

Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

*JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
29.01.2020*

MATTHIAS HANAUSKE

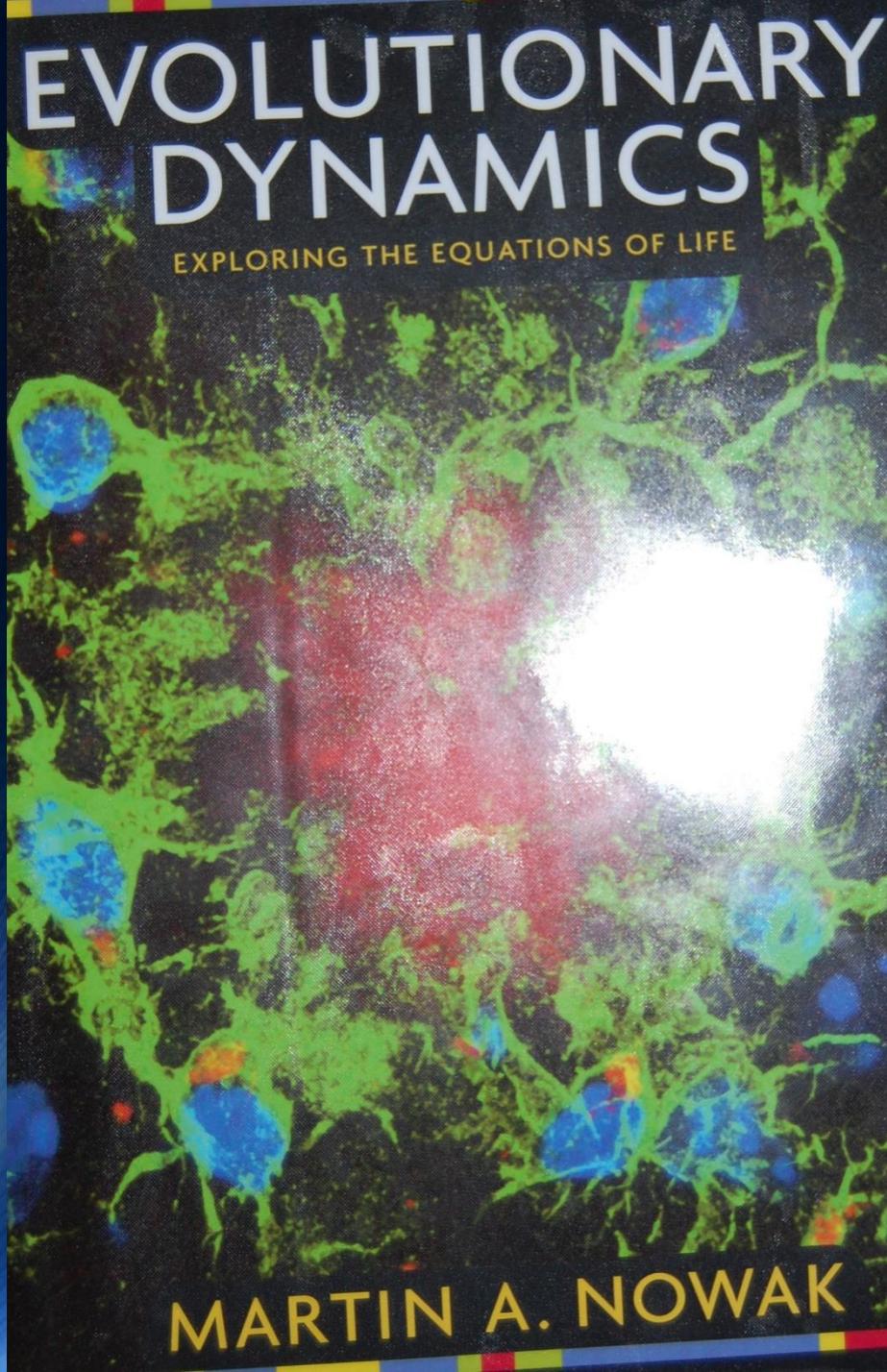
*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

10. Vorlesung

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die freiwilligen Übungstermine in diesem Semester nur Online statt.

Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung: Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken
- Quanten Spieltheorie
- Vorlesungsprojekte

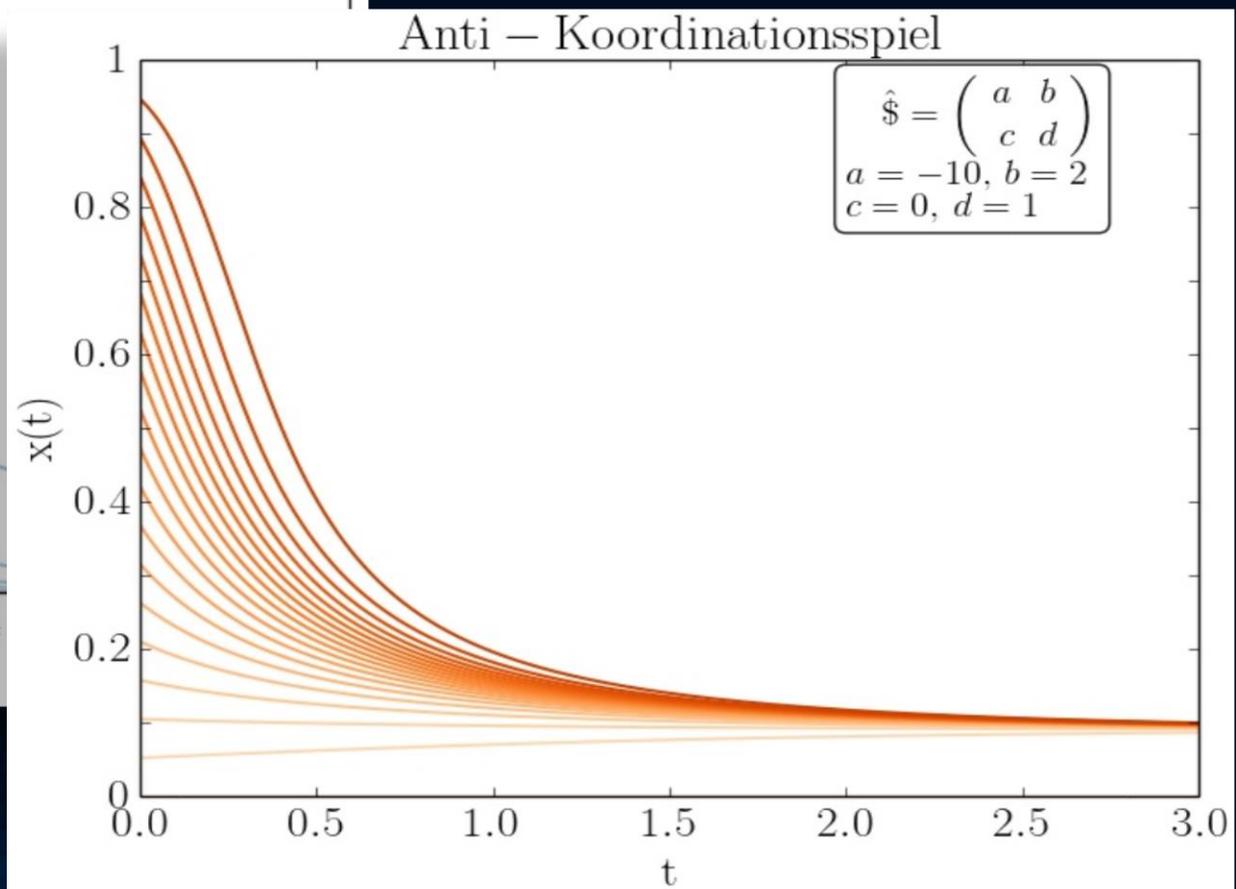
