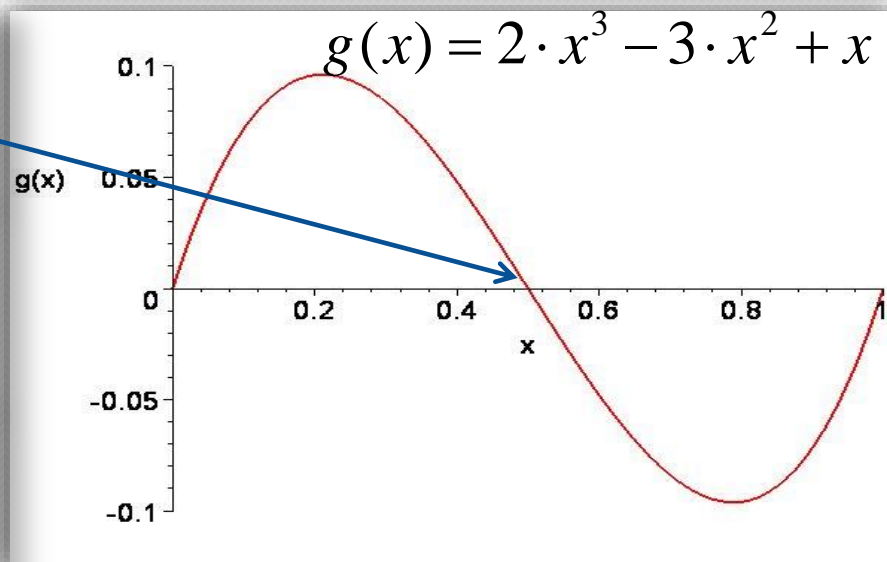
Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das Angsthasen-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot (x(t))^3 - 3 \cdot (x(t))^2 + x(t) = g(x(t))$$

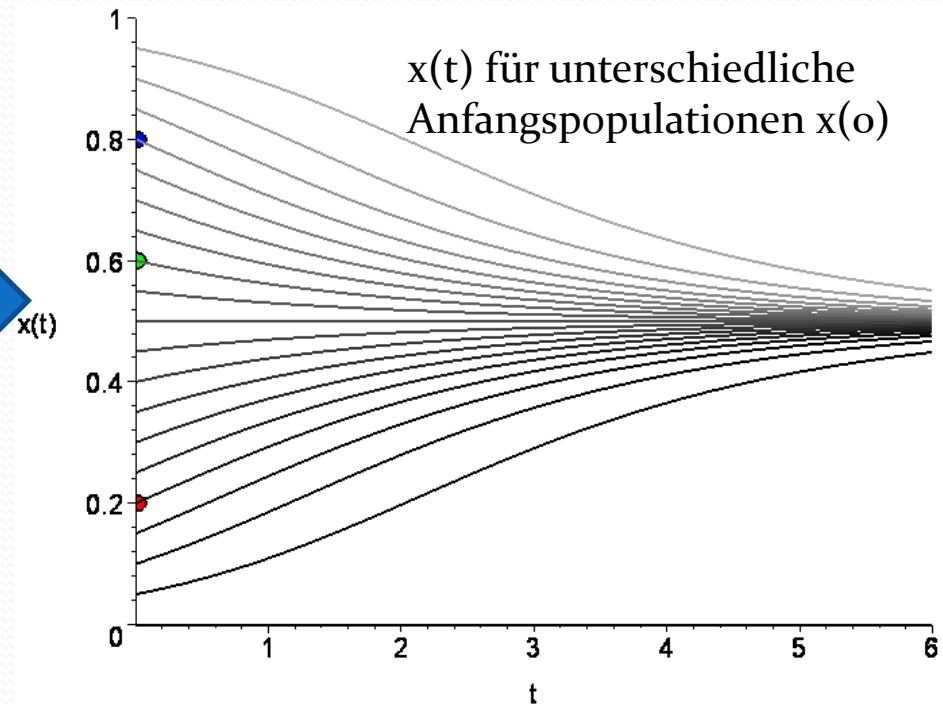
$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left( (-1 - 0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (1 - 2) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

	Springe nicht	Springe
Springe nicht	(-1, -1)	(2, 0)
Springe	(0, 2)	(1, 1)

Die interne Nullstelle der Funktion  $g(x)$  entspricht dem Wert des gemischten Nash-Gleichgewichts und bestimmt die Lage der ESS



Beispiel: Angsthasen-Spiel  
 $g(x) = g(x(t))$  im Bereich  $[0,1]$  dargestellt



# Evolutionär Stabile Strategien

- Betrachten Sie die folgenden Beispiele:

Beispiel 1:			Beispiel 2:			Beispiel 3:		
	Kugel	Keine Kugel		Kugel	Keine Kugel		Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0, 0)	(2, -1)	Kugel	(-1, -1)	(3, 0)	Kugel	(0, 0)	(2, -2)
Keine Kugel	(-1, 2)	(1, 1)	Keine Kugel	(0, 3)	(1, 1)	Keine Kugel	(-2, 2)	(3, 3)

1. Geben Sie mögliche dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiele an.
2. Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion  $g(x)$  für alle drei Spiele?
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion  $g(x)$  ( $g(x)=0$ ).
4. Geben Sie die evolutionär stabilen Strategien der Spiele an?

# Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte

**Beispiel 1**

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0, 0)	(2, -1)
Keine Kugel	(-1, 2)	(1, 1)



Das erste Spiel besitzt nur ein Nash-Gleichgewicht das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist (Kugel, Kugel). Das Spiel gehört zur Klasse der dominanten Spiele.

**Beispiel 2**

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1, -1)	(3, 0)
Keine Kugel	(0, 3)	(1, 1)



Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K, KK) und (KK, K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K, 0.33 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Anti-Koordinationsspiele.

**Beispiel 3**

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0, 0)	(2, -2)
Keine Kugel	(-2, 2)	(3, 3)



Das dritte Spiel besitzt ebenfalls keine dominante Strategie, aber zwei symmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K, K) und (KK, KK)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.33 K, 0.67 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Koordinationsspiele.



# Nullstellen der Funktion $g(x)$

Beispiel 1:

$$g(x) = x - x^2$$

$$x - x^2 = 0$$

$$x \cdot (1 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

Die Funktion hat zwei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 1$$

Beispiel 3:

Die Funktion hat drei Nullstellen:

$$g(x) = -3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - x$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \text{ und } x_3 = \frac{1}{3}$$

Beispiel 2:

$$g(x) = 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

$$x \cdot (3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2 = 0 \quad | /3$$

$$x^2 - \frac{5}{3} \cdot x + \frac{2}{3} = 0 \quad | \text{ p-q Formel}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25 - 24}{36}}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \frac{1}{6} \Rightarrow x_2 = 1, x_3 = \frac{2}{3}$$

Die Funktion hat drei Nullstellen:

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \text{ und } x_3 = \frac{2}{3}$$

# Evolutionäre Strategien (Beispiel 1)

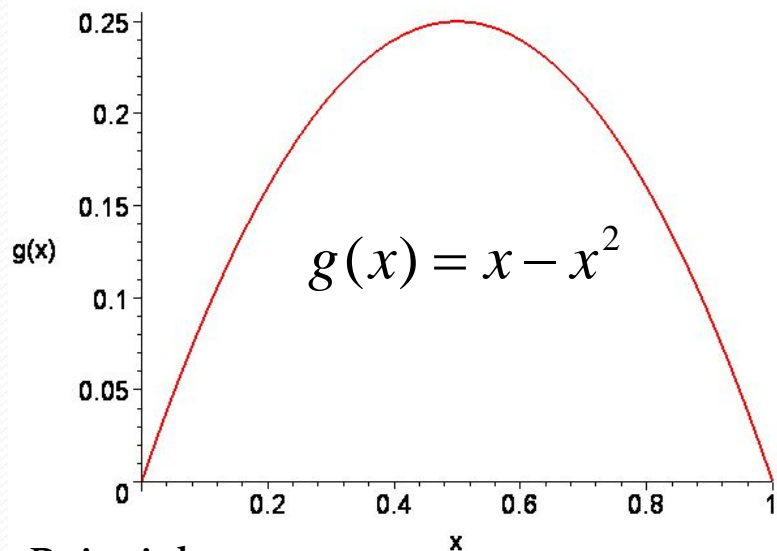
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0, 0)	(2, -1)
Keine Kugel	(-1, 2)	(1, 1)

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das erste Beispiel lautet:

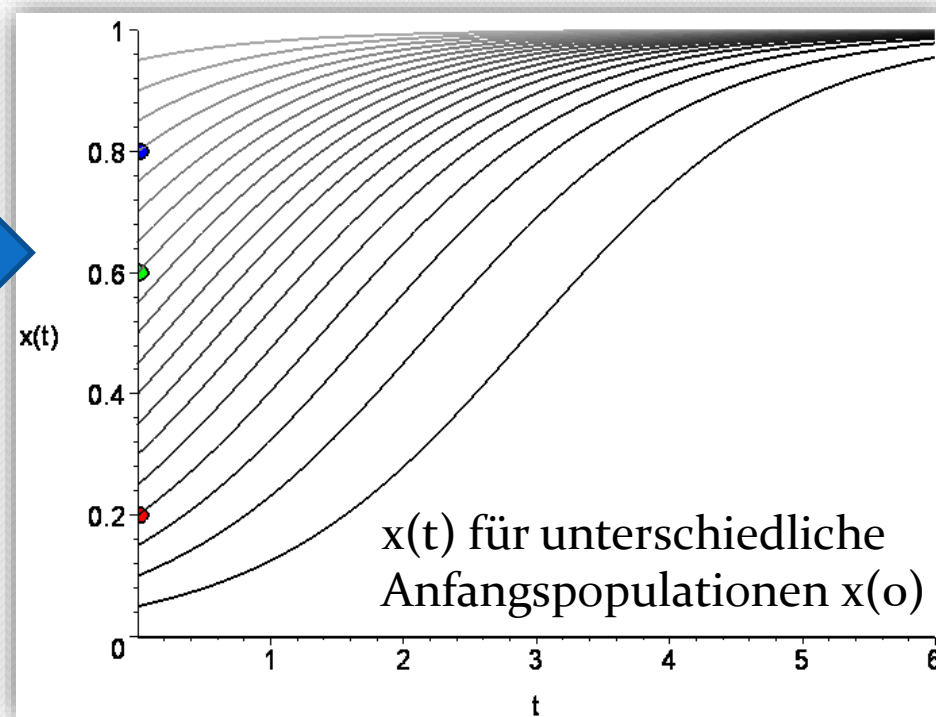
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = x(t) - (x(t))^2$$

Eine ESS bei  $x=1$

Da es sich bei diesem Beispiel um ein dominantes, symmetrisches (2x2)-Spiel handelt und die Funktion  $g(x)$  im relevanten Bereich ( $x=[0,1]$ ) immer größer-gleich Null ist, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer gegen 1.



Beispiel 1:  
 $g(x)=g(x(t))$  im Bereich  $[0,1]$  dargestellt



## Evolutionäre Strategien (Beispiel 2)

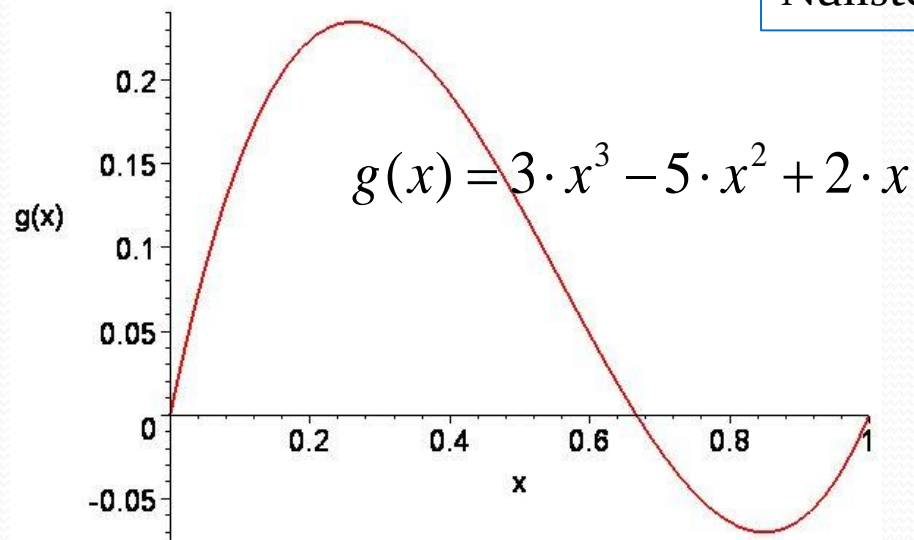
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	$(-1, -1)$	$(3, 0)$
Keine Kugel	$(0, 3)$	$(1, 1)$

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das zweite Beispiel lautet:

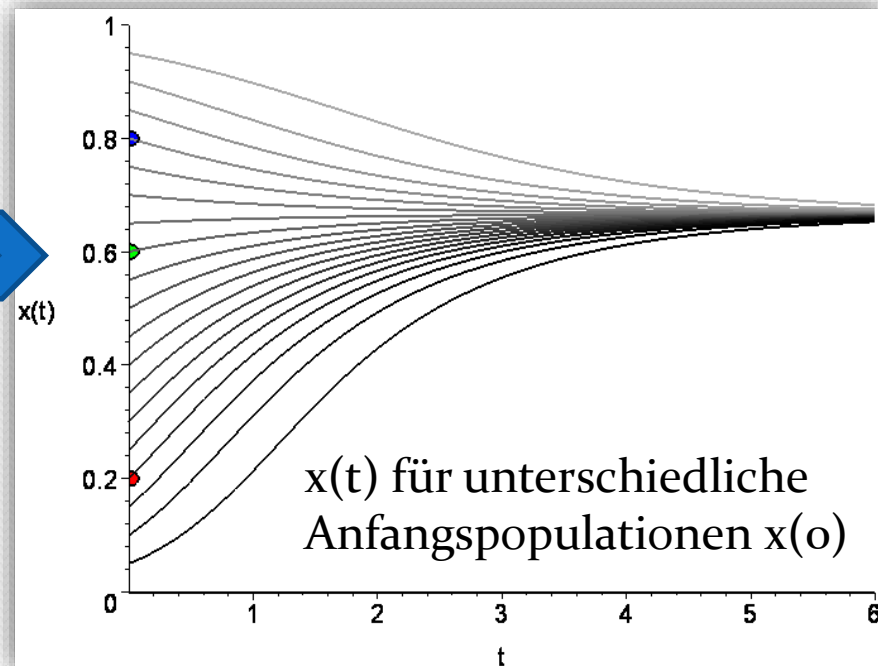
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = 3 \cdot (x(t))^3 - 5 \cdot (x(t))^2 + 2 \cdot x(t)$$

Eine ESS bei  $x=0.67$

Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Anti-Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer zu dem gemischten Nash-Gleichgewicht, was identisch mit der mittleren Nullstelle der Funktion  $g(x)$  ist ( $x=0.67$ ).



