Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
13.11.2020

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

2. Vorlesung

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die freiwilligen Übungstermine in diesem Semester nur Online statt.

Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung der Inhalte der 1. Vorlesung
- Einführung in die Spieltheorie
  - Definition: Nash-Gleichgewichte und Dominante Strategien
  - Gemischte Erweiterung eines Spiels (gemischte Strategien)
  - Gemischte Auszahlungsfunktion
  - Gemischtes Nash-Gleichgewicht
  - Gemischtes Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd und Angsthasen Spiel
  - Nash-Gleichgewichte bei (2 Spieler)-(3 Strategien) Spielen
  - Gemischtes Nash-Gleichgewicht im Stein-Schere-Papier Spiel
  - Entwurf eines Spiels am Beispiel des „Dilemma des Wettrüsten“ Spiels

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
  Nur Online/Virtuell
  Live-Streaming (synchrone Lehrangebote, Zoom Meetings):
  Vorlesungstermine: Freitags von 15.00-17.00 Uhr
  Übungstermin 1: Freitags von 13.30-15.00 Uhr
  Übungstermin 2: Freitags von 17.00-18.30 Uhr

- Vorlesungs-Materialien (asynchronen Lehrangebote):
  http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/VPSOC/ bzw.
  http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/ VPSOC / VPSOCorona.html

- Übungsaufgaben auf der Online-Lernplatform Lon Capa:
  http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/

- Weitere Materialien auf der Online-Lernplatform OLAT
  http://olat.server.uni-frankfurt.de

- Generelles zur Vorlesung:
  Bei erfolgreicher Teilnahme 5 Creditpoints
  Benoteter Schein mittels einer mündlichen Prüfung (30 Min.)

- Voraussetzungen:
  Laptop/PC mit Kamera und Ton
  Programmierkenntnisse von Vorteil

I.1.1 Definition eines Spiels

Die formale mathematische Definition eines *Simultanen (N Spieler)-(m Strategien) Spiels in strategischer Form mit Auszahlung* (siehe z.B. [2,3]) benötigt lediglich die Angabe dreier Größen: Die Menge $\mathcal{I}$ der Spieler, die Menge (der Raum) $\mathcal{S}$ der Strategien der Spieler und ihre Auszahlungsfunktion (Präferenzordnungen) \$.

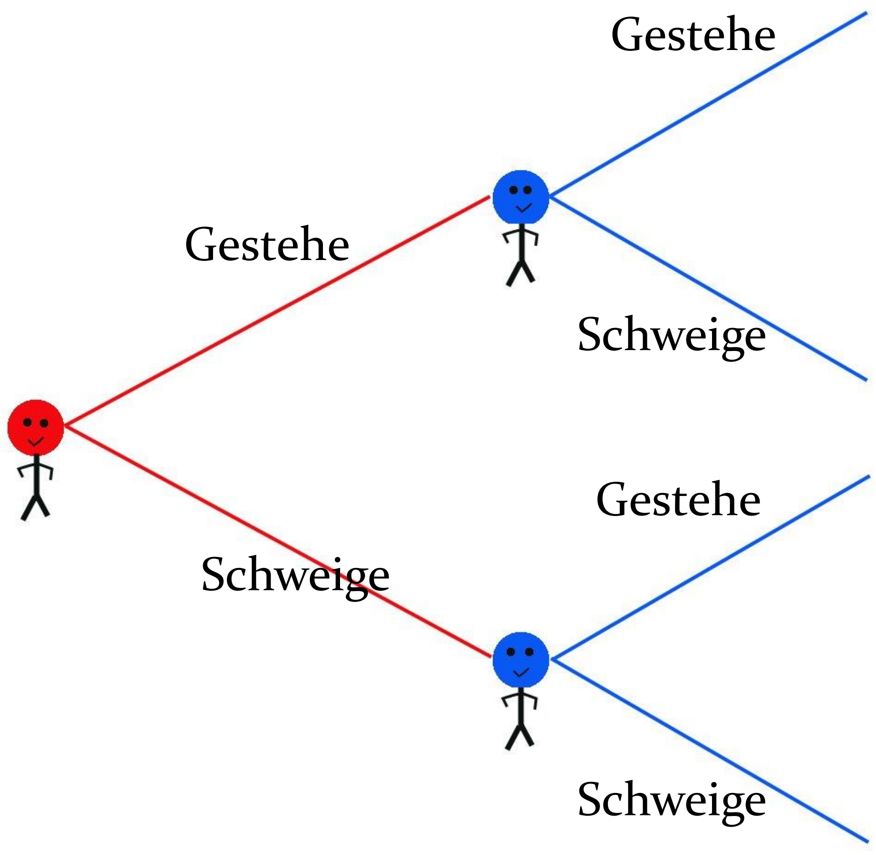
Ein Spiel $\Gamma := (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \$)$ in strategischer Form mit Auszahlung ist hinreichend definiert, wenn die folgenden drei Größen bekannt sind:

- Menge der Spieler: $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$
  Die Menge der Spieler $\mathcal{I}$ kann unter Umständen aus unterschiedlichen Teilmengen bestehen, die ihrerseits unterschiedliche Strategiemengen $\mathcal{S}$ besitzen. In sozio-ökonomischen Netzwerken stellen die Spieler die jeweiligen Knoten des Netzwerkes dar (näheres siehe Teil II).
- Menge der reinen Strategien der Spieler: $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^2 \times \ldots \times \mathcal{S}^N$
  Jeder Spieler $\mu \in \mathcal{I}$ besitzt eine eigene Menge an reinen Strategien $\mathcal{S}^\mu = \left\{s_1^\mu, s_2^\mu, \dots, s_{m_\mu}^\mu\right\}$, wobei jede dieser m_μ Strategien eine für ihn mögliche Entscheidung darstellt.
- Präferenzordnungen der Spieler, quantifiziert durch eine vektorwertige Auszahlungsfunktion:
  $\$ = \left(\$^1, \$^2, \dots, \$^N\right) : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^N$
  Nachdem jeder Spieler (ohne die Entscheidung seiner Mitspieler zu kennen) eine Strategie aus seiner Strategienmenge $\mathcal{S}^\mu$ ausgewählt hat, beurteilt er die entstehende Strategienkombination $\mathcal{S}$ entsprechend seiner Präferenzordnung (Auszahlungsfunktion) $\$^\mu$.

Um diese formale Definition im einzelnen zu erklären, beschränken sich die folgenden Darlegungen auf den einfachsten Fall des simultanen

Das Gefangenendilemma

	G	S
G	(-7 , -7)	(-1 , -9)
S	(-9 , -1)	(-3 , -3)



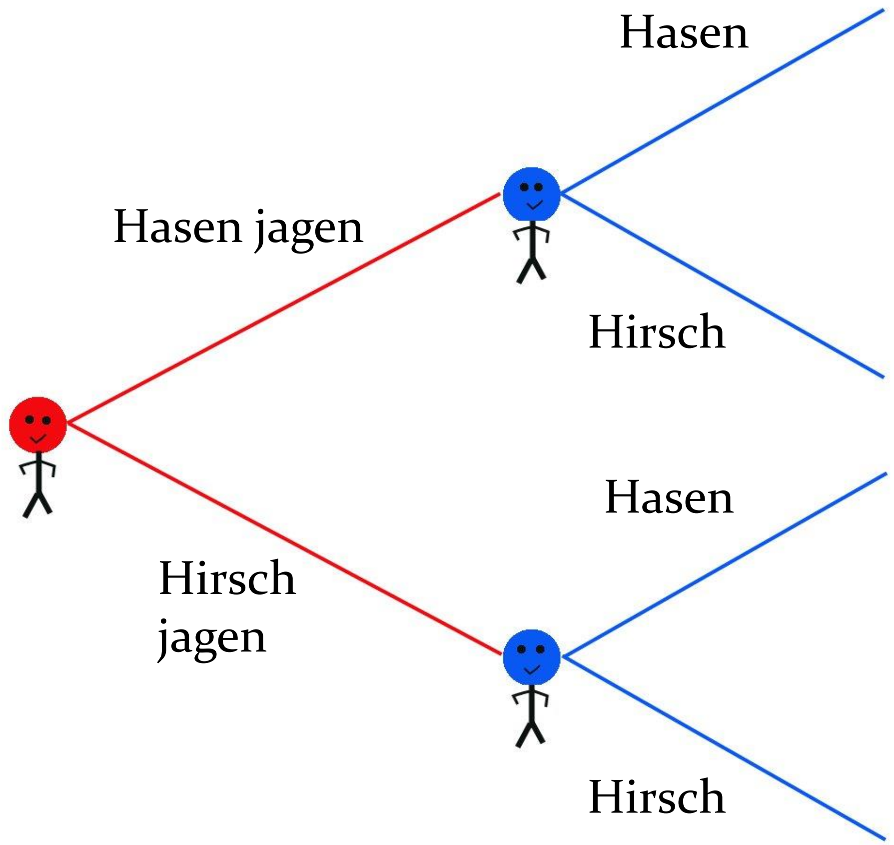
Bonnie und Clyde werden nach einem missglückten Banküberfall geschnappt und in verschiedenen Zellen untergebracht. Wenn beide schweigen kann der Staatsanwalt sie nur wegen verbotenen Waffenbesitzes für drei Jahre hinter Gitter bringen. Verrät jedoch einer den anderen, dann bekommt der Geständige als Zeuge der Anklage nur für ein Jahr hinter Gitter – der Nichtgeständige muss dann aber für neun Jahre ins Gefängnis. Gestehen beide, so müssen sie sieben Jahre absitzen.

Das Nash-Gleichgewicht im Gefangenendilemma ist eine Dominante Strategie

	Spieler B **Gestehe**	Spieler B **Gestehe nicht**
Spieler A **Gestehe**	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Spieler A **Gestehe nicht**	(-9 , -1)	(-3 , -3)

Rousseaus Hirschjagd - Spiel

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2 , 2)	(4 , 0)
Hirsch	(0 , 4)	(5 , 5)



Zwei Jägern ist es im Laufe der Jagd gelungen einen Hirsch und vier Hasen einzukreisen. Die Jäger stehen nun vor der Entscheidung die Hasen entkommen zu lassen und gemeinsam den Hirsch zu erlegen oder sofort das Feuer auf die Hasen zu eröffnen. Entscheiden sich beide dafür den Hirsch zu erlegen, dann hat der Hirsch keine Chance. Einen Hirsch kann man für 10 Goldmünzen verkaufen. Entscheiden sich beide für die Hasenjagd, dann erschießt jeder Jäger zwei Hasen, für die man jeweils eine Goldmünze bekommt. Entscheidet sich jedoch nur einer für die Hirschjagd, so kann der Hirsch entkommen und derjenige der sich für die Hasenjagd entschieden hat kann alle vier Hasen erlegen.