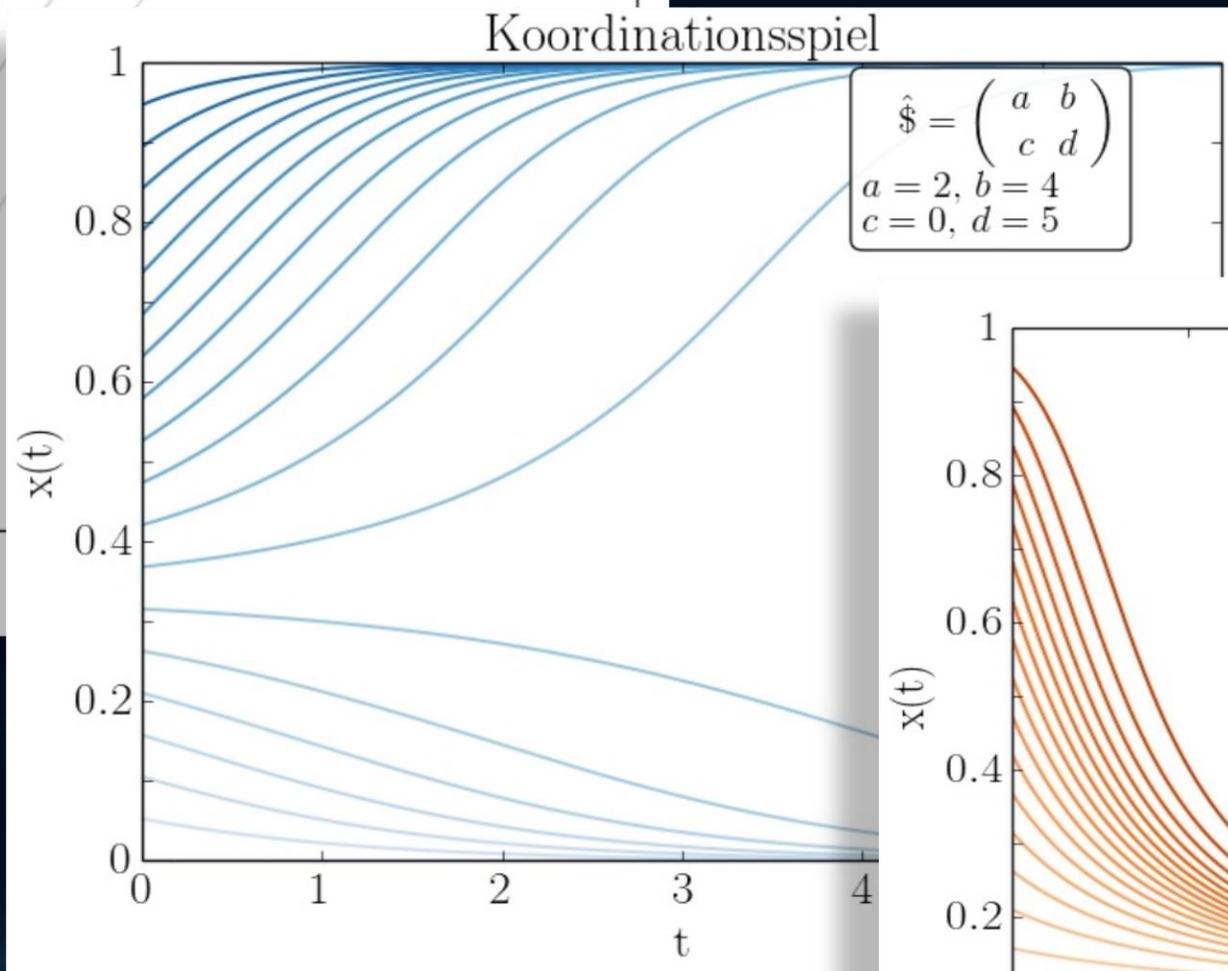
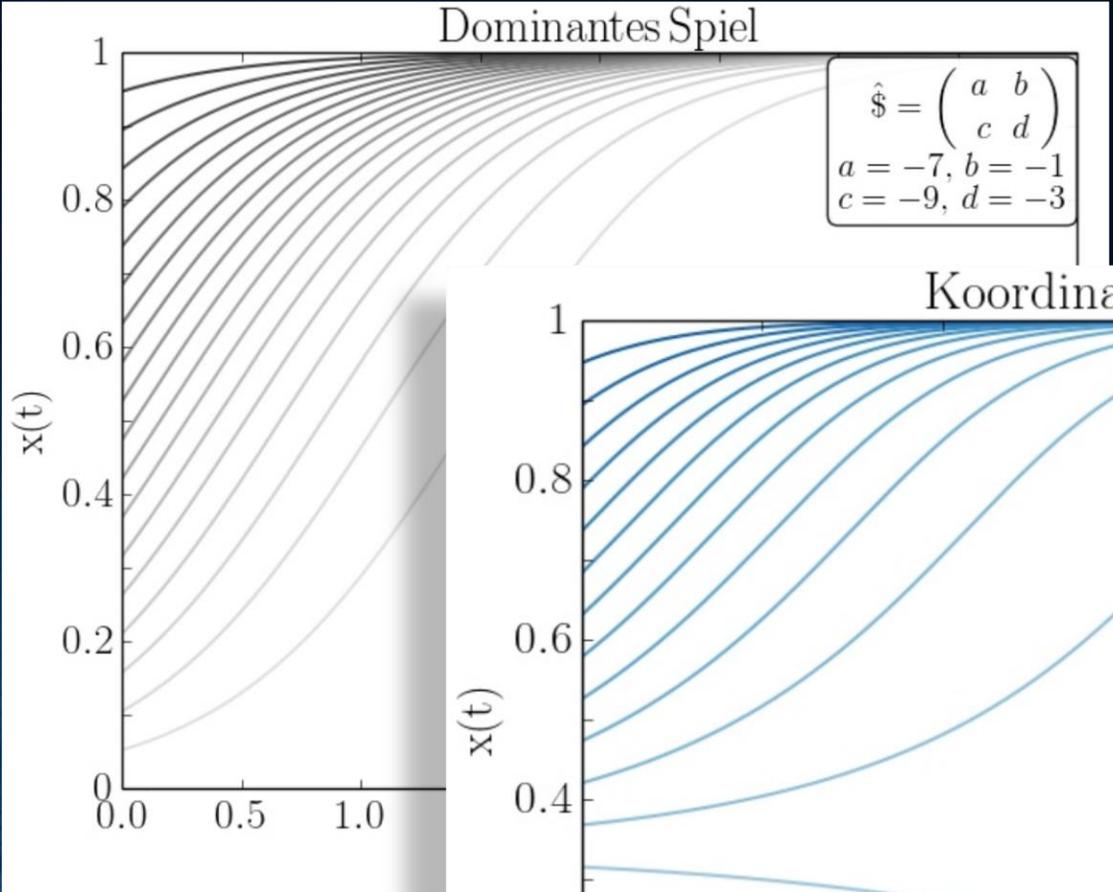