Beispiel 2:  
 $g(x)=g(x(t))$  im Bereich  $[0,1]$  dargestellt



## Evolutionäre Strategien (Beispiel 3)

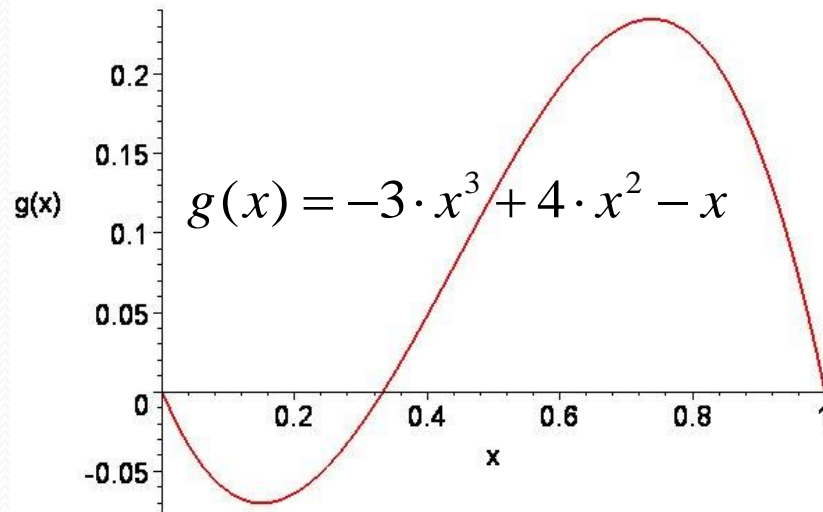
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0, 0)	(2, -2)
Keine Kugel	(-2, 2)	(3, 3)

Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik für das zweite Beispiel lautet:

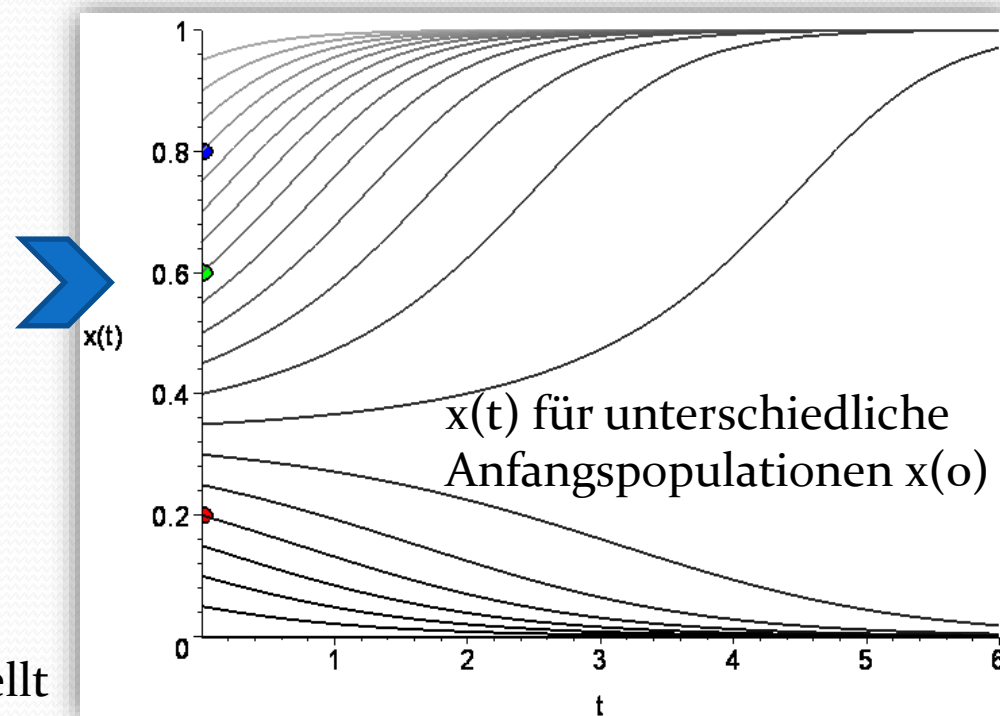
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = -3 \cdot (x(t))^3 + 4 \cdot (x(t))^2 - x(t)$$

Zwei ESSs : (x=1 und x=0)

Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler abhängig vom Anfangswert zu einem der beiden reinen Nash-Gleichgewichte (x=1 oder x=0).

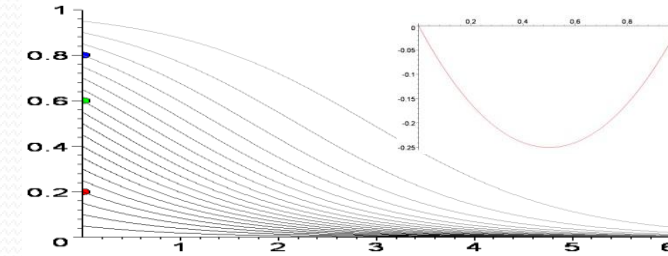


Beispiel 3:  
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt

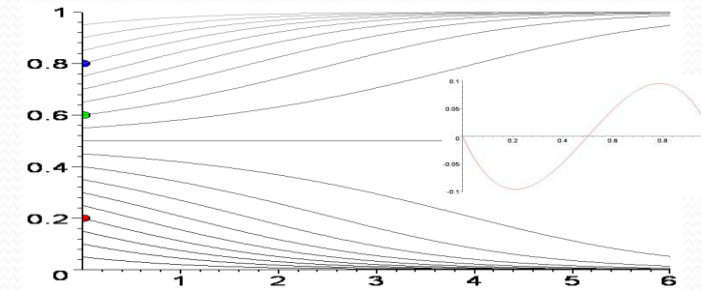


# Klassifizierung von evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spielen

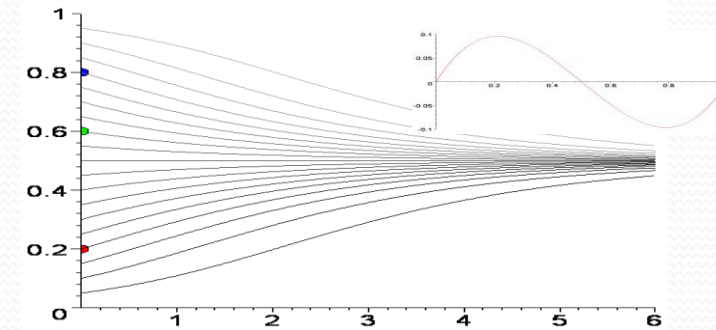
- **Dominante Spiele**  
(2. Strategie dominiert 1.Strategie)  
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei  $x=0$ .



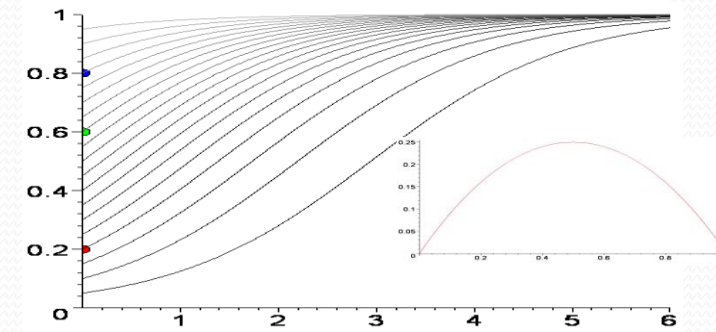
- **Koordinationsspiele**  
Es existieren drei Nash - Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.



- **Anti - Koordinationsspiele**  
Es existieren drei Nash - Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.

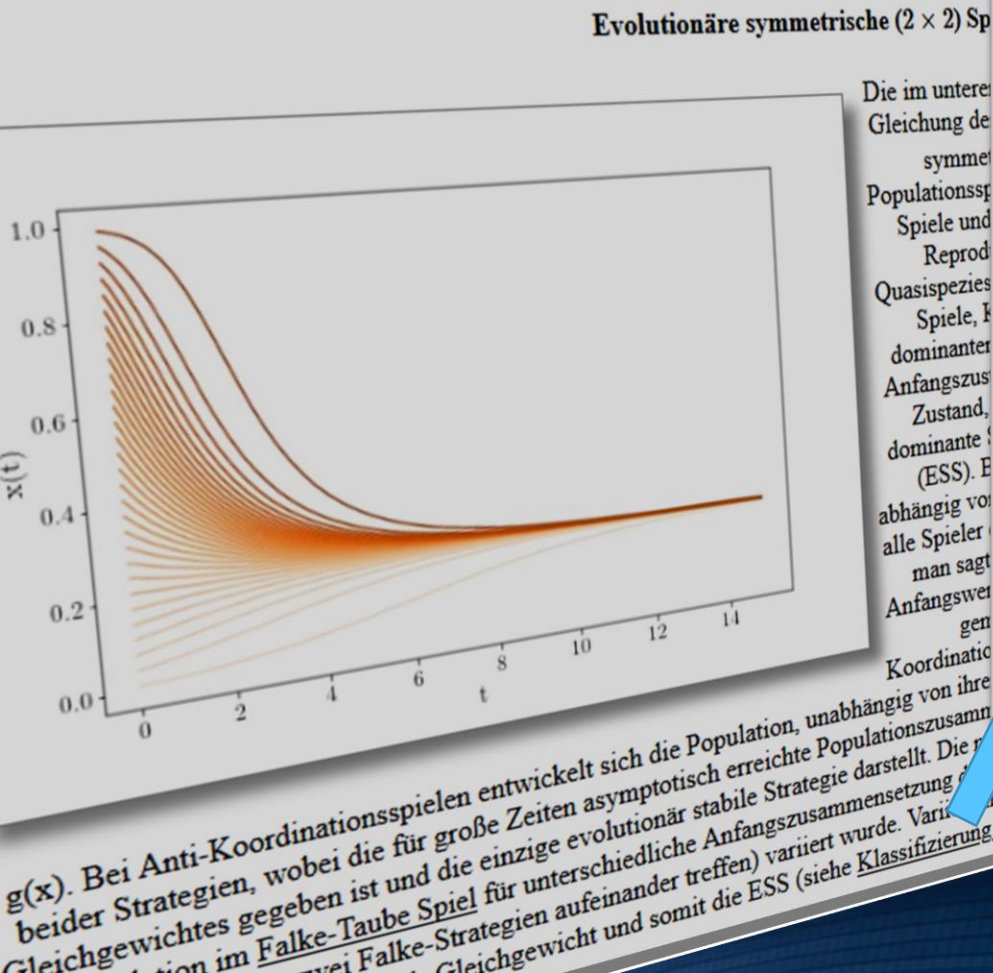


- **Dominante Spiele**  
(1. Strategie dominiert 2.Strategie)  
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei  $x=1$ .



# Jupyter Notebook

Auf der Internetseite der Vorlesung



## Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 02.11.2020

Erster Vorlesungsteil:

Klassifizierung evolutionärer symmetrischer (2 × 2)-Spiele

### Einführung

In diesem Unterkapitel werden die unterschiedlichen Spieltypen der gemischten Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungsmatrix klassifiziert. Die Einteilung lehnt sich an das Buch von Martin A. Nowak, *Evolutionary Dynamics - Exploring the Equations of Life*, 2006 (siehe Seite 49-51) an. Eine alternative Klassifizierung findet man z.B. auch in Matthias Hanauske, *Evolutionäre Quanten-Spieltheorie im Kontext sozio-ökonomischer Systeme*, 2011. Ausgangspunkt ist die neben stehende allgemeine symmetrische Auszahlungsmatrix eines (2 Personen)-(2

Strategien) Spiels (a, b, c und d sind reelwertige Zahlen). Da es sich um eine symmetrische Auszahlungsmatrix handelt gilt:  $\hat{\$}^B = (\hat{\$}^A)^T$ .

Abhängig von den gewählten Parametern der Auszahlungsmatrix lassen sich symmetrische (2 × 2) Spiele in drei unterschiedliche Spielklassen gliedern: Dominante Spiele, Koordinationsspiele und Anti-Koordinationsspiele. Wir nehmen die folgende Form der Spielmatrix an:

$$\hat{\$}^A = \hat{\$} = \begin{pmatrix} \$_{11} & \$_{12} \\ \$_{21} & \$_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

**Die Klasse der dominanten Spiele ( a > c und b > d bzw. a < c und b < d )**

Bei dieser Spielklasse dominiert eine Strategie die andere. Es existiert nur ein reines Nash-Gleichgewicht welches die dominante Strategie des Spiels darstellt. Dieser Fall tritt ein, falls:

a > c und b > d : Strategie 1 dominiert Strategie 2; dominante Strategie bei (x,y)=(1,1).

a < c und b < d : Strategie 2 dominiert Strategie 1; dominante Strategie bei (x,y)=(0,0).