Nash-Gleichgewichte im Hirschjagd-Spiel

	Spieler B **Hasen** jagen	Spieler B **Hirsch** jagen
Spieler A **Hasen** jagen	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A **Hirsch** jagen	(0 , 4)	(5 , 5)

Definition: Dominante Strategie

Im Folgenden werden zwei fundamentale Gleichgewichtskonzepte der Spieltheorie vorgestellt. Wir beschränken uns wieder auf ein *Simultanes (N Spieler)-(m Strategien) Spiel in strategischer Form mit Auszahlung*. Eine Strategienkombination aller Spieler $\boldsymbol{s} = \left(s^1, s^2, .., s^N\right) \in \mathcal{S}$ setzt sich aus der gewählten Strategie des μ-ten Spielers $s^\mu \in \mathcal{S}^\mu$ und der Strategienkombination aller Spieler mit Ausnahme des μ-ten Spielers $\boldsymbol{s}^{-\mu} := \left(s^1, s^2, .., s^{\mu-1}, s^{\mu+1}, .., s^N\right) \in \mathcal{S}^{-\mu}$ zusammen; also $\boldsymbol{s} = \left(s^\mu, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \in \mathcal{S} = \mathcal{S}^\mu \times \mathcal{S}^{-\mu}$.

Eine Strategienkombination $\boldsymbol{s}^\dagger = \left(s^{1\dagger}, s^{2\dagger}, .., s^{N\dagger}\right)$ ist ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, wenn die folgenden Bedingung für alle $\mu \in \mathcal{I}$ erfüllt ist:

$$\text{Gleichgewicht in dominanten Strategien:}$$
$$\$^\mu\left(s^{\mu\dagger}, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \;\geq\; \$^\mu\left(s^\mu, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \quad \forall\; \mu \in \mathcal{I} \;\text{ und }\; \forall\; \boldsymbol{s} = \left(s^\mu, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \in \mathcal{S}$$

Beispiel: Die dominante Strategie im Gefangenendilemma

	Spieler B Gestehe S1	Spieler B Gestehe nicht S2
Spieler A Gestehe S1	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Spieler A Gestehe nicht S2	(-9 , -1)	(-3 , -3)

Spieler A: $\$^A\!: \; S^A \times S^B \rightarrow \Re$

$$\$^A(S1, S1) = -7 \geq -9 = \$^A(S2, S1)$$

$$\$^A(S1, S2) = -1 \geq -3 = \$^A(S2, S2)$$

Spieler B: $\$^B\!: \; S^A \times S^B \rightarrow \Re$

$$\$^B(S1, S1) = -7 \geq -9 = \$^B(S1, S2)$$

$$\$^B(S2, S1) = -1 \geq -3 = \$^B(S2, S2)$$

Definition: Nash-Gleichgewicht

Eine Strategienkombination $s^* = \left(s^{1*}, s^{2*}, .., s^{N*}\right)$ nennt man ein Nash-Gleichgewicht, falls die folgenden Bedingung für alle $\mu \in \mathcal{I}$ gilt:

Nash-Gleichgewicht:

$$\$^{\mu}\left(s^{\mu *}, s^{-\mu *}\right) \;\geq\; \$^{\mu}\left(s^{\mu}, s^{-\mu *}\right) \quad \forall\; \mu \in \mathcal{I} \;\text{ und }\; \forall\; s^{\mu} \in \mathcal{S}^{\mu}$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist demnach eine Strategienkombination, von der aus kein Spieler einen Vorteil erhalten würde, wenn er von seiner Strategie abweichen würde - er würde keine größere Auszahlung erhalten. Es gilt, dass jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien auch ein Nash-Gleichgewicht ist. Im folgenden werden die beiden definierten Gleichgewichtskonzepte am Beispiel zweier simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiele illustriert.

Beispiel: Nash-Gleichgewichte im Hirschjagd-Spiel

	Spieler B **Hasen** jagen S1	Spieler B **Hirsch** jagen S2
Spieler A **Hasen** jagen S1	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A **Hirsch** jagen S2	(0 , 4)	(5 , 5)

Beweis: (S1, S1) ist ein Nash-Gleichgewicht des Spiels

Spieler A: $\$^{A}\colon\ S^{A} \times S^{B} \rightarrow \Re$

$\$^{A}(S1, S1) = 2 \geq 0 = \$^{A}(S2, S1)$

Spieler B: $\$^{B}\colon\ S^{A} \times S^{B} \rightarrow \Re$

$\$^{B}(S1, S1) = 2 \geq 0 = \$^{B}(S1, S2)$

Beispiel eines (2 Personen)-(3 Strategien) Spiels:

Schere-Stein-Papier

$(2-\mathit{Personen})-(3-\mathit{Strategien})-\mathit{Spiel}\quad \Gamma:$

$\Gamma := (\mathrm{A}, (\mathrm{S}^1, \mathrm{S}^2), (\$^1, \$^2))$

Menge der Spieler $:\quad \mathrm{A} = \{1,2\} = \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$

Strategienmenge des 1 - ten Spielers (Alice) :

$\mathrm{S}^1 = \{s_1^1, s_2^1, s_3^1\} = \{\mathit{Stein}, \mathit{Schere}, \mathit{Papier}\}$

Strategienmenge des 2 - ten Spielers :

$\mathrm{S}^2 = \{s_1^1, s_2^1, s_3^1\} = \{\mathit{Stein}, \mathit{Schere}, \mathit{Papier}\}$

Auszahlungsfunktion des 1. und 2. Spielers :

$\$^1 : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \to \Re$ und $\$^2 : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \to \Re$ mit

$\$^1(\mathit{Stein}, \mathit{Stein}) = 0$ und $\$^2(\mathit{Stein}, \mathit{Stein}) = 0$

$\$^1(\mathit{Stein}, \mathit{Schere}) = 1$ und $\$^2(\mathit{Stein}, \mathit{Schere}) = -1$

$\$^1(\mathit{Stein}, \mathit{Papier}) = -1$ und $\$^2(\mathit{Stein}, \mathit{Papier}) = 1$

...

	Stein	Schere	Papier
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Beispiel: Zwei Spieler – drei Strategien

Gibt es eine dominante Strategie? Geben Sie die Nash-Gleichgewichte an.

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(1 , 3)	(2 , 7)	(3 , 9)
Strategie 2	(2 , 1)	(3 , 1)	(3 , 8)
Strategie 3	(3 , 1)	(2 , 1)	(5 , 3)

(Strategie 3 , Strategie 3) !

Die Strategienkombination (**Strategie 3** , **Strategie 3**) ist das einzige Nash-Gleichgewicht dieses unsymmetrischen Spiels. Es gibt keine dominante Strategie.

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(1 , 3)	(2 , 7)	(3 , 9)
Strategie 2	(2 , 1)	(3 , 1)	(3 , 8)
Strategie 3	(3 , 1)	(2 , 1)	(5 , 3)

Mathematische Überprüfung des Nash-Gleichgewichtes

Behauptung:
(S3,S3) ist Nash-Gleichgewicht.

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(1 , 3)	(2 , 7)	(3 , 9)
Strategie 2	(2 , 1)	(3 , 1)	(3 , 8)
Strategie 3	(3 , 1)	(2 , 1)	(5 , 3)

Beweis:

Spieler A: $\$^A\colon\ S^A \times S^B \rightarrow \Re$

$\$^A(S3, S3) = 5 \geq 3 = \$^A(S2, S3)$

$\$^A(S3, S3) = 5 \geq 3 = \$^1(S1, S3)$

Spieler B: $\$^B\colon\ S^A \times S^B \rightarrow \Re$

$\$^B(S3, S3) = 3 \geq 1 = \$^B(S3, S2)$

$\$^B(S3, S3) = 3 \geq 1 = \$^B(S3, S1)$

Schere-Stein-Papier

Kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien!

Es gibt keine dominante Strategie und auch keine Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien

	Stein	**Schere**	**Papier**
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Gemischte Strategien

Die Menge der gemischten Strategien der Spieler $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}^1 \times \tilde{\mathcal{S}}^2 \times \ldots \times \tilde{\mathcal{S}}^N$ setzt sich aus den einzelnen Mengen der gemischten Strategien der Spieler zusammen. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers $\mu \in \mathcal{I}$ ($\tilde{\mathcal{S}}^\mu$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien $\mathcal{S}^\mu$ verstanden werden, wobei die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien des Spielers μ aus m_μ reellwertigen Zahlen bestehen, die folgenden Normalisierungsbedingungen unterliegen:

$$\tilde{\mathcal{S}}^\mu = \left\{ (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu, \ldots, \tilde{s}_{m_\mu}^\mu) \mid \sum_{i=1}^{m_\mu} \tilde{s}_i^\mu = 1, \tilde{s}_i^\mu \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m_\mu \right\}$$

Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien

Die einzelnen Werte $\tilde{s}_i^\mu$ können als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie i interpretiert werden. Unter Verwendung der gemischten Strategien lässt sich eine gemischte Auszahlungsfunktion der Spieler wie folgt definieren:

$$\tilde{\$} = \left(\tilde{\$}^1, \tilde{\$}^2, \ldots, \tilde{\$}^N\right) : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathbb{R}^N \,, \text{ wobei } \quad \tilde{\$}^\mu(\tilde{s}^1, \tilde{s}^2, \ldots, \tilde{s}^N) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \ldots \sum_{i_N=1}^{m_N} \$^\mu(s^1_{i_1}, s^2_{i_2}, \ldots, s^N_{i_N}) \prod_{\nu=1}^{N} \tilde{s}^\nu_{i_\nu}$$

Im folgenden wird das Konzept der gemischten Erweiterung für den Fall eines (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels illustrieren. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers A ($\tilde{\mathcal{S}}^A$) und B ($\tilde{\mathcal{S}}^B$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien ($\mathcal{S}^A$ und $\mathcal{S}^B$) verstanden werden. Die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien eines Spielers $\mu = A, B$ ($\tilde{\mathbf{s}}^\mu = (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu) \in \mathcal{S}^\mu$) besteht aus zwei reellwertigen Zahlen ($\tilde{s}_1^\mu \in [0,1]$ und $\tilde{s}_2^\mu \in [0,1]$) und kann als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie 1 ($\tilde{s}_1^\mu$) bzw. der Strategie 2 ($\tilde{s}_2^\mu$) interpretiert werden. Desweiteren gilt die folgende Normalisierungsbedingung: $\tilde{s}_1^\mu + \tilde{s}_2^\mu = 1 \; \forall \, \mu = A, B$. Unter Verwendung der Auszahlungsmatrizen des Spielers A ($\hat{\$}^A$) und B ($\hat{\$}^B$) schreibt sich die gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers $\mu = A, B$ wie folgt:

$$\tilde{\$}^\mu : \left(\tilde{\mathcal{S}}^A \times \tilde{\mathcal{S}}^B\right) \to \mathbb{R}$$

$$\tilde{\$}^\mu((\tilde{s}_1^A, \tilde{s}_2^A), (\tilde{s}_1^B, \tilde{s}_2^B)) = \$^\mu_{11} \tilde{s}_1^A \tilde{s}_1^B + \$^\mu_{12} \tilde{s}_1^A \tilde{s}_2^B + \$^\mu_{21} \tilde{s}_2^A \tilde{s}_1^B + \$^\mu_{22} \tilde{s}_2^A \tilde{s}_2^B$$

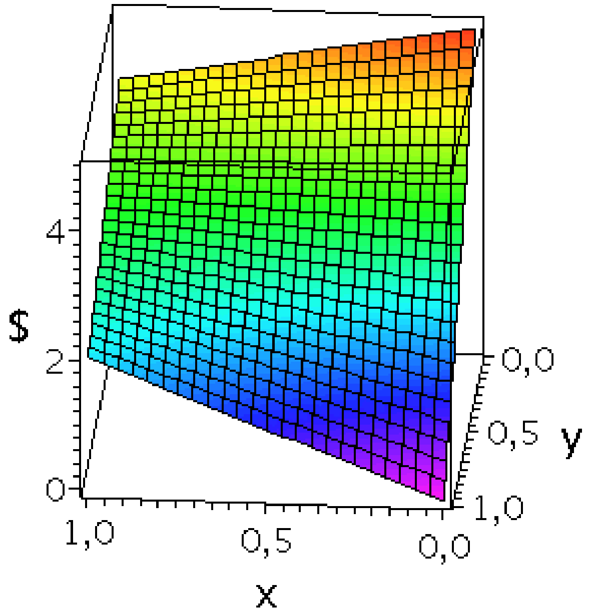
Gemischte Auszahlungsfunktion im (2x2)-Spiel

Aufgrund der Normalisierungsbedingung vereinfacht sich die gemischte Auszahlungsfunktion wie folgt:

$$\tilde{\$}^{\mu} : ([0,1] \times [0,1]) \to \mathbb{R}$$
$$\tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B}) = \$^{\mu}_{11}\tilde{s}^{A}\tilde{s}^{B} + \$^{\mu}_{12}\tilde{s}^{A}(1-\tilde{s}^{B}) + \$^{\mu}_{21}(1-\tilde{s}^{A})\tilde{s}^{B} + \$^{\mu}_{22}(1-\tilde{s}^{A})(1-\tilde{s}^{B})$$

, wobei $\tilde{s}^{A} := \tilde{s}^{A}_{1}$, $\tilde{s}^{B} := \tilde{s}^{B}_{1}$, $\tilde{s}^{A}_{2} = 1 - \tilde{s}^{A}_{1}$ und $\tilde{s}^{B}_{2} = 1 - \tilde{s}^{B}_{1}$.

Auszahlung an Spieler A

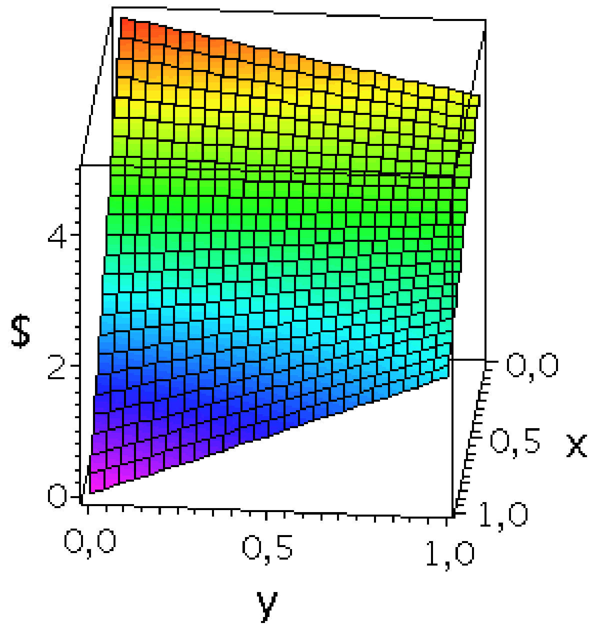


Auszahlungsfunktionen im Hirschjagt-Spiel

$$\tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B}) = \tilde{\$}^{A}(x, y)$$
$$\tilde{\$}^{B}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B}) = \tilde{\$}^{B}(x, y)$$
$$x, y \in [0,1]$$

	Spieler B Hasen jagen	Spieler B Hirsch jagen
Spieler A Hasen jagen	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A Hirsch jagen	(0 , 4)	(5 , 5)

Auszahlung an Spieler B



Gemischte Auszahlungsfunktion im (2x2)-Spiel
Beispiel Hirschjagd-Spiel

$$\tilde{\$}^{\mathrm{A}}(\tilde{s}^{A},\tilde{s}^{B}) = \tilde{\$}^{\mathrm{A}}(x,y) = \$^{A}_{11}\,xy + \$^{A}_{12}\,x(1-y) + \$^{A}_{21}(1-x)y + \$^{A}_{22}(1-x)(1-y)$$

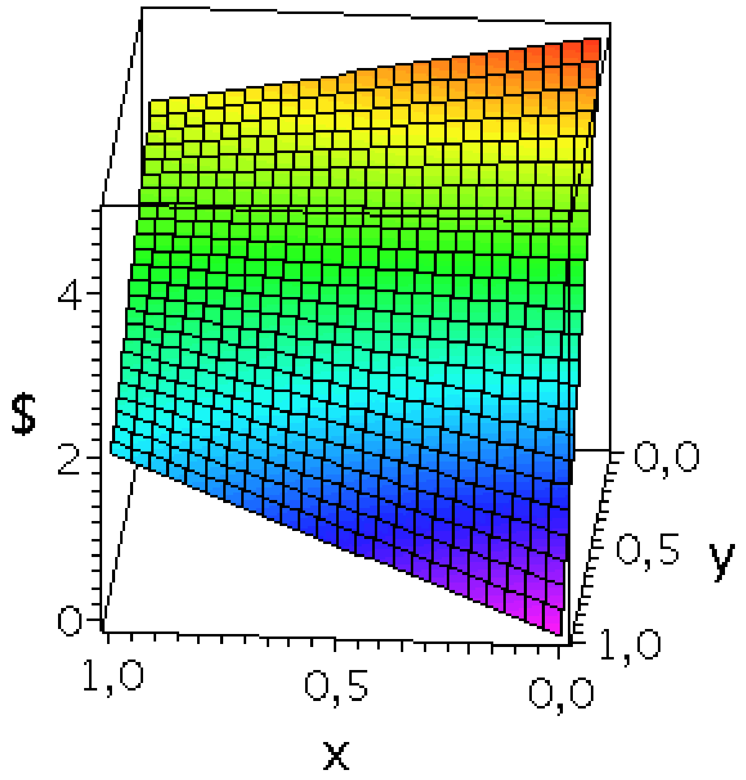
$$= 2xy + 4x(1-y) + 0(1-x)y + 5(1-x)(1-y)$$

$$= 2xy + 4x - 4xy + 5 - 5x - 5y + 5xy$$

$$= 3xy - x - 5y + 5$$

	Spieler B **Hasen** jagen	Spieler B **Hirsch** jagen
Spieler A **Hasen** jagen	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A **Hirsch** jagen	(0 , 4)	(5 , 5)

Auszahlung an Spieler A



Dominante Strategien und Nash-Gleichgewicht

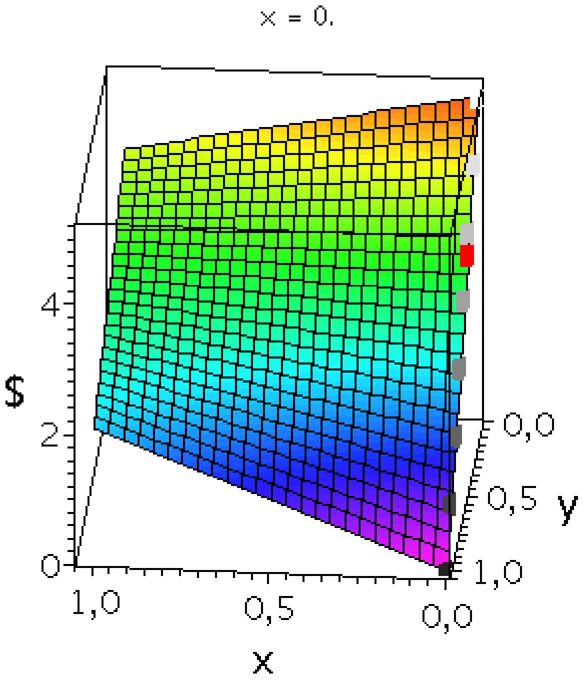
mit gemischter Auszahlungsfunktion

Eine Strategienkombination $(\tilde{s}^{A\dagger}, \tilde{s}^{B\dagger})$ ist ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Gleichgewicht in dominanten Strategien:

$$\tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^{A\dagger}, \tilde{s}^{B}) \;\geq\; \tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B}) \quad \forall\; \mu = A, B \text{ und } \tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B} \in [0,1]$$

Eine Strategienkombination $(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*})$ nennt man ein Nash-Gleichgewicht, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:



Nash-Gleichgewicht:

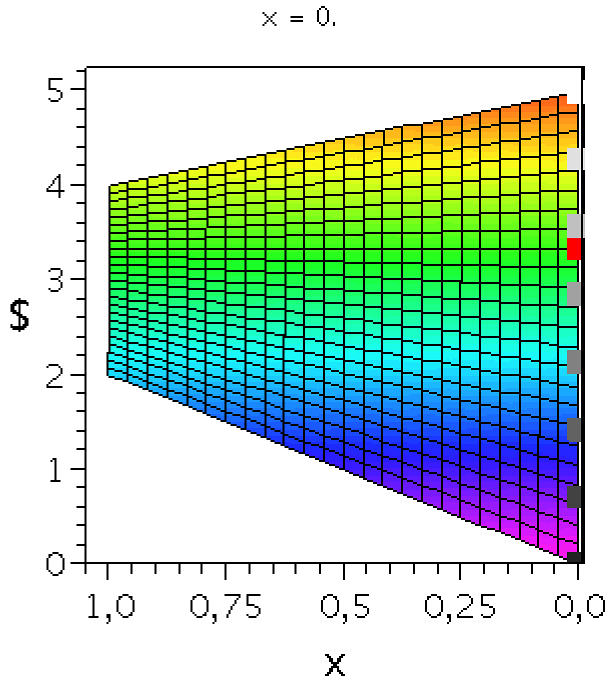
$$\tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*}) \;\geq\; \tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B*}) \quad \forall\; \tilde{s}^{A} \in [0,1]$$

$$\tilde{\$}^{B}(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*}) \;\geq\; \tilde{\$}^{B}(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B}) \quad \forall\; \tilde{s}^{B} \in [0,1]$$

Auszahlungsfunktion des Spielers A im Hirschjagd-Spiel

$$\tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B}) = \tilde{\$}^{A}(x, y)$$

$$x, y \in [0,1]$$



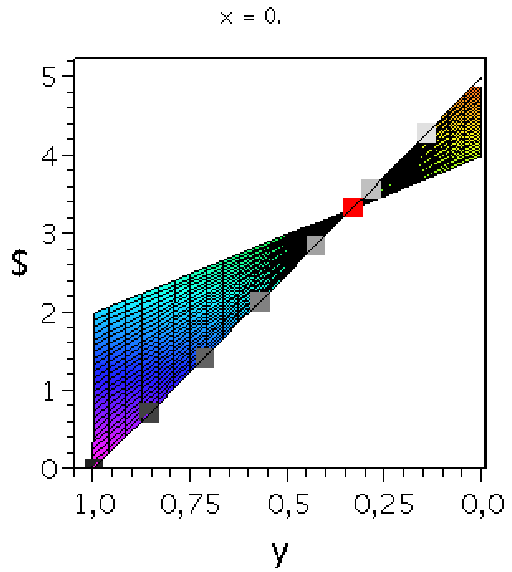
Das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichts besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfläche verschwindet. Man nennt dann ein solches Nash-Gleichgewicht $(\tilde{s}^{A\star}, \tilde{s}^{B\star})$ ein internes Nash-Gleichgewicht bzw. ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

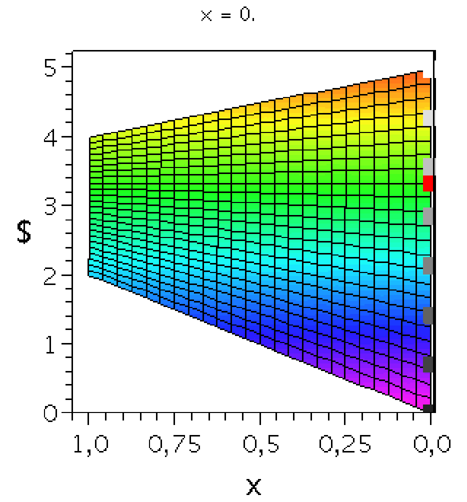
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

$$\left.\frac{\partial \tilde{\$}^{A}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B})}{\partial \tilde{s}^{A}}\right|_{\tilde{s}^{B}=\tilde{s}^{B\star}} = 0 \quad \forall \;\; \tilde{s}^{A} \in [0,1] \;\;,\;\; \tilde{s}^{B\star} \in]0,1[$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{\$}^{B}(\tilde{s}^{A}, \tilde{s}^{B})}{\partial \tilde{s}^{B}}\right|_{\tilde{s}^{A}=\tilde{s}^{A\star}} = 0 \quad \forall \;\; \tilde{s}^{B} \in [0,1] \;\;,\;\; \tilde{s}^{A\star} \in]0,1[$$



Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd-Spiel liegt bei der Strategien-kombination (x=1/3 , y=1/3) .

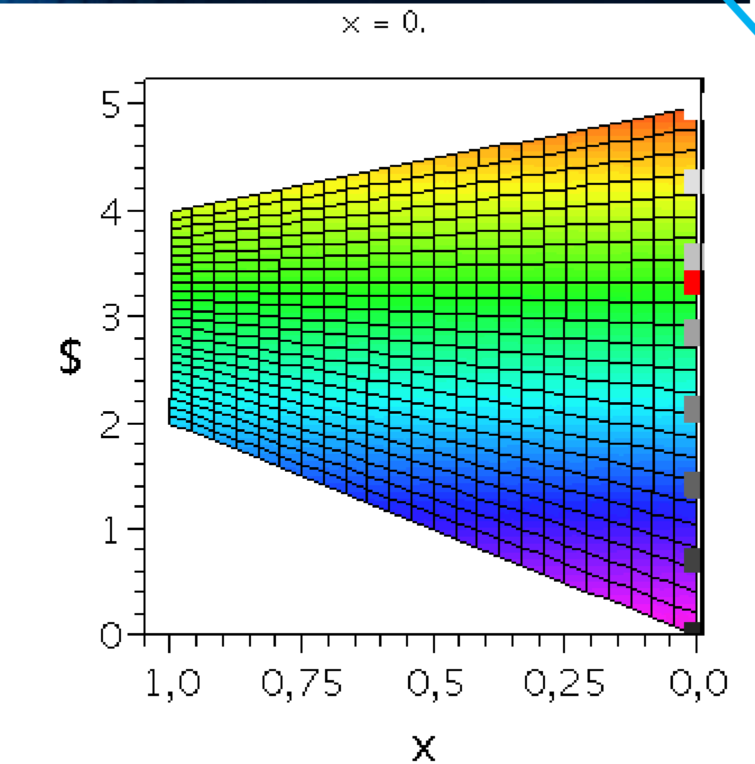


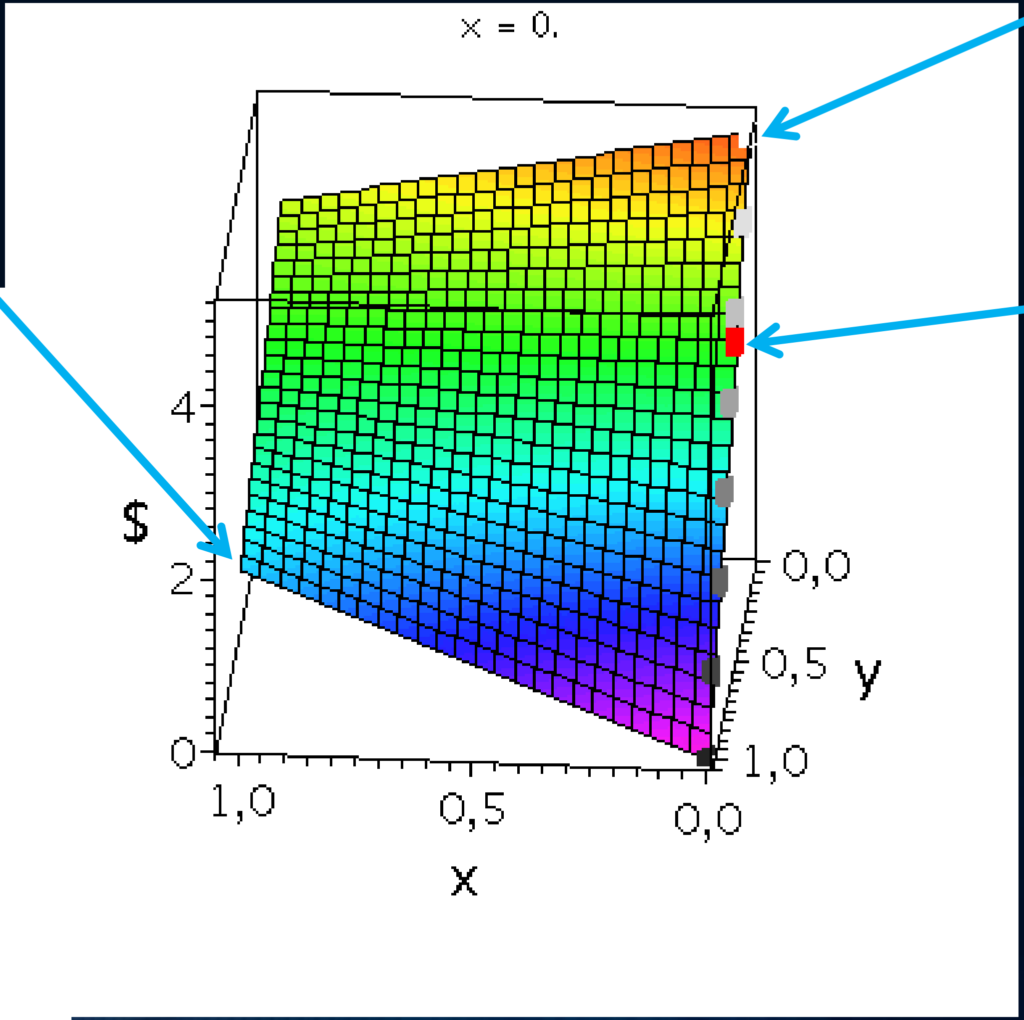
Das Nash-Gleichgewichte im Hirschjagd-Spiel