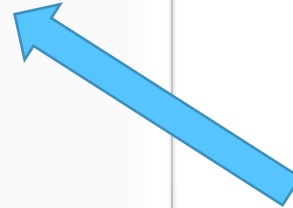
Zusätzlich befindet sich das Jupyter Notebook  
auch auf der OLAT Seite des Kurses

# Python Programm

Auf der Internetseite der Vorlesung

## Weiterführende Links

- Folien der 4. Vorlesung
- [View Jupyter Notebook: Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [Download Jupyter Notebook: Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [Download Python Programm: Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [View Jupyter Notebook: Evolutionäre Spieltheorie unsymmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [Download Jupyter Notebook: Evolutionäre Spieltheorie unsymmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [Download Python Programm: Evolutionäre Spieltheorie unsymmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [Maple Worksheet: Klassifizierung von symmetrischen evolutionären \(2x2\)-Spielen](#)
- [Maple Worksheet: Evolutionäre Bi-Matrix Spiele](#)



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

# Definition der Funktion g
def g(x,a,b,c,d):
    g=((a-c)*(x-x*x) + (b-d)*(1-2*x+x*x))*x
    return g

# Loesen der DGL
def solve_dgl(numpoints,tend,x0,a,b,c,d):
    sol=np.empty([numpoints,2])
    t=np.linspace(0,tend,numpoints)
    dt=t[1]-t[0]
    sol[0].flat[0] = t[0]
    sol[0].flat[1] = x0
    i = 1
    while i < len(sol):
        sol[i].flat[0] = t[i]
        dx=g(sol[i-1,1],a,b,c,d)*dt
        sol[i].flat[1] = sol[i-1,1] + dx
        i = i + 1
    return sol

# Groessenfestlegung der Labels usw. im Bild
params = {
    'text.usetex'      : True,
    'axes.titlesize'  : 22,
    'axes.labelsize'  : 20,
    'xtick.labelsize' : 20 ,
    'ytick.labelsize' : 20
}
matplotlib.rcParams.update(params)

#Festlegung der Auszahlungsmatrix des symmetrischen (2x2)-Spiels
# Dominant Game
#a=-7
#b=-1
#c=-9
```

# Lösen des evolutionären Spiels mit Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

# Groessenfestlegung der Labels usw. im Bild
▼ params = {
    'text.usetex'      : True,
    'axes.labelsize'  : 20,
    'xtick.labelsize' : 20,
    'ytick.labelsize' : 20
}
matplotlib.rcParams.update(params)

# Definition der Funktion g
▼ def g(x,a,b,c,d):
    g=((a-c)*(x-x*x) + (b-d)*(1-2*x+x*x))*x
    return g

#Festlegung der Auszahlungsmatrix des symmetrischen (2x2)-Spiels
a=2
b=4
c=0
d=5
#End(zeit)punkt, Anzahl der Zeitschritte
tend=6
numpoints=500
#Anfangswert der Population
x0=0.4
```



# Lösen des evolutionären Spiels mit Python

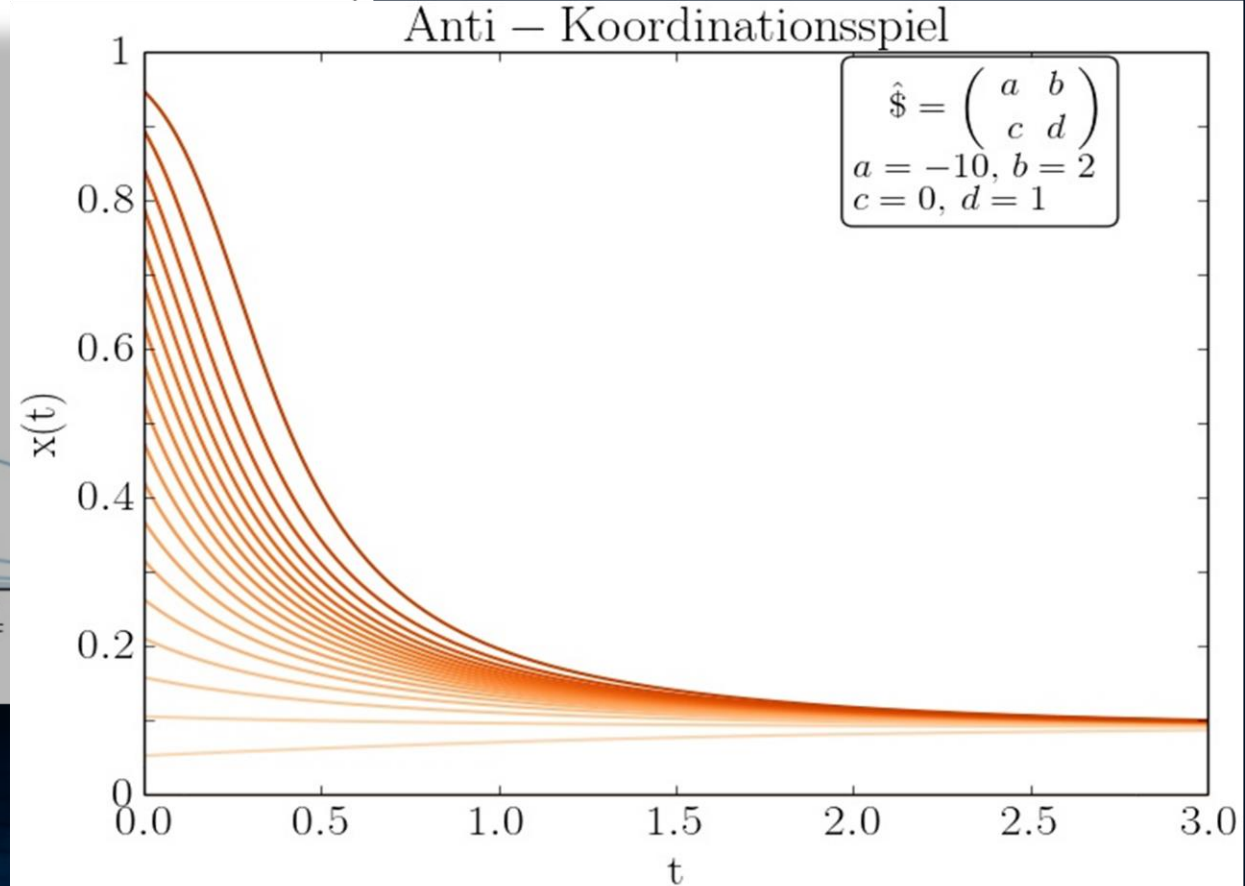
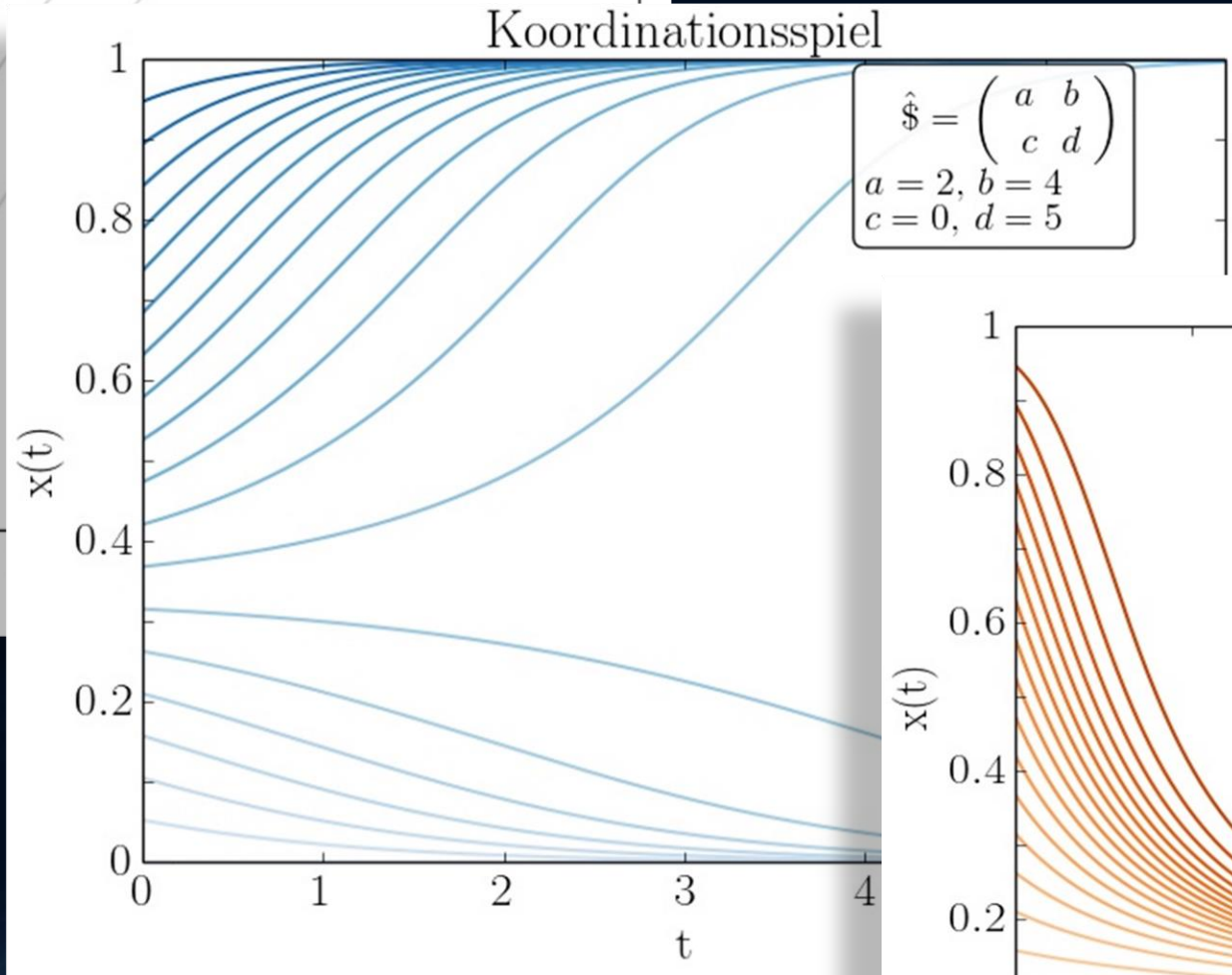
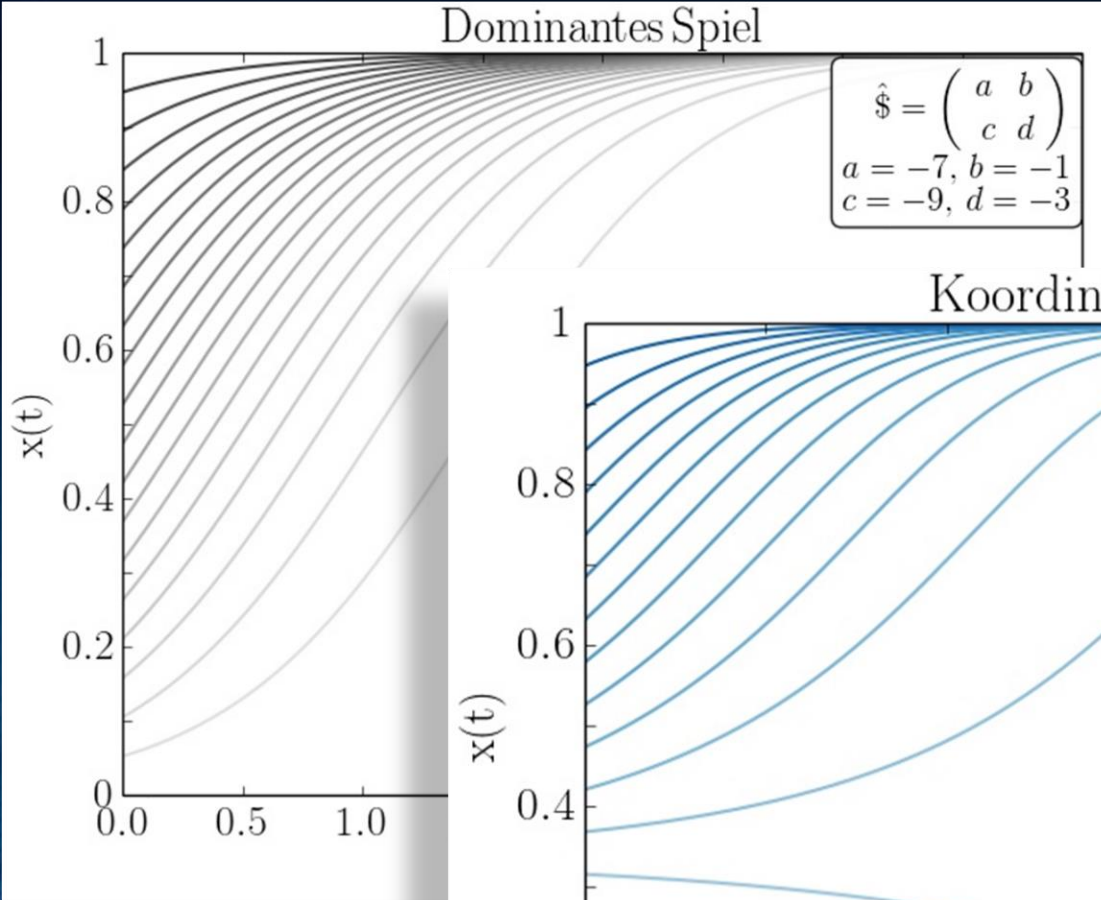
```
#Lösen der DGL
Loes=np.empty([numpoints,2])
t=np.linspace(0,tend,numpoints)
dt=t[1]-t[0]
Loes[0].flat[0] = t[0]
Loes[0].flat[1] = x0
i = 1
▼ while i < len(Loes):
    Loes[i].flat[0] = t[i]
    dx=g(Loes[i-1,1],a,b,c,d)*dt
    Loes[i].flat[1] = Loes[i-1,1] + dx
    i = i + 1

#Plotten des Bildes
plt.plot(Loes[:,0],Loes[:,1],c="black", linewidth=1.5, linestyle='-')

# Achsenbeschriftungen usw.
plt.ylim(0,1)
plt.ylabel(r"$\rm x(t)$")
plt.xlabel(r"$\rm t$")

#Speichern des Bildes als .jpg--Datei
saveFig="./evol.jpg"
plt.savefig(saveFig, dpi=100, bbox_inches="tight", pad_inches=0.05, format="jpg")
plt.show()
```

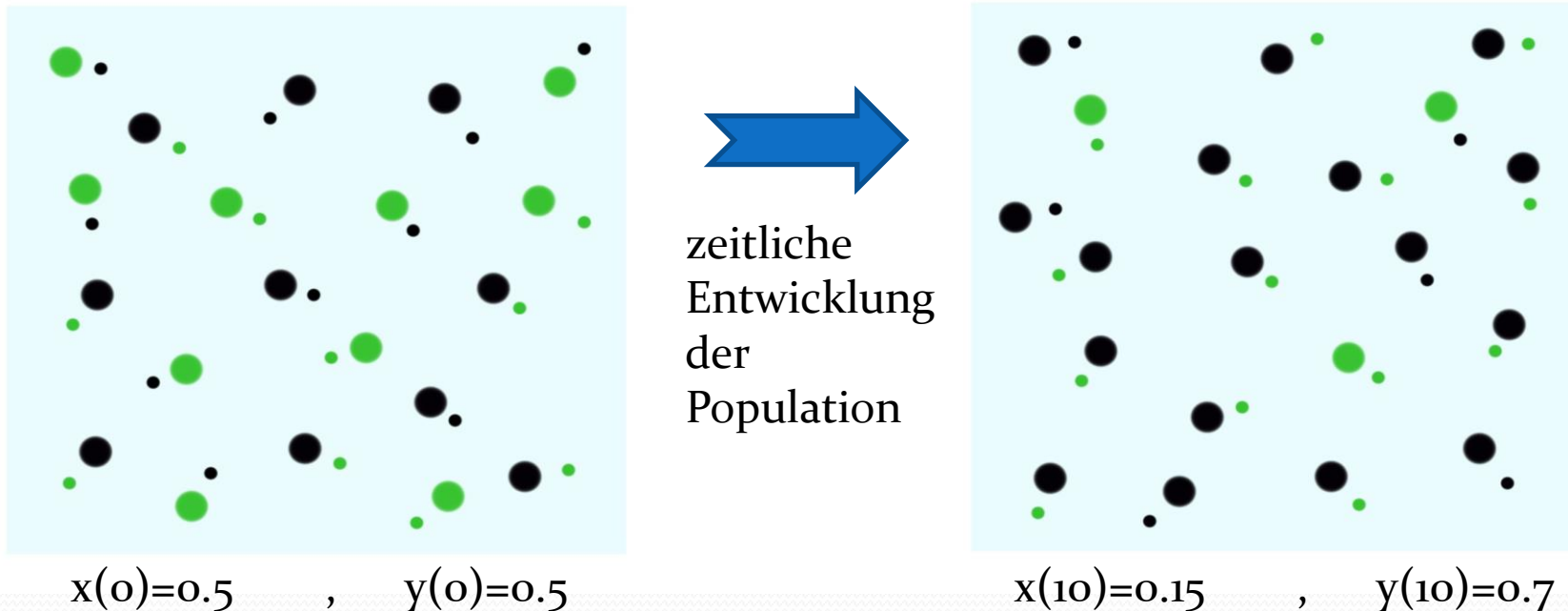
# Lösen des evolutionären Spiels mit Python Version evol1.py



# Evolutionäre Spieltheorie

## Unsymmetrische (2x2)-Spiele (Bimatrixspiele) zweier Populationen

Bei unsymmetrischen (2x2)-Spiele besteht die zugrundeliegende Population aus zwei Gruppen (hier große und kleine Kreise). Aufgrund der unterschiedlichen Auszahlungsmatrizen können die Populationsgruppen sich in ihren Strategieentscheidungen (**grün**, schwarz) unterschiedlich entwickeln.



Mögliche Strategien: (**grün**, schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.

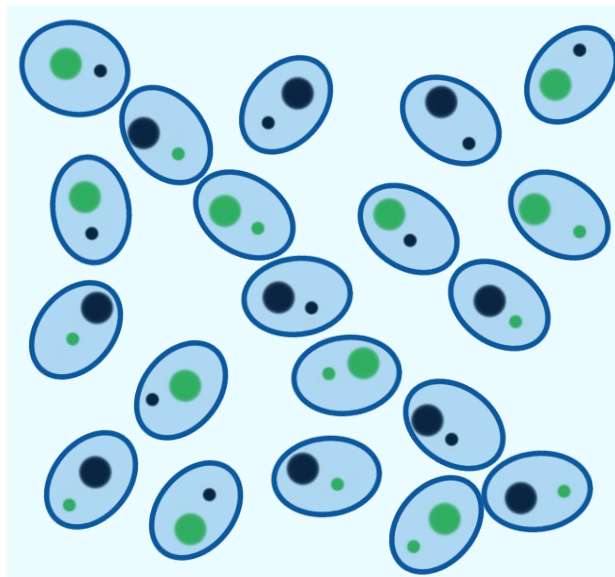
$x(t)$  : Anteil der großen Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.

$y(t)$  : Anteil der kleinen Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.

# Evolutionäre Spieltheorie

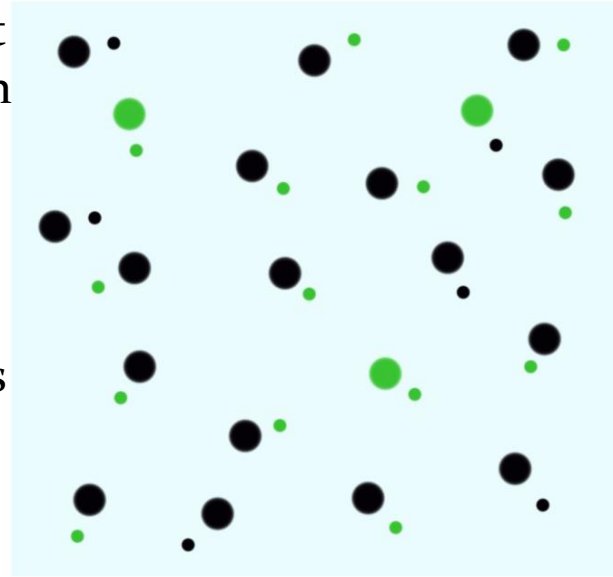
## Unsymmetrische (2x2)-Spiele (Bimatrixspiele)

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten gesamten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler mit unterschiedlichen Gruppenzugehörigkeiten zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner der anderen Gruppe wechseln.



$x(10)=0.5$  ,  $y(10)=0.5$

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt  $t=0$  das erste Mal das Spiel. Es bilden sich stets Zweier-Gruppen aus großen und kleinen Kreisen.



$x(10)=0.15$  ,  $y(10)=0.7$

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die kleinen Spieler zunehmend attraktiver ( $y(10)=0.7$ ), wohingegen sie für die großen Spieler zunehmend weniger attraktiv wird ( $x(10)=0.15$ ).

Wir beschränken uns im folgenden auf den 2-Strategien Fall ( $m_A = m_B = 2$ ), lassen jedoch weiter eine Unsymmetrie der Auszahlungsmatrix zu. Die beiden Komponenten der zweidimensionalen gruppenspezifischen Populationsvektoren lassen sich dann, aufgrund ihrer Normalisierungsbedingung, auf eine Komponente reduzieren ( $x_2^A = 1 - x_1^A$  und  $x_2^B = 1 - x_1^B$ ). Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A:  $x(t) := x_1^A(t)$  und Gruppe B:  $y(t) := x_1^B(t)$ ) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben (siehe z.B. [4], S:116 oder [3], S:69):

$$\frac{dx(t)}{dt} = [(\beta_{11}^A + \beta_{22}^A - \beta_{12}^A - \beta_{21}^A) y(t) + (\beta_{12}^A - \beta_{22}^A)] (x(t) - (x(t))^2) =: g_A(x, y) \quad (2)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = [(\beta_{11}^B + \beta_{22}^B - \beta_{12}^B - \beta_{21}^B) x(t) + (\beta_{12}^B - \beta_{22}^B)] (y(t) - (y(t))^2) =: g_B(x, y)$$

# Beispiel 1:

Kampf der Geschlechter als evolutionäres Spiel

Das gekoppelte System von Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \cdot (4 \cdot y(t) - 4 \cdot x(t) \cdot y(t) + 3 \cdot x(t) - 3)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) \cdot (4 \cdot x(t) - 4 \cdot x(t) \cdot y(t) + y(t) - 1)$$

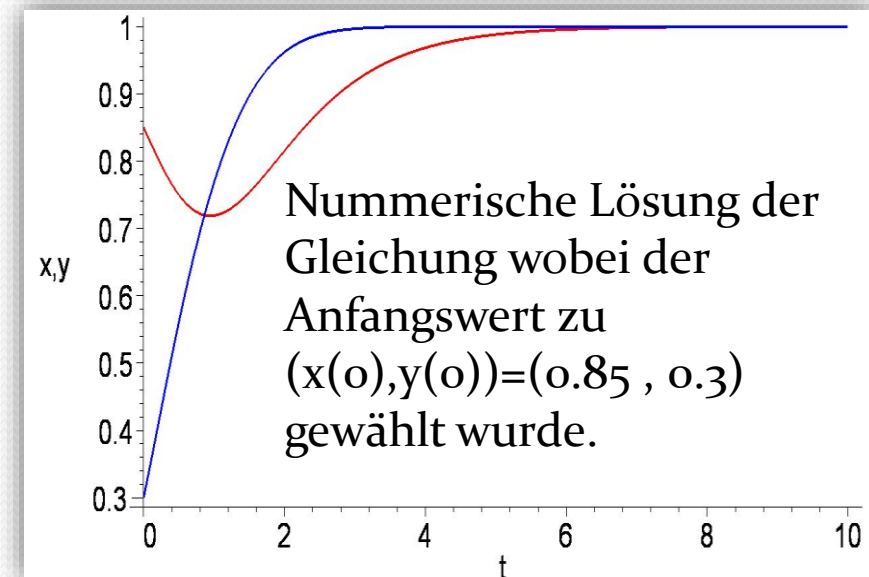
Die beiden Gruppen der Population sind Männer (A,  $x(t)$ ) und Frauen (B,  $y(t)$ ). Da nur zwei Strategien wählbar sind, lassen sich die jeweiligen Populationsanteile durch lediglich eine Größe ausdrücken ( $x(t)$  und  $y(t)$ ).

$$x(t) := x_1^A(t) \quad , \quad x_2^A(t) = 1 - x(t)$$

$$y(t) := x_1^B(t) \quad , \quad x_2^B(t) = 1 - y(t)$$

	Kino	Disko
Kino	(1, 3)	(0, 0)
Disko	(0, 0)	(3, 1)

Die Lösung der Gleichung erfolgt wiederum durch Integration bzw. kann mithilfe des Computers numerisch berechnet werden. Es muss in beiden Fällen ein fester Anfangswert  $(x(0), y(0))$  gewählt werden.



# Bi-Matrix Spiele

## *Gemischte Nash-Gleichgewichte*

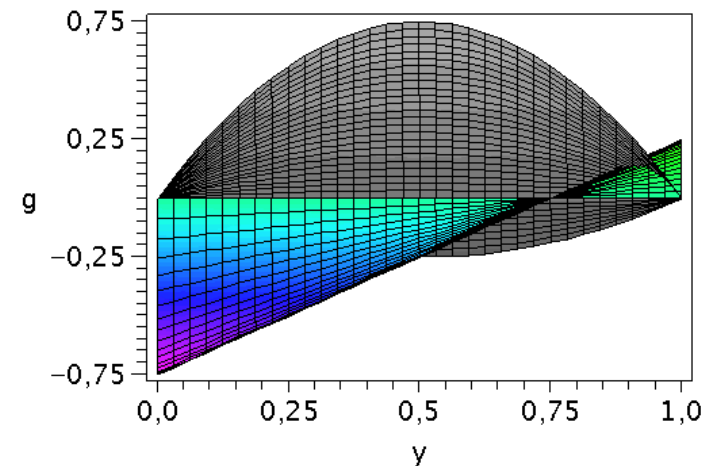
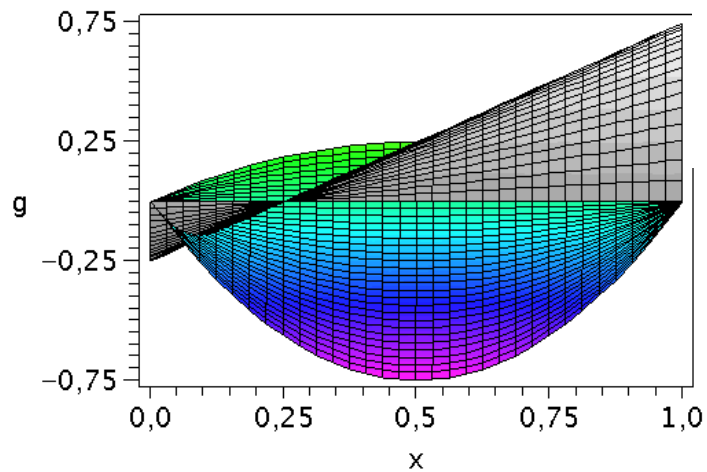
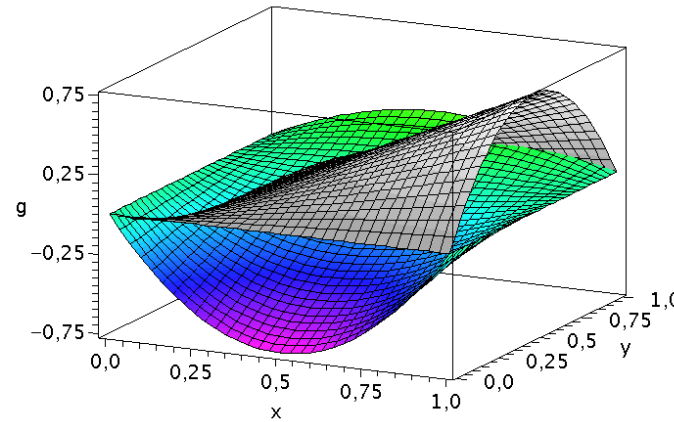
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^A} \right|_{\tilde{s}^B = \tilde{s}^{B*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^A \in [0, 1] , \tilde{s}^{B*} \in ]0, 1[$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^B(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^B} \right|_{\tilde{s}^A = \tilde{s}^{A*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^B \in [0, 1] , \tilde{s}^{A*} \in ]0, 1[$$

# Eigenschaften der Funktionen $g_A(x,y)$ und $g_B(x,y)$

Die das Bimatrix Spiel bestimmenden Funktionen  $g_A(x,y)$  (farbige Fläche) und  $g_B(x,y)$  (graue Fläche) sind in den unteren Abbildungen veranschaulicht. Beide Teilgruppenspiele gehören der Klasse der Koordinationsspiele an.