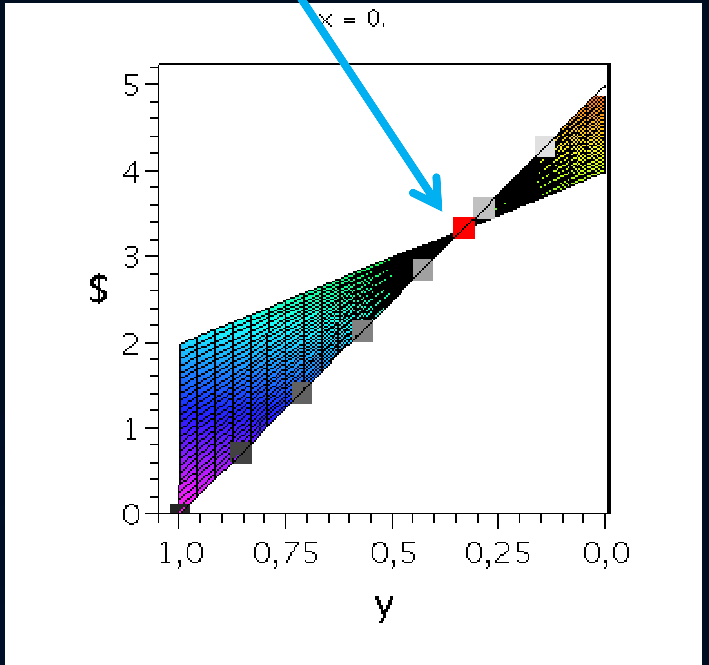
Reines Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(1,1)=
(Hasen jagen,Hasen jagen)

Reines Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(0,0)=(Hirsch jagen,Hirsch jagen)

Gemischtes Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(1/3 , 1/3)







Zwei Nash Gleichgewichte in reinen Strategien im Angsthasen Spiel

	Spieler B Weiche nicht aus	Spieler B Weiche aus
Spieler A Weiche nicht aus	(-10 , -10)	(2 , 0)
Spieler A Weiche aus	(0 , 2)	(1 , 1)

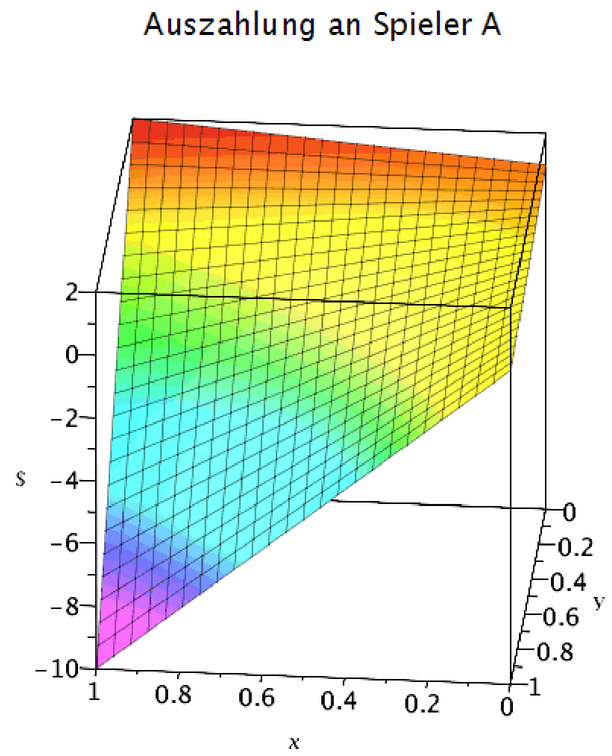
Beispiel: Das Angsthasen-Spiel (Chicken Game)

Das *Angsthasen-Spiel* ist ein simultanes (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel und kann z.B. mittels der folgenden Geschichte illustriert werden (siehe z.B. S.16 in [2]).
"Auf einer einsamen Landstraße in Indien, bei der es nur eine geteerte Fahrbahn gibt, kommen sich zwei Autos mit hoher Geschwindigkeit entgegen. Beide Fahrer stehen nun vor der Entscheidung ob sie dem Anderen die Fahrbahn überlassen und Ausweichen oder mit hoher Geschwindigkeit weiterfahren um zu hoffen, dass der Andere ausweicht." Eine weitere Deutung des *Angsthasen-Spiel* basiert auf dem Film von Nicholas Ray "Denn sie wissen nicht was sie tun" aus dem Jahre 1955 (mit James Dean): "Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto herrausspringt."

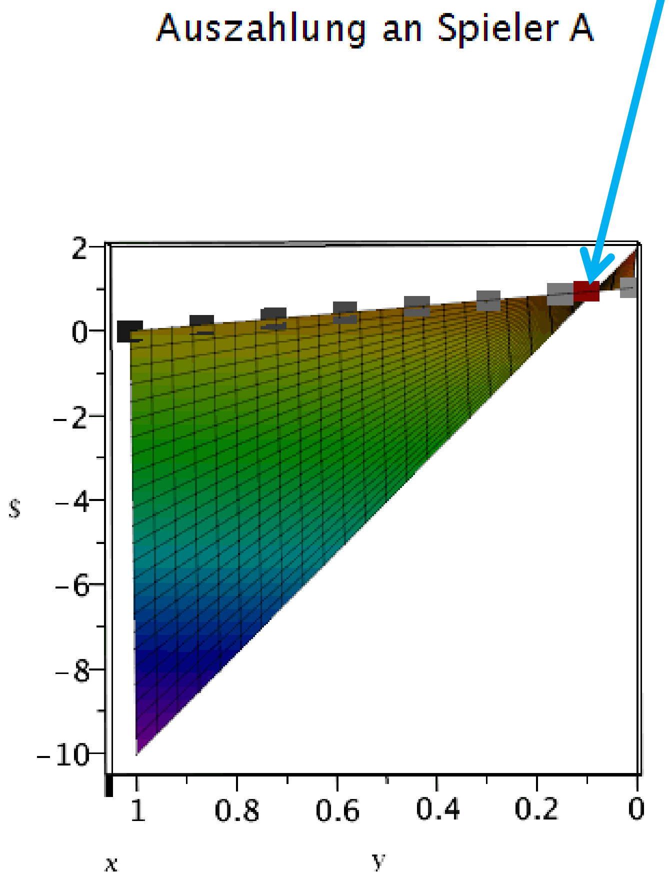
Ähnliche Spiele: Das Spiel mit dem Untergang, das Falke-Taube Spiel

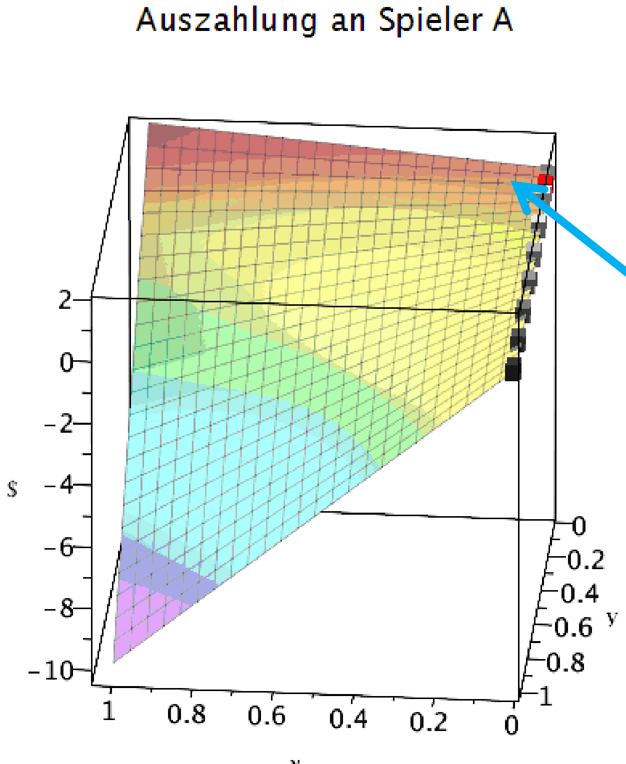
Gemischtes Nash-Gleichgewicht im Angsthasen-Spiel

Gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers A



Gemischtes Nash-Gleichgewicht (x,y)=(1/11 , 1/11)





Gemischtes Nash-Gleichgewicht (x,y)=(1/11 , 1/11)

Berechnung des Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien (I)

		y_1	y_2	$1-y_1-y_2$
		Stein	**Schere**	**Papier**
x_1	Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
x_2	Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
$1-x_1-x_2$	Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Auszahlungsfunktion des 1 - ter Spieler : $\$^1 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \rightarrow \Re$

$$
\begin{aligned}
\$^1(x_1,x_2,y_1,y_2) = & \; 0\cdot x_1\cdot y_1 + 1\cdot x_1\cdot y_2 + (-1)\cdot x_1\cdot(1-y_1-y_2) + \\
& + (-1)\cdot x_2\cdot y_1 + 0\cdot x_2\cdot y_2 + 1\cdot x_2\cdot(1-y_1-y_2) + \\
& + 1\cdot(1-x_1-x_2)\cdot y_1 + (-1)\cdot(1-x_1-x_2)\cdot y_2 + 0\cdot(1-x_1-x_2)\cdot(1-y_1-y_2) \\
= & \; x_1\cdot(1-3\cdot y_2) + x_2\cdot(3\cdot y_1 - 1) - y_1 + y_2
\end{aligned}
$$

Möglichkeit zur Berechnung eines inneren Nash-Gleichgewichts

$$\left.\frac{\partial \$^1(x_1,x_2,y_1,y_2)}{\partial x_1}\right|_{y_1=y_1^*,y_2=y_2^*} = \left(1-3\cdot y_2^*\right)\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad y_2^* = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%$$

$$\left.\frac{\partial \$^1(x_1,x_2,y_1,y_2)}{\partial x_2}\right|_{y_1=y_1^*,y_2=y_2^*} = \left(3\cdot y_1^* - 1\right)\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad y_1^* = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%$$

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers:

$$\$^1(x_1,x_2,y_1,y_2) = x_1\cdot\left(1-3\cdot y_2\right) + x_2\cdot\left(3\cdot y_1 - 1\right) - y_1 + y_2$$

Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei

$$\left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Genauso für 2-ten Spieler

	Stein	**Schere**	**Papier**
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Überprüfung des gemischten, inneren Nash-Gleichgewichts (I)

Behauptung:
Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei folgender Strategienkombination

$$\left((x_1^*, x_2^*, x_3^*), (y_1^*, y_2^*, y_3^*)\right) = \left((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\right)$$

Beweis für den 1. Spieler:

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers:

$$\$^1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 \cdot (1 - 3 \cdot y_2) + x_2 \cdot (3 \cdot y_1 - 1) - y_1 + y_2$$

Überprüfung des Nash-Gleichgewichts:

$$\$^1(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \geq \$^1(x_1, x_2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) =$$

$$\$^1(x_1, x_2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = x_1 \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + x_2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \qquad \forall\, x_1, x_2 \in [0,1]$$

Überprüfung des gemischten, inneren Nash-Gleichgewichts (II)

Behauptung:
Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei folgender Strategienkombination

$$\left((x_1^*, x_2^*, x_3^*), (y_1^*, y_2^*, y_3^*)\right) = \left((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \right)$$

Beweis für den 2. Spieler:

Auszahlungsfunktion des 2-ten Spielers:

$$\$^2(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1 \cdot (3 \cdot x_2 - 1) + y_2 \cdot (1 - 3 \cdot x_1) + x_1 - x_2$$

Überprüfung des Nash-Gleichgewichts:

$$\$^2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \geq \$^2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, y_1, y_2) =$$

$$\$^2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, y_1, y_2) = y_1 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) + y_2 \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \qquad \forall\, y_1, y_2 \in [0,1]$$

Spieltheorie in der Politik und Wirtschaft

München 17°

Süddeutsche Zeitung

SZ.de Zeitung Magazin

Shop Jobs Immobilien Anzeigen

Login Abo

Politik Wirtschaft Panorama Sport München Bayern Kultur Gesellschaft Wissen Digital Karriere Reise Auto Stil mehr...