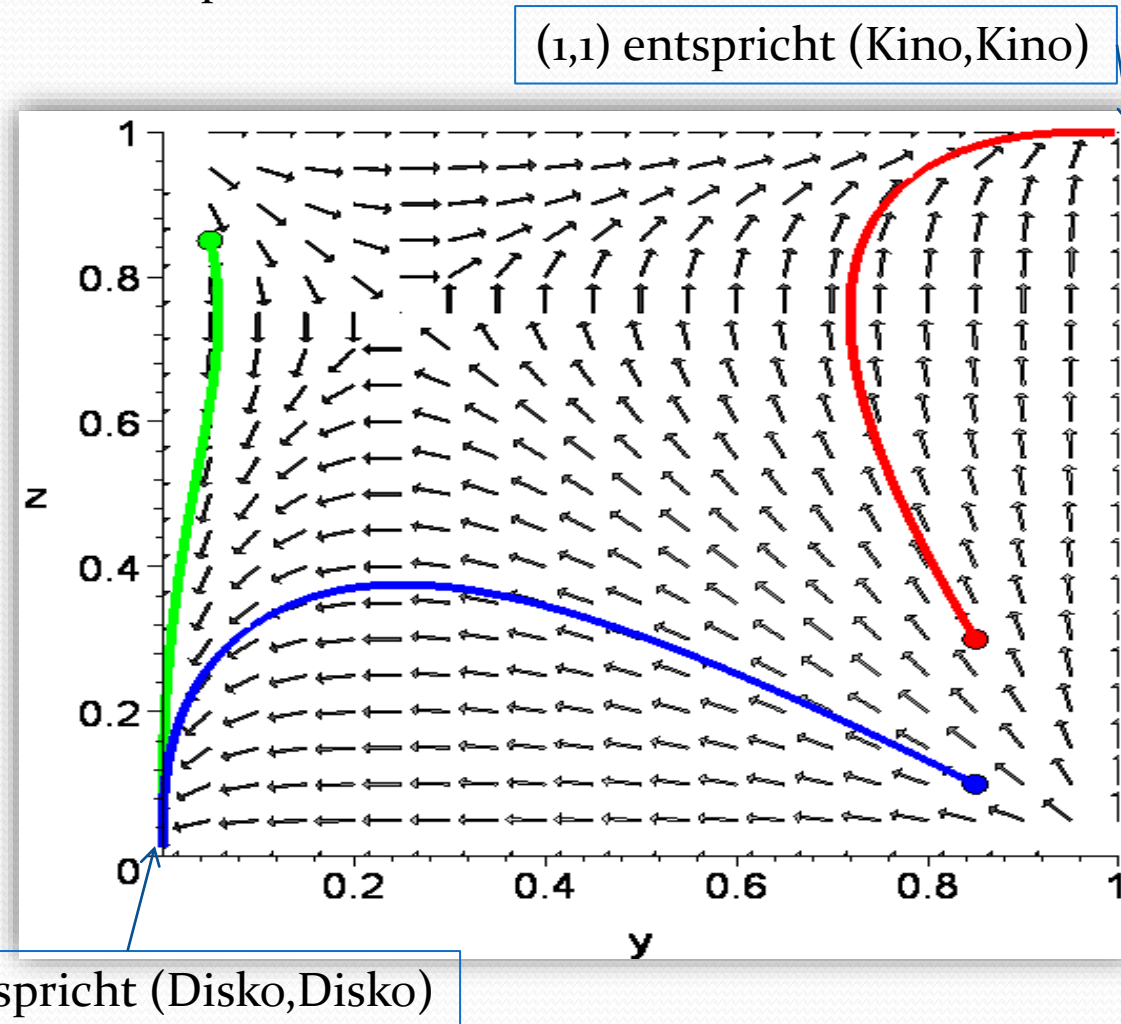
# Beispiel 1:

Kampf der Geschlechter als evolutionäres Spiel

	Kino	Disko
Kino	(1, 3)	(0, 0)
Disko	(0, 0)	(3, 1)

Das „Kampf der Geschlechter“- Spiel gehört der Klasse der „Sattelpunktspiele“ (Saddle Class) an. Das Phasenportrait des Spiels besitzt das folgende Aussehen:

Die rechte Abbildung zeigt das zeitliche Verhalten von drei numerischen Lösungen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Die evolutionäre Erweiterung des Spiels besitzt zwei evolutionär stabile Strategien ((0,0) und (1,1)). Die blaue und grüne Populationsentwicklung enden bei (0,0) während die Anfangsbedingung der roten Population bei (1,1) endet.



# Beispiel 2:

Klasse der Zentrumsspiele (Center Class)

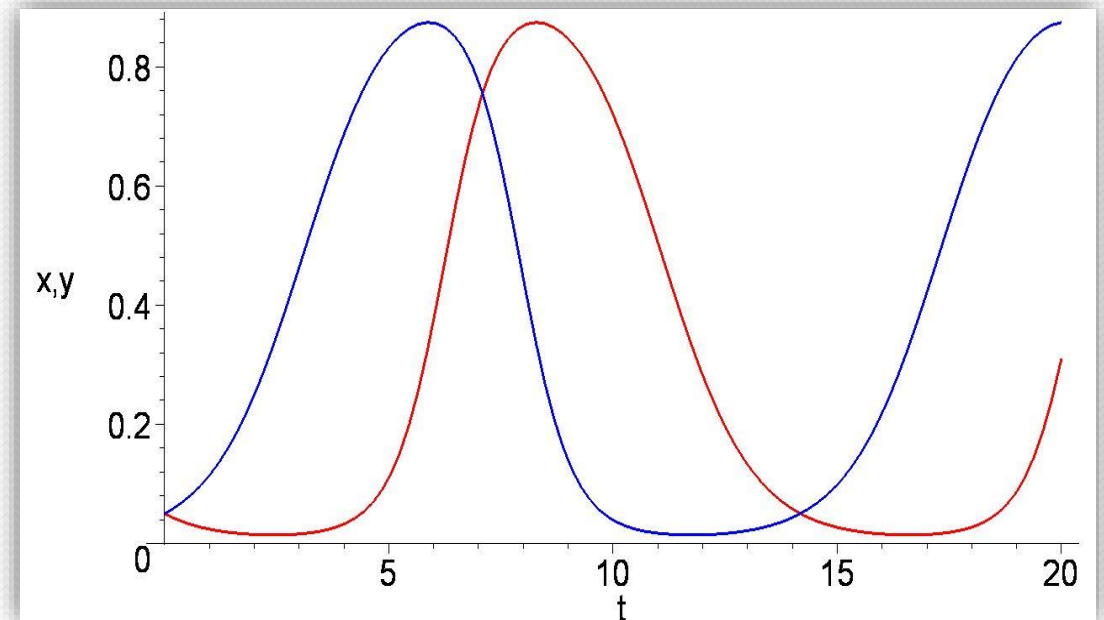
Das gekoppelte System von Differentialgleichung für dieses Beispiel lautet:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \cdot (3 \cdot y(t) - 3 \cdot x(t) \cdot y(t) + x(t) - 1)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) \cdot (-3 \cdot x(t) + 3 \cdot x(t) \cdot y(t) - y(t) + 1)$$

Die rechte Abbildung zeigt eine numerische Lösung der obigen Gleichung, wobei der Anfangswert zu  $(x(0), y(0)) = (0.05, 0.05)$  gewählt wurde. Im Gegensatz zu allen anderen möglichen Klassen von Bimatrixspielen, treten bei der Klasse der Zentrumsspiele periodische Verläufe der Populationsanteile  $x(t)$  und  $y(t)$  auf - die Populationsanteile enden nicht in einer evolutionär stabilen Strategie.

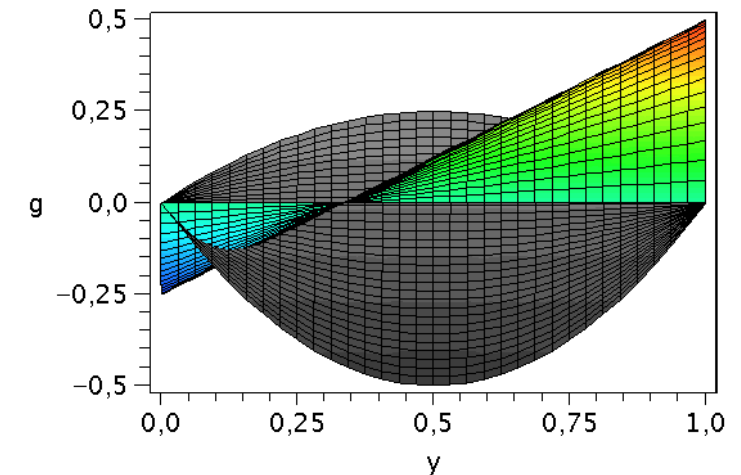
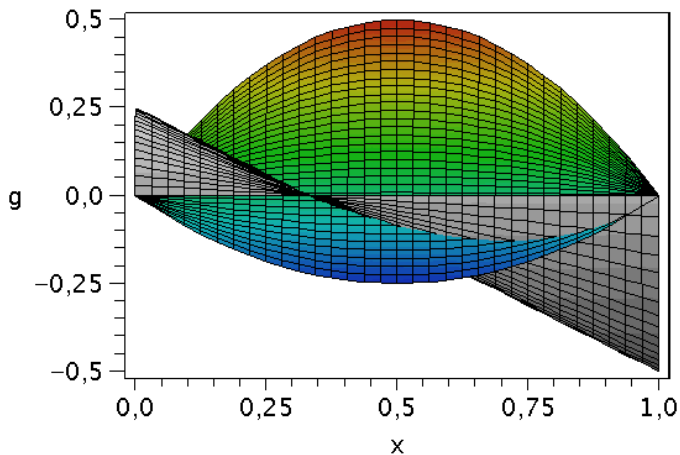
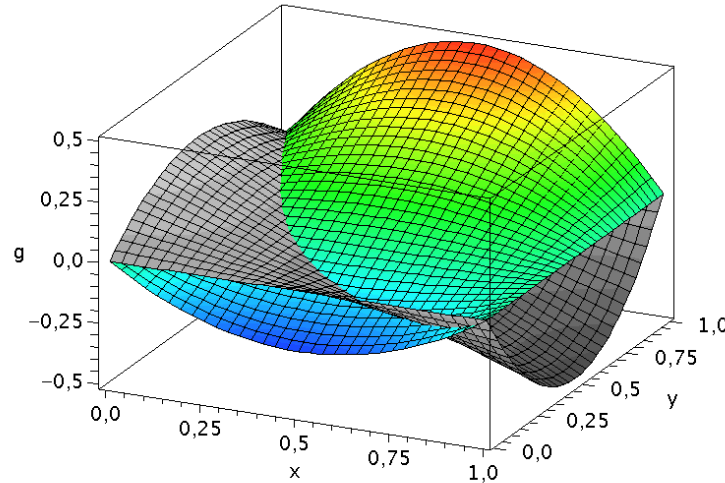
	Strat. 1	Strat. 2
Strat. 1	(2, -2)	(0, 0)
Strat. 2	(0, 0)	(1, -1)

Die Lösung der Gleichung erfolgt wiederum durch Integration bzw. kann mithilfe des Computers numerisch berechnet werden. Es wurde der Anfangswert zu  $(x(0), y(0)) = (0.05, 0.05)$  gewählt.



# Eigenschaften der Funktionen $g_A(x,y)$ und $g_B(x,y)$

Die das Bimatrix Spiel bestimmenden Funktionen  $g_A(x,y)$  (farbige Fläche) und  $g_B(x,y)$  (graue Fläche) sind in den unteren Abbildungen veranschaulicht. Das Spiel der Gruppe A gehört der Klasse der Koordinationsspiele an, das der Gruppe B der Klasse der Anti-Koordinationsspiele.



# Beispiel 2:

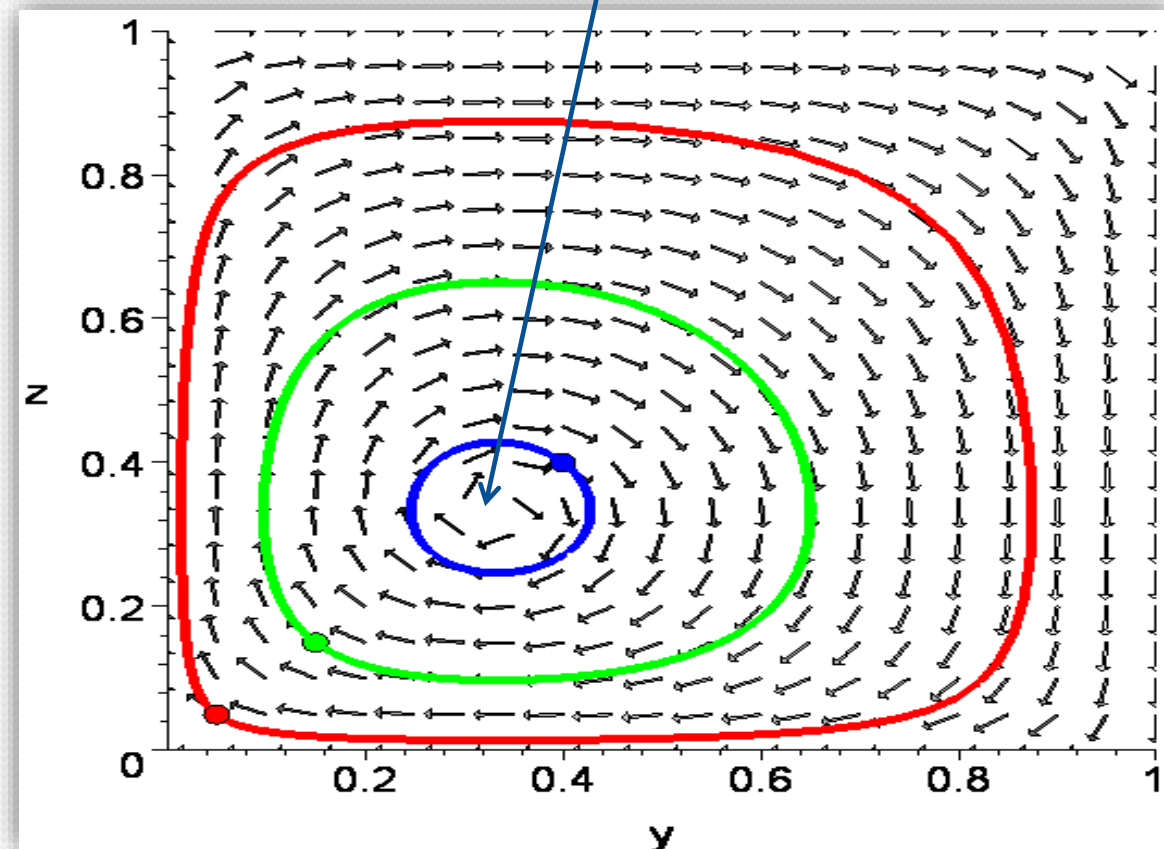
Klasse der Zentrumsspiele (Center Class)

	Strat. 1	Strat. 2
Strat. 1	(2, -2)	(0, 0)
Strat. 2	(0, 0)	(1, -1)

Das Phasenportrait des zweiten Beispiels besitzt das folgende Aussehen:

Die rechte Abbildung zeigt das zeitliche Verhalten von drei numerischen Lösungen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Dieses Bimatrixspiel besitzt keine evolutionär stabile Strategie, da die einzelnen Phasenraum-Trajektorien sich keinem Punkt annähern, sondern auf einer geschlossenen, zyklischen Bahn um das gemischte Nash-Gleichgewicht kreisen.

Zentrum: Gemischtes Nash-Gleichgewicht des Spiels



# Beispiel 3:

Klasse der Eckenspiele (Corner Class)

	Strat. 1	Strat. 2
Strat. 1	(-2, 2)	(0, 0)
Strat. 2	(0, 0)	(1, 1)

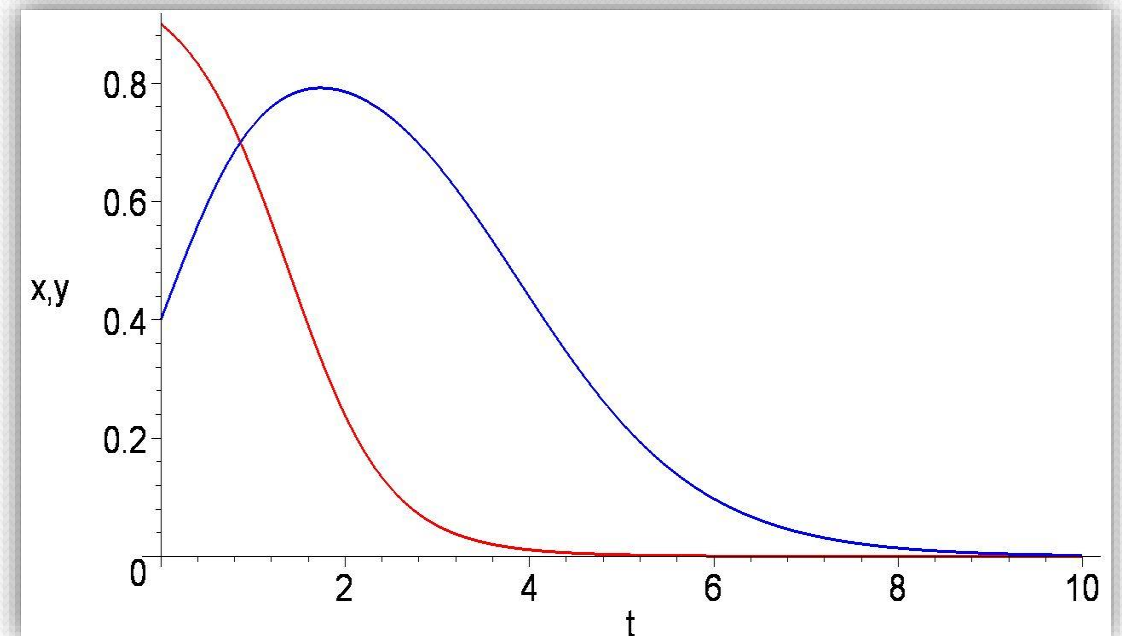
Das gekoppelte System von Differentialgleichung für dieses Beispiel lautet:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \cdot (-y(t) + x(t) \cdot y(t) + x(t) - 1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) \cdot (3 \cdot x(t) - 3 \cdot x(t) \cdot y(t) + y(t) - 1)$$

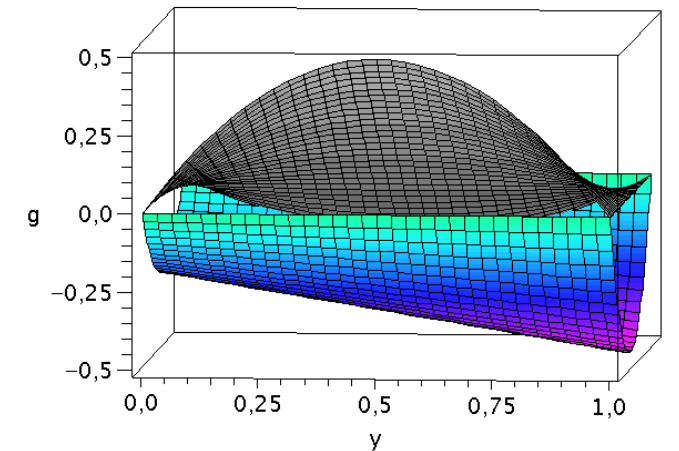
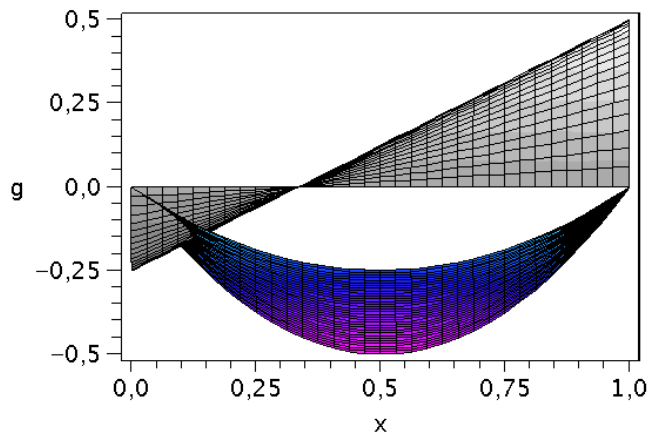
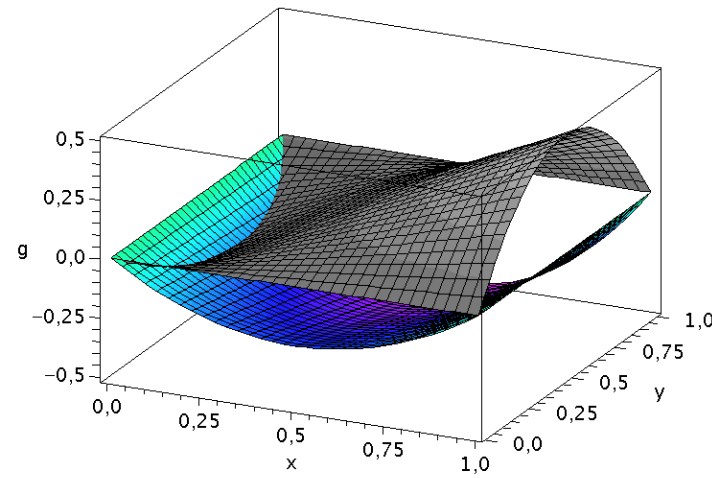
Die Lösung der Gleichung erfolgt wiederum durch Integration bzw. kann mithilfe des Computers numerisch berechnet werden. Es wurde der Anfangswert zu  $(x(0), y(0)) = (0.9, 0.4)$  gewählt.

Die rechte Abbildung zeigt eine numerische Lösung der obigen Gleichung, wobei der Anfangswert zu  $(x(0), y(0)) = (0.9, 0.4)$  gewählt wurde. Bei der Klasse der „Eckspiele“ gibt es eine evolutionär stabile Strategie, die unabhängig von der gewählten Anfangsbedingung stets von der Population angestrebt wird.



# Eigenschaften der Funktionen $g_A(x,y)$ und $g_B(x,y)$

Die das Bimatrix Spiel bestimmenden Funktionen  $g_A(x,y)$  (farbige Fläche) und  $g_B(x,y)$  (graue Fläche) sind in den unteren Abbildungen veranschaulicht. Das Spiel der Gruppe A gehört der Klasse der dominanten Spiele an, das der Gruppe B der Klasse der Koordinationsspiele.



# Beispiel 3:

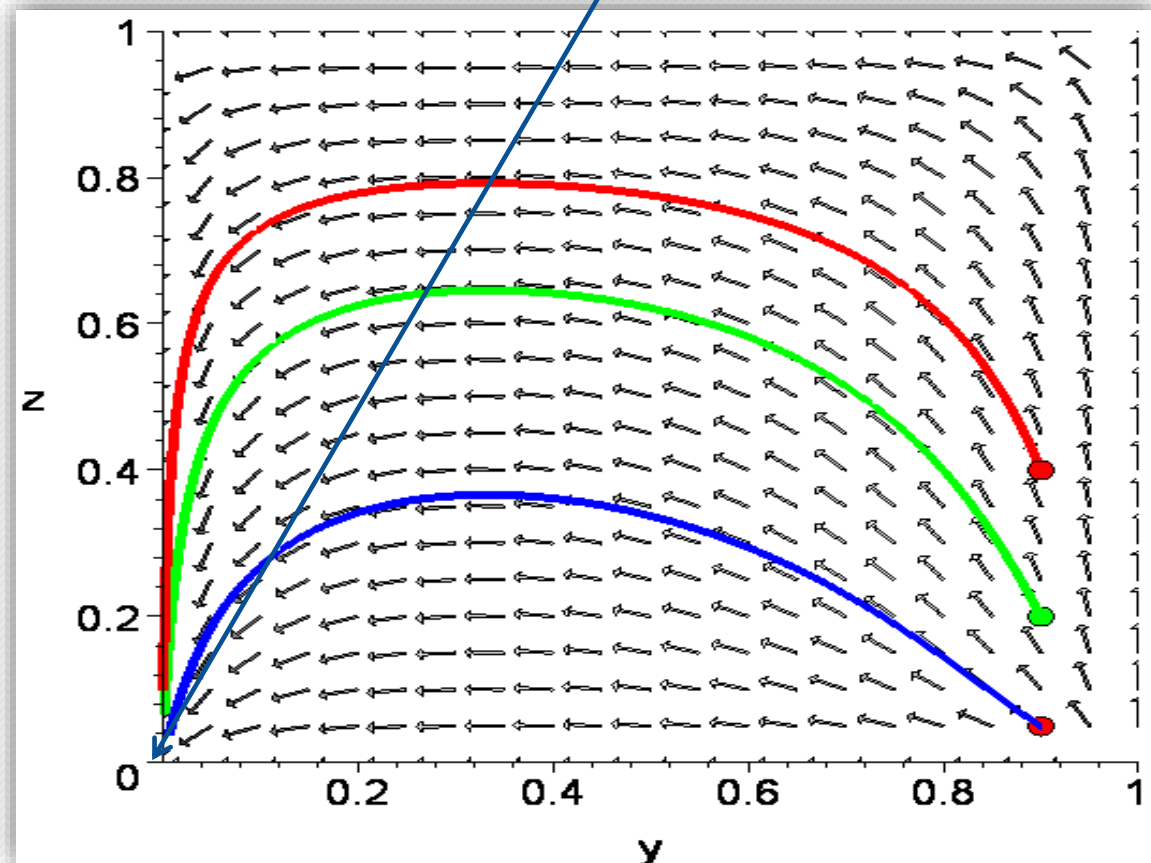
Klasse der Eckspiele (Corner Class)

Das Phasenportrait des dritten Beispiels besitzt das folgende Aussehen:

	Strat. 1	Strat. 2
Strat. 1	$(-2, 2)$	$(0, 0)$
Strat. 2	$(0, 0)$	$(1, 1)$

Die rechte Abbildung zeigt das zeitliche Verhalten von drei numerischen Lösungen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Dieses Bimatrixspiel besitzt eine evolutionär stabile Strategie, da es nur ein gemeinsames symmetrisches Nash-Gleichgewicht gibt  $((x,y)=(0,0))$ . Der rote Spieler besitzt sogar bei  $(0,0)$  eine dominante Strategie.

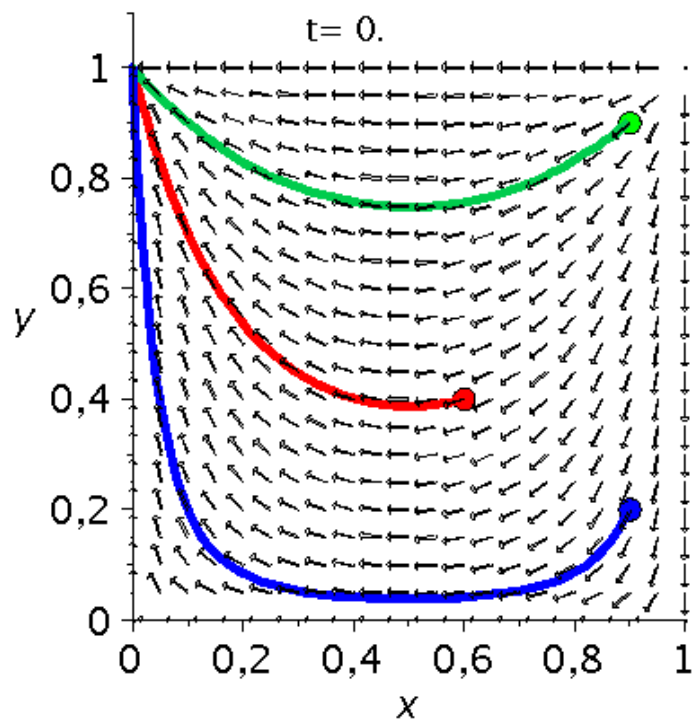
Einziges gemeinsames Nash-Gleichgewicht des Spiels