4. Mai 2018, 18:48 Uhr **Spieltheorie**

So verstehen Sie Donald Trump

Drohen, beschwichtigen, twittern. Der Präsident sieht Handel nicht als Veranstaltung zum gegenseitigen Nutzen, sondern als Nullsummenspiel - was des einen Gewinn, ist des anderen Verlust. (Foto: AFP)

Für den US-Präsidenten ist derjenige, der zuerst nachgibt, ein Feigling. Die Spieltheorie kann helfen, diese Haltung endlich zu entschlüsseln. Doch selbst dann muss die EU mitspielen.

Essay von Nikolaus Piper

https://www.sueddeutsche.de/wirtschaft/essay-wer-als-erster-nachgibt-1.3967244

ZDF Rubriken A-Z Live-TV Sendung verpasst Suche Mein ZDF

zdf.de > Kultur > Kulturzeit > Der Spieler - Trump & die Spieltheorie

KULTURZEIT Der Spieler - Trump & die Spieltheorie

Kultur | Kulturzeit

Der Spieler - Trump & die Spieltheorie

Miteinander oder gegeneinander? Seit 1944 analysiert die Spieltheorie Muster im Spielerverhalten. Wie spielt der US-Präsident?

2 min | 11.06.2018

Video verfügbar bis 12.06.2023, 01:01

https://www.zdf.de/kultur/kulturzeit/der-spieler---trump--die-spieltheorie-100.html

Das Dilemma des Wettrüstens

Zwei Länder stehen vor der Entscheidung die Streitkräfte ihres Landes militärisch, atomar aufzurüsten oder atomar abzurüsten.

Erprobt wurde die Spieltheorie im Kalten Krieg, als sich die Vereinigten Staaten und die Sowjetunion gegenseitig mit nuklearer Vernichtung bedrohten. Damals war "The Strategy of Conflict", das Hauptwerk des amerikanischen Spieltheoretikers Thomas Schelling von 1960, eines der einflussreichsten Bücher. Ob Schelling wirklich dazu beigetragen hat, dass die Kubakrise im Oktober 1962 nicht im atomaren Inferno endete, ist offen. Auf jeden Fall half er, den Kalten Krieg durch ein Stück Rationalität zu entschärfen. Schelling erhielt 2005 den Wirtschaftsnobelpreis.

https://www.sueddeutsche.de/wirtschaft/essay-wer-als-erster-nachgibt-1.3967244

München 17°

Süddeutsche Zeitung

Shop Jobs Immobilien Anzeigen

Login Abo

SZ.de Zeitung Magazin

Politik Wirtschaft Panorama Sport München Bayern Kultur Gesellschaft Wissen Digital Karriere Reise Auto Stil mehr...

Das Dilemma des Wettrüstens

- Zwei Länder stehen vor der Entscheidung die Streitkräfte ihres Landes militärisch, atomar aufzurüsten oder atomar abzurüsten.

1. Definieren Sie das Spiel.
2. Beschreiben Sie eine mögliche Situation der Länder und definieren Sie die dem Spiel zugrundeliegende Auszahlungsmatrix.
3. Berechnen Sie die Nash-Gleichgewichte des Spiels. Gibt es eine dominante Strategie?

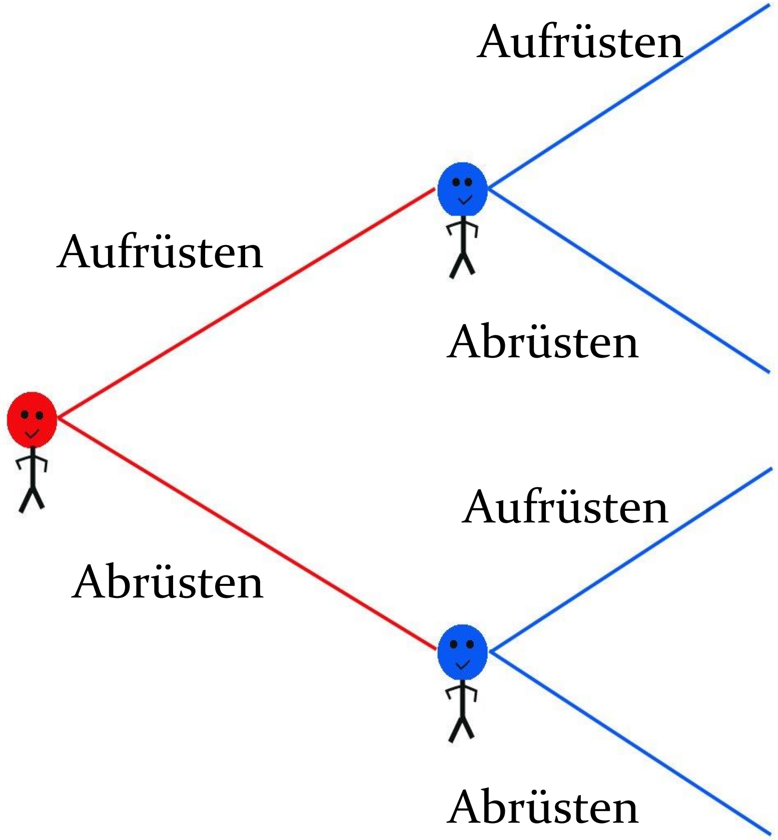



Russland / USA	Aufrüsten	Abrüsten
Aufrüsten	(?? , ??)	(?? , ??)
Abrüsten	(?? , ??)	(?? , ??)

Dilemma des Wettrüstens

(1. Mögliche Definition des Spiels)

	$s_1^2 \hat{=} Auf$	$s_1^2 \hat{=} Ab$
$s_1^1 \hat{=} Auf$	(a , a)	(b , c)
$s_2^1 \hat{=} Ab$	(c , b)	(d , d)



$(2-\mathit{Länder})-(2-\mathit{Strategien})-\mathit{Spiel}\quad \Gamma:$

$\Gamma := (\mathrm{A}, (\mathrm{S}^1, \mathrm{S}^2), (\$^1, \$^2))$

Menge der Spieler (Länder):

$\mathrm{A} = \{1,2\} = \{\text{Land } 1, \text{Land } 2\}$

Strategienmenge des 1-ten Spielers (Land 1):

$\mathrm{S}^1 = \{s_1^1, s_2^1\} = \{\text{Aufrüsten}, \text{Abrüsten}\}$

Strategienmenge des 2-ten Spielers (Land 2):

$\mathrm{S}^2 = \{s_1^2, s_2^2\} = \{\text{Aufrüsten}, \text{Abrüsten}\}$

Auszahlungsfunktion des 1. und 2. Spielers:

$\$^1 : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \to \Re \quad \text{und} \quad \$^2 : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \to \Re$

$\$^1(\mathrm{Auf}, \mathrm{Auf}) = a \quad , \quad \$^2(\mathrm{Auf}, \mathrm{Auf}) = a$

$\$^1(\mathrm{Auf}, \mathrm{Ab}) = b \quad , \quad \$^2(\mathrm{Auf}, \mathrm{Ab}) = c$

$\$^1(\mathrm{Ab}, \mathrm{Auf}) = c \quad , \quad \$^2(\mathrm{Ab}, \mathrm{Auf}) = b$

$\$^1(\mathrm{Ab}, \mathrm{Ab}) = d \quad , \quad \$^2(\mathrm{Ab}, \mathrm{Ab}) = d$

Dilemma des Wettrüstens

(2. Eigenschaften der Auszahlungsmatrix (I))

	$s_1^2 \triangleq Auf$	$s_1^2 \triangleq Ab$
$s_1^1 \triangleq Auf$	(a , a)	(b , c)
$s_2^1 \triangleq Ab$	(c , b)	(d , d)

- Das zunächst allgemein definierte symmetrische (2x2)-Spiel des Wettrüstens zweier Länder wird nun durch Festlegung der freien Parameter (a,b,c und d) an eine spezifische Ausgangssituation angepasst:
  - Betrachtet man den Nutzen für die Länder bei gemeinsamen Aufrüsten (Auf,Auf) und gemeinsamen Abrüsten (Ab,Ab), so nehmen wir im Folgenden an, dass es sowohl finanziell, als auch für das „Wohlbefinden“ der einzelnen Länder von Vorteil ist Strategie (Ab,Ab) zu wählen. $\Rightarrow$ $a<d$

Dilemma des Wettrüstens

(2. Eigenschaften der Auszahlungsmatrix (II))

	$s_1^2 \hat{=} Auf$	$s_1^2 \hat{=} Ab$
$s_1^1 \hat{=} Auf$	(a , a)	(b , c)
$s_2^1 \hat{=} Ab$	(c , b)	(d , d)

- Betrachtet man den Nutzen für die Länder wenn *Land 1* aufrüstet und *Land 2* abrüstet (Auf,Ab), und setzt voraus, dass beide Länder sich ernsthaft voneinander bedroht fühlen, so würde Land 1 diese Strategienkombination sehr positiv bewerten, Land 2 dagegen äußerst negativ.