# Klassifizierung von Bi-Matrix Spielen

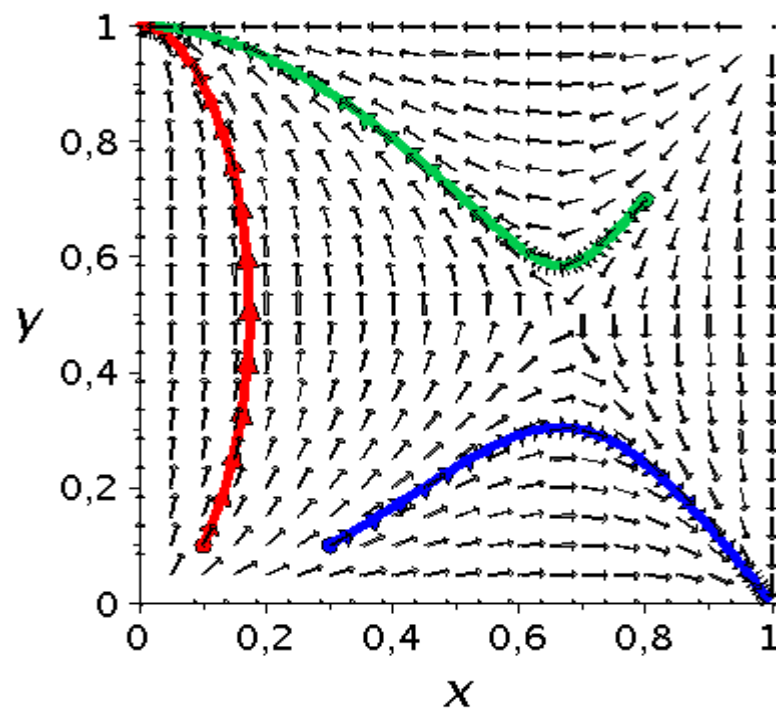
## Eckspiele

Die Spielklasse der Gruppe A  
oder der Gruppe B ist ein  
Dominantes Spiel



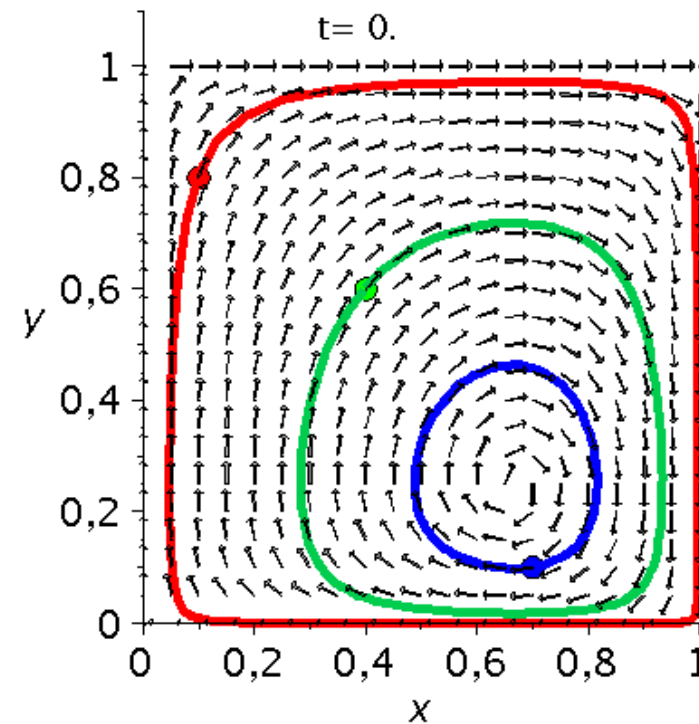
## Sattelspiele

Spiel A: Koordinationsspiel  
Spiel B: Koordinationsspiel  
oder  
Spiel A: Anti-Koordinationsspiel  
Spiel B: Anti-Koordinationsspiel



## Zentrumsspiele

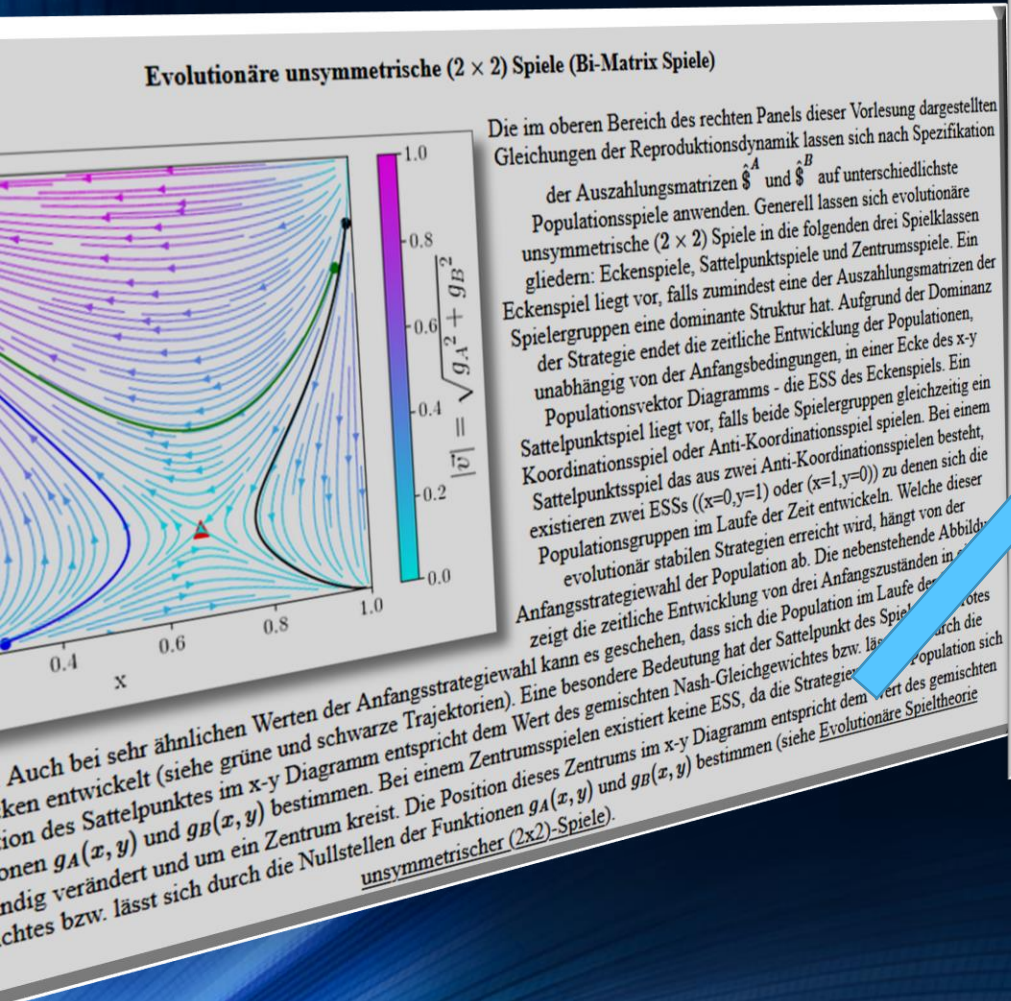
Spiel A: Koordinationsspiel  
Spiel B: Anti-Koordinationsspiel  
oder  
Spiel A: Anti-Koordinationsspiel  
Spiel B: Koordinationsspiel





# Jupyter Notebook

Auf der Internetseite der Vorlesung



## Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

### (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 02.11.2020

#### Erster Vorlesungsteil:

Klassifizierung evolutionärer Bi-Matrix Spiele ( unsymmetrische (2 x 2)-Spiele )

#### Einführung

In diesem Unterkapitel werden die unterschiedlichen Spieltypen evolutionärer Bi-Matrix Spiele ( unsymmetrische (2 x 2)-Spiele ) klassifiziert. Ausgangspunkt sind die folgenden allgemeinen Auszahlungsmatrizen der Spielergruppen A und B. Da es sich um unsymmetrische Auszahlungsmatrizen nehmen wir das folgende an:

$$\hat{\$}^B \neq (\hat{\$}^A)^T$$

$$\hat{\$}^A = \begin{pmatrix} \$_{11}^A & \$_{12}^A \\ \$_{21}^A & \$_{22}^A \end{pmatrix}, \quad \hat{\$}^B = \begin{pmatrix} \$_{11}^B & \$_{12}^B \\ \$_{21}^B & \$_{22}^B \end{pmatrix}$$

Unsymmetrische (2 x 2) Spiele lassen sich in die folgenden Spielklassen gliedern:

#### Die Klasse der Eckenspiele (engl.: corner class games )

Ein Eckenspiel liegt vor, falls eine der Auszahlungsmatrizen der Spielergruppen eine dominante Struktur hat; falls  $\hat{\$}^A$  oder  $\hat{\$}^B$  ein dominantes Spiel ist.

#### Die Klasse der Sattelpunktspiele (engl.: saddle class games )

Ein Sattelpunktspiel liegt vor, falls beide Spielergruppen gleichzeitig ein Koordinationsspiel oder Anti-Koordinationsspiel spielen.

#### Die Klasse der Zentrumsspiele (engl.: center class games )

Ein Zentrumsspiel liegt vor, falls Spielergruppe A ein Koordinationsspiel und Spielergruppe B ein Anti-Koordinationsspiel spielen; falls Spielergruppe A ein Anti-Koordinationsspiel und Spielergruppe B ein Koordinationsspiel spielen.

Zusätzlich befindet sich das Jupyter Notebook auch auf der OLAT Seite des Kurses

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
```

```
# Definition der Funktionen g_A und g_B
```

```
def gA(x,y,a,b,c,d):
    g=((a+d-c-b)*y + (b-d))*(x-x*x)
    return g
```

```
def gB(x,y,a,b,c,d):
    g=((a+d-c-b)*x + (b-d))*(y-y*y)
    return g
```

```
# Loesen der DGL
```

```
def solve_dgl(numpoints,tend,x0,y0,Aa,Ab,Ac,Ad,Ba,Bb,Bc,Bd):
    sol=np.empty([numpoints,3])
    t=np.linspace(0,tend,numpoints)
    dt=t[1]-t[0]
    sol[0].flat[0] = t[0]
    sol[0].flat[1] = x0
    sol[0].flat[2] = y0
    i = 1
    while i < len(sol):
        sol[i].flat[0] = t[i]
        dx=gA(sol[i-1,1],sol[i-1,2],Aa,Ab,Ac,Ad)*dt
        dy=gB(sol[i-1,1],sol[i-1,2],Ba,Bb,Bc,Bd)*dt
        sol[i].flat[1] = sol[i-1,1] + dx
        sol[i].flat[2] = sol[i-1,2] + dy
        i = i + 1
    return sol
```

```
# Groessenfestlegung der Labels usw. im Bild
```

```
params = {
    'text.usetex'      : True,
    'axes.titlesize'  : 22,
    'axes.labelsize'  : 20,
    'xtick.labelsize' : 20 ,
    'ytick.labelsize' : 20
}
matplotlib.rcParams.update(params)
```

## Weiterführende Links

- [Folien der 4. Vorlesung](#)
- [View Jupyter Notebook: Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [Download Jupyter Notebook: Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [Download Python Programm: Evolutionäre Spieltheorie symmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [View Jupyter Notebook: Evolutionäre Spieltheorie unsymmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [Download Jupyter Notebook: Evolutionäre Spieltheorie unsymmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [Download Python Programm: Evolutionäre Spieltheorie unsymmetrischer \(2x2\)-Spiele](#)
- [Maple Worksheet: Klassifizierung von symmetrischen evolutionären \(2x2\)-Spielen](#)
- [Maple Worksheet: Evolutionäre Bi-Matrix Spiele](#)

# Python Programm

Auf der Internetseite der Vorlesung

# Bi-Matrix Spiele mit Python V1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

# Definition der Funktionen g_A und g_B
def gA(x,y,a,b,c,d):
    g=((a+d-c-b)*y + (b-d))*(x-x*x)
    return g
def gB(x,y,a,b,c,d):
    g=((a+d-c-b)*x + (b-d))*(y-y*y)
    return g

# Loesen der DGL
def solve_dgl(numpoints,tend,x0,y0,Aa,Ab,Ac,Ad,Ba,Bb,Bc,Bd):
    sol=np.empty([numpoints,3])
    t=np.linspace(0,tend,numpoints)
    dt=t[1]-t[0]
    sol[0].flat[0] = t[0]
    sol[0].flat[1] = x0
    sol[0].flat[2] = y0
    i = 1
    while i < len(sol):
        sol[i].flat[0] = t[i]
        dx=gA(sol[i-1,1],sol[i-1,2],Aa,Ab,Ac,Ad)*dt
        dy=gB(sol[i-1,1],sol[i-1,2],Ba,Bb,Bc,Bd)*dt
        sol[i].flat[1] = sol[i-1,1] + dx
        sol[i].flat[2] = sol[i-1,2] + dy
        i = i + 1
    return sol

# Groessenfestlegung der Labels usw. im Bild
params = {
    'text.usetex'      : True,
    'axes.titlesize'  : 22,
    'axes.labelsize'  : 20,
    'xtick.labelsize' : 20 ,
    'ytick.labelsize' : 20
}
matplotlib.rcParams.update(params)
```

```
#Festlegung der Auszahlungsmatrix des unsymmetrischen (2x2)-Spiels, Anfangspopulation, Endzeit
Aa=10
Ab=4
Ac=9
Ad=5
Ba=10
Bb=4
Bc=7
Bd=5
tend=12
x0=0.6
y0=0.1

# Weitere Festlegungen
numpoints=1000

# Loesung der DGL fuer eine Anfangspopulation (x0,y0)
Loes=solve_dgl(numpoints,tend,x0,y0,Aa,Ab,Ac,Ad,Ba,Bb,Bc,Bd)

# Plotten des Bildes
plt.plot(Loes[:,1],Loes[:,2],c="black", linewidth=1.5, linestyle='-')
plt.plot(Loes[0,1],Loes[0,2], marker='o', color='grey', markersize=8)

# Achsenbeschriftungen usw.
plt.xlim(0,1)
plt.ylim(0,1)
plt.ylabel(r"$\rm y$")
plt.xlabel(r"$\rm x$")

#Ausgabe des Wertes des Populationsvektors zur Endzeit im Terminal
print "Zur Zeit t=", Loes[numpoints-1,0]
print "Der Wert von x ist: x=", Loes[numpoints-1,1]
print "Der Wert von y ist: y=", Loes[numpoints-1,2]

#Speichern der Bilder als .jpg- und .pdf-Datei
saveFig="./bimatrix.jpg"
plt.savefig(saveFig, dpi=100, bbox_inches="tight", pad_inches=0.05, format="jpg")
plt.show()
```

# Bi-Matrix Spiele mit Python V2 (Feldliniendiagramm)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

# Definition der Funktionen g_A und g_B
def gA(x,y,a,b,c,d):
    g=((a+d-c-b)*y + (b-d))*(x-x*x)
    return g
def gB(x,y,a,b,c,d):
    g=((a+d-c-b)*x + (b-d))*(y-y*y)
    return g