$\Longrightarrow$ $b>>c$ und $b>d$ und $c<a$

Dilemma des Wettrüstens

(2. Eigenschaften der Auszahlungsmatrix (III))

	$s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Auf$	$s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Ab$
$s_1^1 \mathrel{\hat{=}} Auf$	(a , a)	(b , c)
$s_2^1 \mathrel{\hat{=}} Ab$	(c , b)	(d , d)

- Wir legen die Parameter des Spiels wie folgt fest:

	Aufrüsten	**Abrüsten**
Aufrüsten	(1 , 1)	(4 , 0)
Abrüsten	(0 , 4)	(2 , 2)

Siehe: *Schlee, Walter* **Einführung in die Spieltheorie**, Vieweg, 2004
Seite 15

Dilemma des Wettrüstens

(3. Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte)

2. Es gibt nur ein Nash-Gleichgewicht, das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist:

	Aufrüsten	Abrüsten
Aufrüsten	(1 , 1)	(4 , 0)
Abrüsten	(0 , 4)	(2 , 2)

(Aufrüsten , Aufrüsten) ist die dominante Strategie des Spiels.

Wie kann die Welt diesem Dilemma entkommen?

In der Quantenspieltheorie kann man mittels einer möglichen Verschränkung der Quanten-Entscheidungszustände der Spieler dem Dilemma entkommen (siehe Teil 3). Dieser auf Vertrauen basierende Zustand wurde nach der Zeit des kalten Krieges realisiert, droht nun jedoch zunehmend instabil zu werden.

E-Learning

https://fias.uni-frankfurt.de/~hanauske/VPSOC/zusatz.html

E-Learning

Zusatzmaterial auf der Online-Lernplatform Lon Capa

Zusäzlich zu den Informationen aus dieser Internetseite wurde ein separater Kurs auf der Online-Lernplatform Lon Capa eerstellt. Er beinhaltet neben den hier dargestellten Informationen zusäzliche Erläuterungen, diverse interaktive Übungsaufgaben, Feedbackmöglichkeiten und Probeklausuren. Falls Sie schon einen Lon Capa Account besitzen können Sie sich einfach mit diesem unter dem unten angegebenen Link einloggen. Falls Sie Student der Universiät Frankfurt sind, können Sie sich mit Ihrem HRZ-Account einloggen. Anderenfalls kontaktieren Sie bitte per E-Mail und ich werde für Sie einen Account für die Lernplatform erstellen.

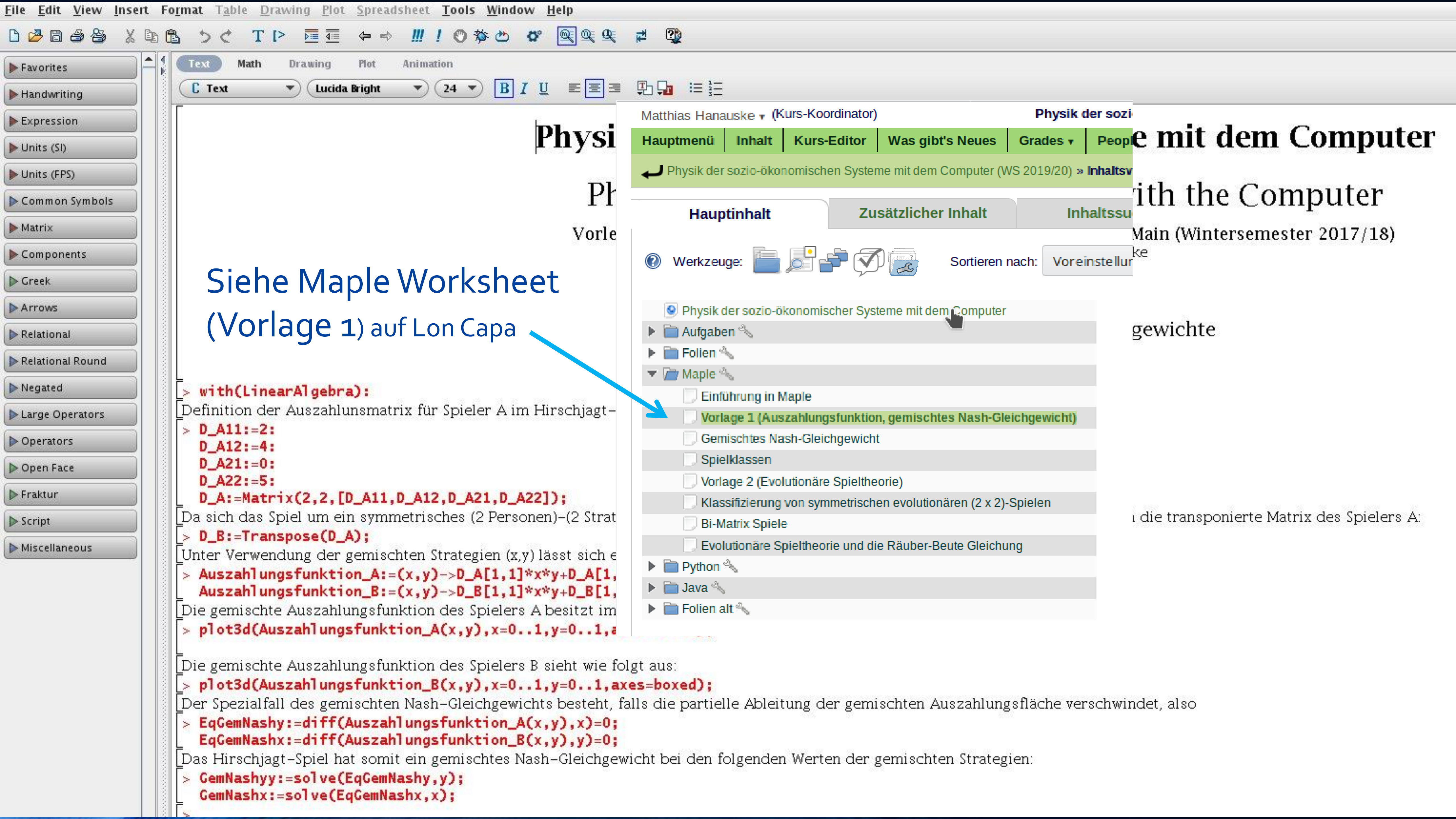
Hier gehts zu Lon Capa

Einführung in das Computeralgebra-System Maple: MapleTutorium.mw

Siehe auch http://itp.uni-frankfurt.de/~hanauske/VARTC/T1/intro/MapleTutorium.html

DEU 13:50 19.10.2017

Siehe Maple Worksheet (Vorlage 1) auf Lon Capa



Erster Vorlesungsteil:
Dominante Strategien und Nash-Glei
(Vorlage 1)

```
> with(LinearAlgebra):
```

Definition der Auszahlunsmatrix für Spieler A im Hirschjagt-Spiel:

```
> D_A11:=2:
  D_A12:=4:
  D_A21:=0:
  D_A22:=5:
  D_A:=Matrix(2,2,[D_A11,D_A12,D_A21,D_A22]);
```

Da sich das Spiel um ein symmetrisches (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel handelt, erhält man die Auszahlunsmatrix für Spieler B du

```
> D_B:=Transpose(D_A);
```

Unter Verwendung der gemischten Strategien (x,y) lässt sich eine gemischte Auszahlungsfunktion der Spieler wie folgt definieren:

```
> Auszahlungsfunktion_A:=(x,y)->D_A[1,1]*x*y+D_A[1,2]*x*(1-y)+D_A[2,1]*(1-x)*y+D_A[2,2]*(1-x)*(1-y);
  Auszahlungsfunktion_B:=(x,y)->D_B[1,1]*x*y+D_B[1,2]*x*(1-y)+D_B[2,1]*(1-x)*y+D_B[2,2]*(1-x)*(1-y);
```

Die gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers A besitzt im oben definierten Hirschjagt-Spiel das folgende Aussehen:

```
> plot3d(Auszahlungsfunktion_A(x,y),x=0..1,y=0..1,axes=boxed);
```

Die gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers B sieht wie folgt aus:

```
> plot3d(Auszahlungsfunktion_B(x,y),x=0..1,y=0..1,axes=boxed);
```

Der Spezialfall des gemischten Nash-Gleichgewichts besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfläche versch

```
> EqGemNashy:=diff(Auszahlungsfunktion_A(x,y),x)=0;
  EqGemNashx:=diff(Auszahlungsfunktion_B(x,y),y)=0;
```

Das Hirschjagt-Spiel hat somit ein gemischtes Nash-Gleichgewicht bei den folgenden Werten der gemischten Strategien:

```
> GemNashyy:=solve(EqGemNashy,y);
  GemNashx:=solve(EqGemNashx,x);
>
```

Vorlesung 2

Wir betrachten im Folgenden die gemischte Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels in strategischer Form mit Auszahlung. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers A ($\tilde{\mathcal{S}}^A$) und B ($\tilde{\mathcal{S}}^B$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien ($\mathcal{S}^A$ und $\mathcal{S}^B$) verstanden werden. Die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien eines Spielers $\mu = A, B$ ($\tilde{\mathfrak{s}}^\mu = (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu) \in \tilde{\mathcal{S}}^\mu$) bestehen aus zwei reellwertigen Zahlen ($\tilde{s}_1^\mu \in [0,1]$ und $\tilde{s}_2^\mu \in [0,1]$) und können als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie 1 ($\tilde{s}_1^\mu$) bzw. der Strategie 2 ($\tilde{s}_2^\mu$) interpretiert werden. Aufgrund der Normalisierungsbedingung (siehe Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien) $\tilde{s}_1^\mu + \tilde{s}_2^\mu = 1 \; \forall \mu = A, B$ setzen wir $x := \tilde{s}_1^A$ und $y := \tilde{s}_1^B$, und somit $\tilde{s}_2^A = 1 - x$ und $\tilde{s}_2^B = 1 - y$.

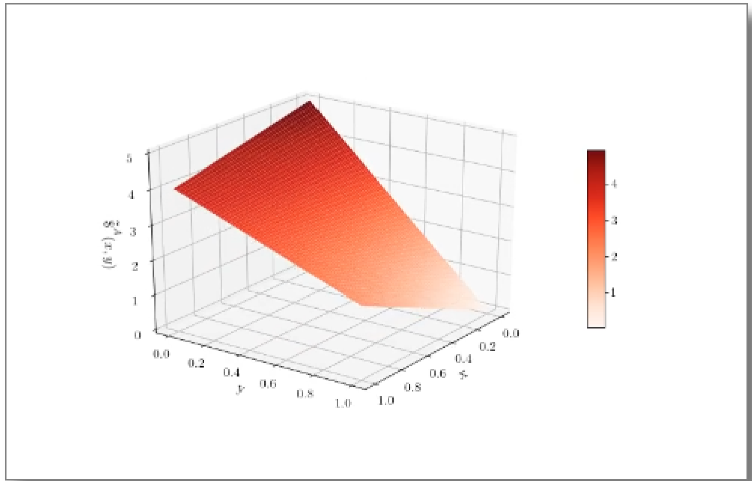
Die gemischte Auszahlungsfunktion $\tilde{\$}^\mu(x, y)$ schreibt sich dann wie folgt

$$\tilde{\$}^\mu : ([0,1] \times [0,1]) \to \mathbb{R}$$
$$\tilde{\$}^\mu(x,y) = \$_{11}^\mu \, x y + \$_{12}^\mu \, x(1-y) + \$_{21}^\mu (1-x) y + \$_{22}^\mu (1-x)(1-y) \quad .$$

Ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichtes besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfunktion verschwindet. Man nennt dann ein solches Nash-Gleichgewicht $(x^\star, y^\star)$ ein internes Nash-Gleichgewicht bzw. ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^A(x,y)}{\partial x} \right|_{y=y^\star} = 0 \quad \forall \; x \in [0,1] \;\; , \;\; y^\star \in]0,1[$$
$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^B(x,y)}{\partial y} \right|_{x=x^\star} = 0 \quad \forall \; y \in [0,1] \;\; , \;\; x^\star \in]0,1[$$

Beispiel: Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd Spiel

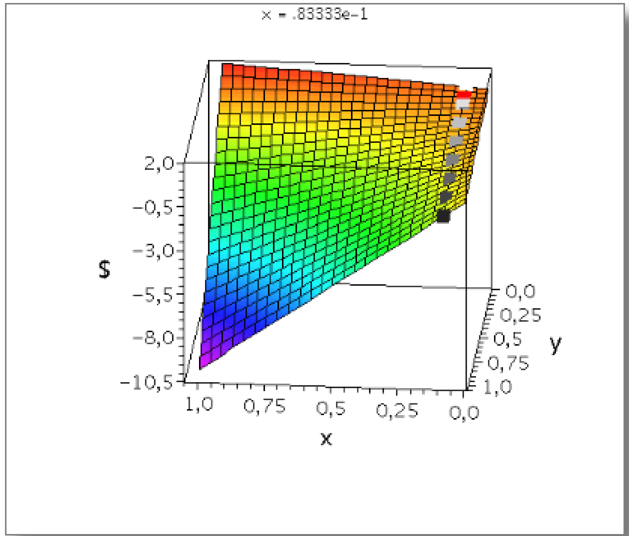


Wir wollen nun die oben beschriebene gemischte Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels am Beispiel des Hirschjagd-Spiels verdeutlichen. Aufgrund der dem Spiel zugrundeliegenden Auszahlungsmatrix gilt für den Spieler A $\$_{11}^A = 2$, $\$_{12}^A = 4$, $\$_{21}^A = 0$ und $\$_{22}^A = 5$ und die gemischte Auszahlungsfunktion vereinfacht sich zu: $\tilde{\$}^A(x,y) = 3\,xy - x - 5\,y + 5$. Den Wert des gemischten Nash-Gleichgewichtes erhält man durch die Nullstelle der partiellen Ableitung dieser Funktion: $\frac{\partial \tilde{\$}^A(x,y)}{\partial x} = 3\,y - 1 = 0$; man erhÃ¤lt: $y^\star = 1/3$. Da es sich um ein symmetrisches Spiel handelt gilt auch $x^\star = 1/3$. Die nebenstehende Animation zeigt die Auszahlungsfläche des Spielers A im Hirschjagd Spiel. Das gemischte Nash-Gleichgewicht $y^\star = 1/3$ kann visuell verdeutlicht werden, indem man die Fläche in Blickrichtung der x-Achse betrachtet.

In den unten angegebenen Links finden Sie das der Berechnung zugrundeliegende Jupyter Notebook und alternativ das entsprechende Maple Worksheet.

Vorlesung 2

Das Konzept des Nash-Gleichgewichtes wurde in der letzten Vorlesung mittels der *Bestantwort-Pfeile* an mehreren klassischen Spielen illustriert. In dieser Vorlesung werden die beiden fundamentalen Gleichgewichtskonzepte der Spieltheorie, die dominante Strategien und die Nash-Gleichgewichte, formal mathematisch definiert. Die bisher dargestellten spieltheoretischen Konzepte basierten auf einer diskreten Strategiemenge der Spieler, die sogenannte Menge der reinen Strategien $\mathcal{S}$. Wir erweitern nun die Menge der reinen Strategien $\mathcal{S}$ zur Menge der gemischten Strategien $\tilde{\mathcal{S}}$. Ein solches Spiel bezeichnet man als die *gemischte Erweiterung eines simultanen (N Spieler)-(m Strategien) Spiels in strategischer Form mit Auszahlung*. Gemischte Strategien können als die Wahrscheinlichkeit des Spielers zur Wahl einer reinen Strategie verstanden werden. Es wird eine gemischte Auszahlungsfunktion der Spieler $\tilde{\$}$ formuliert und die beiden fundamentalen Gleichgewichtskonzepte der Spieltheorie in der gemischten Erweiterung definiert (siehe Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien). Das Konzept des Nash-Gleichgewichtes in gemischten Strategien (internes Nash-Gleichgewicht) wird am Beispiel des Hirschjagd- und Angsthasen-Spiels diskutiert.



Das neben stehende Bild stellt die gemischte Auszahlungsfunktion $\tilde{\$}^A$ des Spielers A im Angsthasen-Spiel dar. Die animierten Rechtecke zeigen die Veränderung der Auszahlung bei festgehaltener gemischter Strategie y des Spielers B und Variation der Strategie x des Spielers A. Das rote Rechteck veranschaulicht das interne, gemischte Nash-Gleichgewicht.

Das entsprechende Jupyter Notebook findet man auf der Internetseite der Vorlesung und auf derOLAT Lernplatform

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 02.11.2020

Erster Vorlesungsteil:

Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte am Beispiel der folgenden Spiele:

Gefangenendilemma, Hirschjagt- und Angsthasen-Spiel

Einführung

In diesem Python Notebook werden die in der Vorlesung definierten Gleichgewichtskonzepte (dominante Strategie, reine und gemischte Nash-Gleichgewichte) am Beispiel dreier simultaner, symmetrischer (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiele illustriert. Zunächst wird das Python Modul "sympy" eingebunden, das ein Computer-Algebra-System für Python bereitstellt und symbolische Berechnungen und im speziellen Matrix-Berechnungen relativ einfach möglich macht.

In [1]:
```
from sympy import *
init_printing()
```

Das Gefangenendilemma

Definition der Auszahlunsmatrix für Spieler A ($\hat{\$}^A$):

In [2]:
```
D_A=Matrix([[-7,-1],[-9,-3]])
D_A
```

Out[2]:
$$\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$$

Da sich das Spiel um ein symmetrisches (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel handelt, erhält man die Auszahlunsmatrix für Spieler B durch die transponierte Matrix

Aufgabe:
Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien

Main Menu | Contents | Grades | Syllabus

Course Contents » ... » Aufgaben » **Reine Nash-Gleichgewichte im (2x2)-Spiel**

Notes Evaluate Feedback Print Info

Betrachten Sie ein simultanes (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiel in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungmatrix. Die Menge der Spieler sei $\mathcal{I} = \{A, B\}$, die Menge der reinen Strategien sei $\mathcal{S}^A = \mathcal{S}^B = \{s_1, s_2\}$ und die Präferenzordnungen der Spieler sei durch folgende Auszahlungstabelle quantifiziert:

A/B	s_1	s_2
s_1	(130 , 130)	(11 , 122)
s_2	(122 , 11)	(143 , 143)

Welche der folgenden Strategienkombinationen sind reine Nash-Gleichgewichte des Spiels?

Select all that are **True**.

- $(s_1 \; , \; s_1)$ ist ein Nash-Gleichgewicht
- $(s_1 \; , \; s_2)$ ist ein Nash-Gleichgewicht
- $(s_2 \; , \; s_1)$ ist ein Nash-Gleichgewicht
- $(s_2 \; , \; s_2)$ ist ein Nash-Gleichgewicht

Submit Answer Tries 0/5

Post Discussion Send Feedback

Aufgabe: Gemischtes Nash-Gleichgewicht

Main Menu | Contents | Grades | Syllabus

Course Contents » ... » Aufgaben » **Gemischtes Nash-Gleichgewicht im (2x2)-Spiel** — Notes, Evaluate, Feedback, Print, Info

Betrachten Sie die gemischte Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungmatrix. Die Menge der Spieler sei $\mathcal{I} = \{A, B\}$, die Menge der reinen Strategien sei $\mathcal{S}^A = \mathcal{S}^B = \{s_1, s_2\}$ und die Präferenzordnungen der Spieler sei durch die unten stehende Auszahlungstabelle quantifiziert. Die reinen Strategien entsprechen den folgenden gemischten Strategien: $s_1 \hat{=} \tilde{s}^B = \tilde{s}^B = 1$ und $s_2 \hat{=} \tilde{s}^A = \tilde{s}^B = 0$.

A/B	s_1	s_2
s_1	(392 , 392)	(21 , 20)
s_2	(20 , 21)	(303 , 303)

Bei welcher gemischten Strategienkombination $(\tilde{s}^{A\star}, \tilde{s}^{B\star})$ befindet sich das gemischte Nash-Gleichgewicht?

$\tilde{s}^{A\star} = \tilde{s}^{B\star} =$ ______ (bitte geben Sie den nummerischen Wert auf mindestens 3 Nachkommastellen an; z.B. 0.111)

Submit Answer Tries 0/5

Post Discussion Send Feedback