# Groessenfestlegung der Labels usw. im Bild
params = {
    'text.usetex'      : True,
    'axes.titlesize'  : 22,
    'axes.labelsize'  : 20,
    'xtick.labelsize' : 20 ,
    'ytick.labelsize' : 20
}
matplotlib.rcParams.update(params)

#Festlegung der Auszahlungsmatrix des
Aa=10
Ab=4
Ac=9
Ad=5
Ba=10
Bb=4
Bc=7
Bd=5
tend=12
x0=0.6
y0=0.1
```

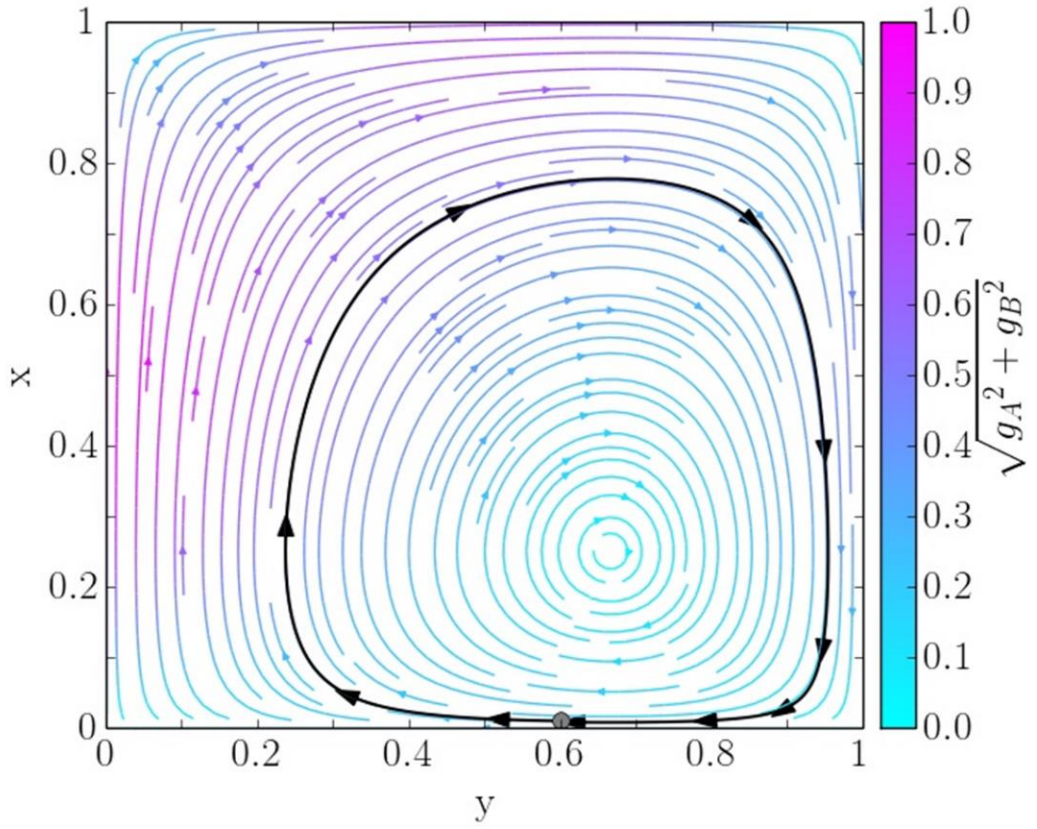
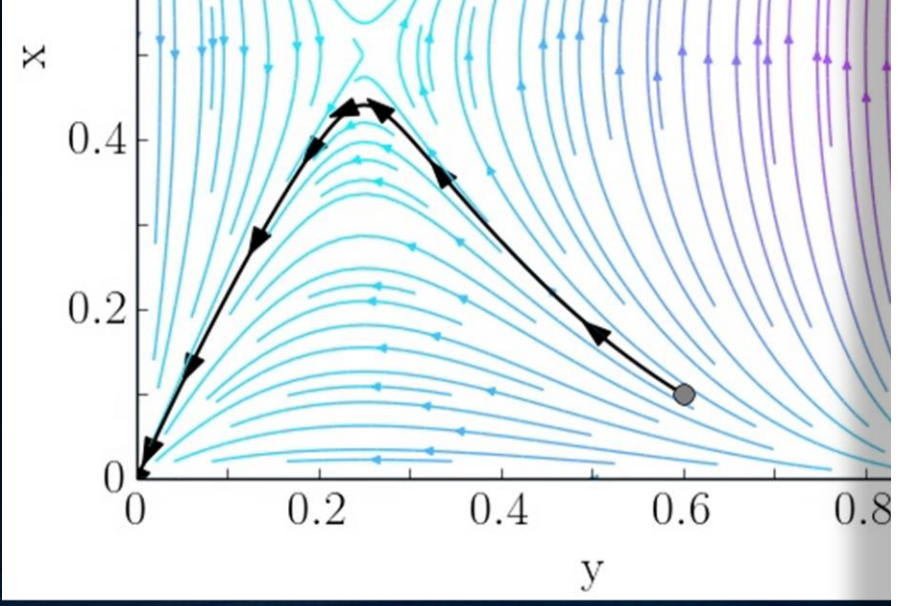
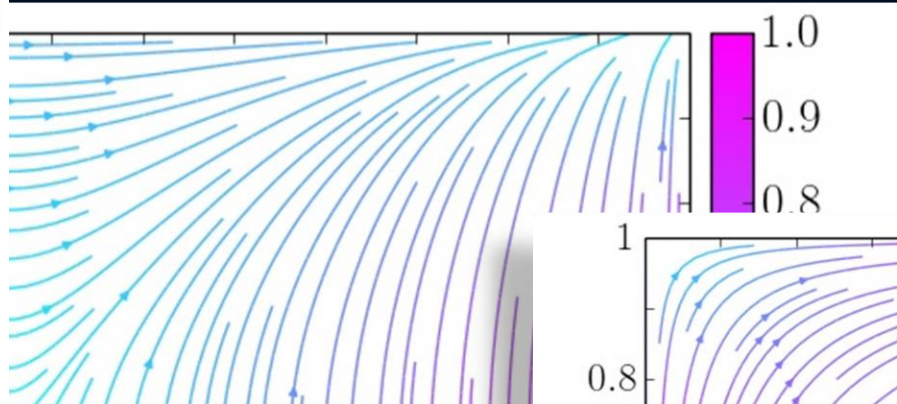
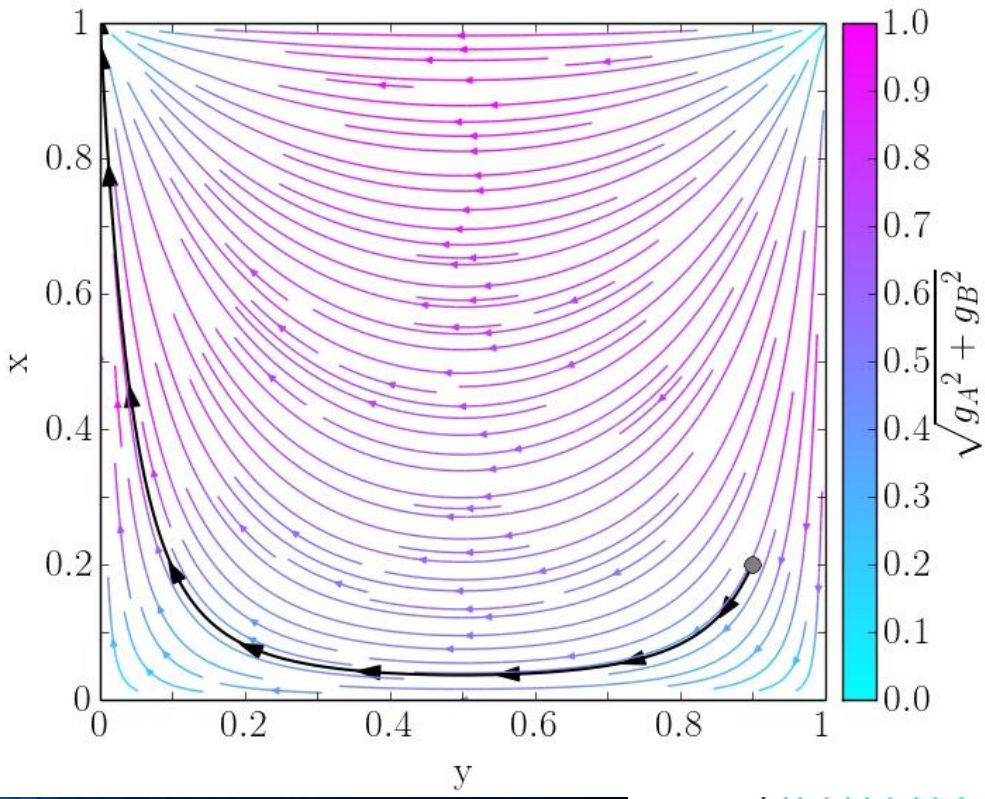
```
# Fuer die Darstellung des Feldliniendiagramms streamplot
SY,SX=np.mgrid[0:1:100j,0:1:100j]
SgA=gA(SX,SY,Aa,Ab,Ac,Ad)
SgB=gB(SX,SY,Ba,Bb,Bc,Bd)
# Die Farbe wird die Geschwindigkeit der Aenderung des Populationsvektors anzeigen
speed=np.sqrt(SgA*SgA + SgB*SgB)
colourspeed = speed/speed.max()

# Plotten des Bildes
strm = plt.streamplot(SX,SY,SgA,SgB,density=[2, 2], linewidth=1,color=colourspeed, cmap=plt.cm.cool)
# Erzeugung der nebenstehenden Farblegende colorbar
cbar=plt.colorbar(strm.lines,pad=0.02)
cbar.set_label(r'$\sqrt{\{g_A\}^2 + \{g_B\}^2}$',size=20)

# Achsenbeschriftungen usw.
plt.xlim(0,1)
plt.ylim(0,1)
plt.ylabel(r"$\rm y$")
plt.xlabel(r"$\rm x$")

#Speichern der Bilder als .jpg- und .pdf-Datei
saveFig="./bimatrix.jpg"
plt.savefig(saveFig, dpi=100,bbox_inches="tight",pad_inches=0.05,format="jpg")
plt.show()
```

# Bi-Matrix Spiele mit Python Version bimatrix1.py



# Aufgaben auf Lon-Cappa

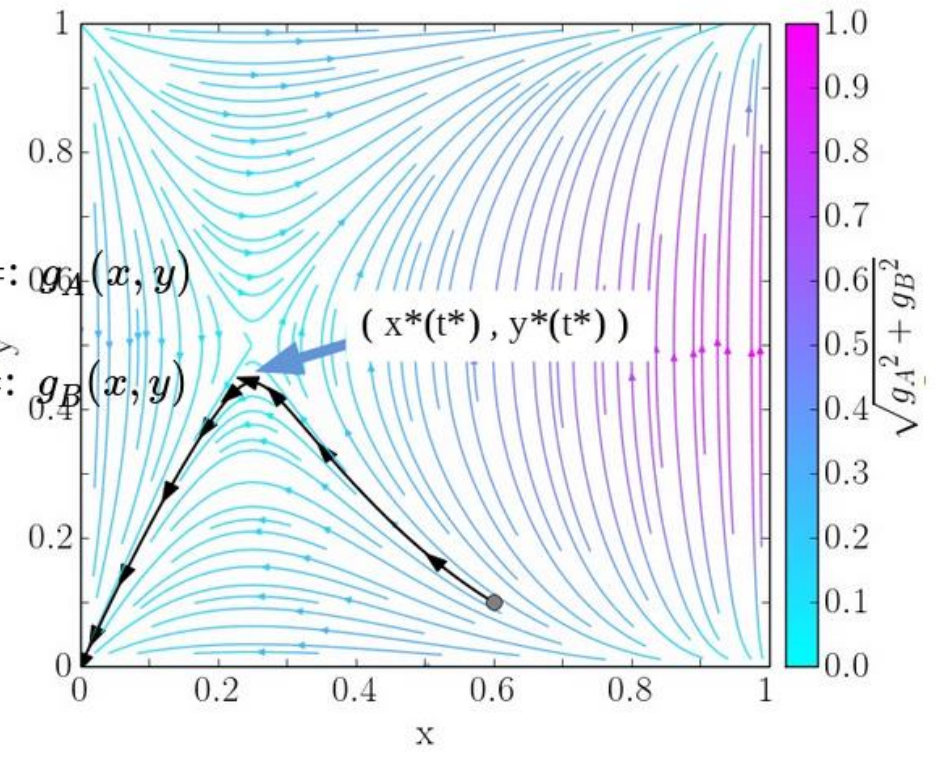
Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A:  $x(t) := x_1^A(t)$  und Gruppe B:  $y(t) := x_1^B(t)$ ) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[ \left( \beta_{11}^A + \beta_{22}^A - \beta_{12}^A - \beta_{21}^A \right) y(t) + \left( \beta_{12}^A - \beta_{22}^A \right) \right] \left( x(t) - (x(t))^2 \right) =: g_A(x, y)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[ \left( \beta_{11}^B + \beta_{22}^B - \beta_{12}^B - \beta_{21}^B \right) x(t) + \left( \beta_{12}^B - \beta_{22}^B \right) \right] \left( y(t) - (y(t))^2 \right) =: g_B(x, y)$$

Das durch die folgende Auszahlungstabelle definierte Bimatrix Spiel gehört der Klasse der Sattelpunktsspiele an.

A/B	$s_1^B$	$s_2^B$
$s_1^A$	( 10 , 10 )	( 4 , 7 )
$s_2^A$	( 9 , 4 )	( 5 , 5 )



$t^* =$   ,  $y^* =$   (bitte geben Sie den numerischen Wert auf mindestens 4 Nachkommastellen an; z.B. 0.4135 )

Antwort einreichen Versuche 0/5

Der Populationsvektor zur Zeit  $t=0$  sei  $(x(0)=0.6, y(0)=0.0565)$ . Der Anteil der Spieler in der Gruppe B die die Strategie  $s_1^B$  spielen nimmt zunächst zu, erreicht dann ein Maximum und nimmt dannach wieder ab (siehe nebenstehende Abbildung). Berechnen Sie den Zeitpunkt  $t^*$  an dem der maximale Wert  $y^*$  erreicht wird.