Einführung in Teil III

Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Die folgenden Beispiele sind an das Kapitel 9 im Buch M.A. Nowak „**Evolutionary Dynamics**“ (Kapitel 9: Spatial Games) angelehnt.

Die deterministische evolutionäre Spieltheorie



Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Viele in der Realität vorkommende evolutionäre Spiele werden auf einer definierten Netzwerkstruktur (Topologie) gespielt. Die Spieler der betrachteten Population sind hierbei nicht gleichwertig, sondern wählen als Spielpartner nur mit ihnen durch das Netzwerk verlinkte (verbundene) Partner aus.

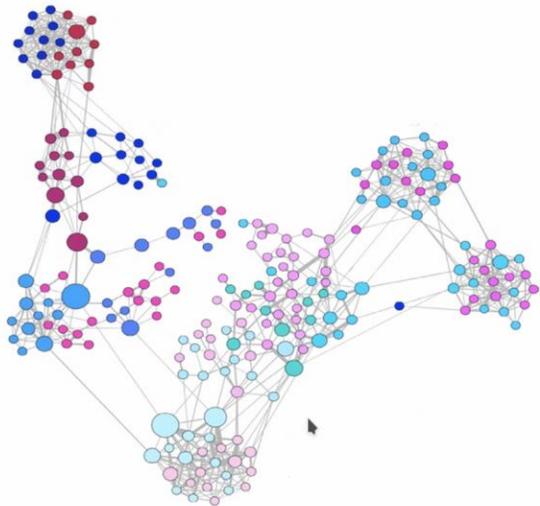
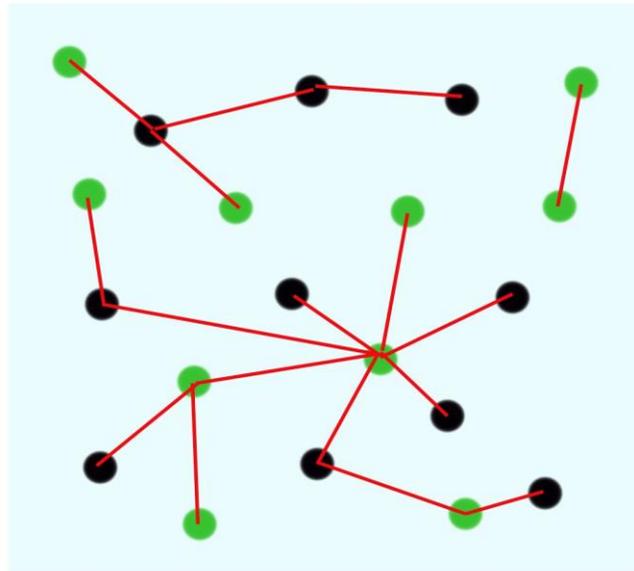


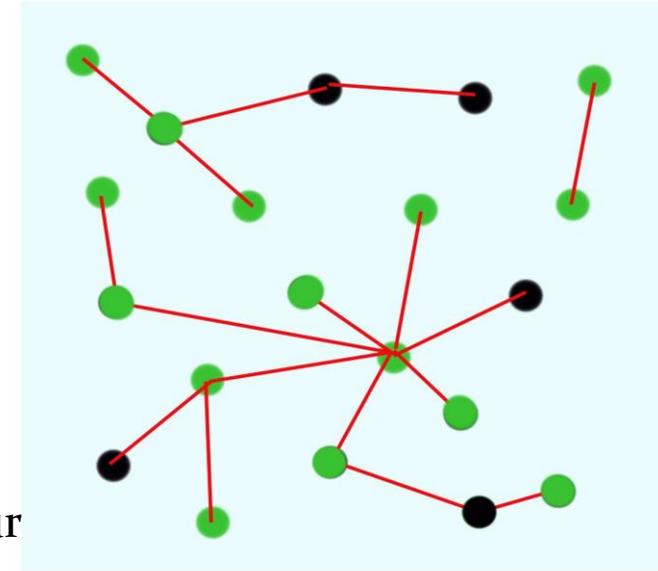
image 10.16
A Face-to-face Interactions
A face-to-face contact network mapped out using RFA tags, capturing interactions between 232 students and 10 teachers across 10 classes in a school [31]. The structure of the maps obtained by RFID tags depend on the context in which they are collected. For example the school network shown here reveals the presence of clear communities. In contrast, a study capturing the interactions between individuals that visited a museum reveal an almost linear network [29]. Finally, a network of attendees of a small conference is rather dense, as most participants interact with most others [29]. After [31].



$$x(0)=0.5$$



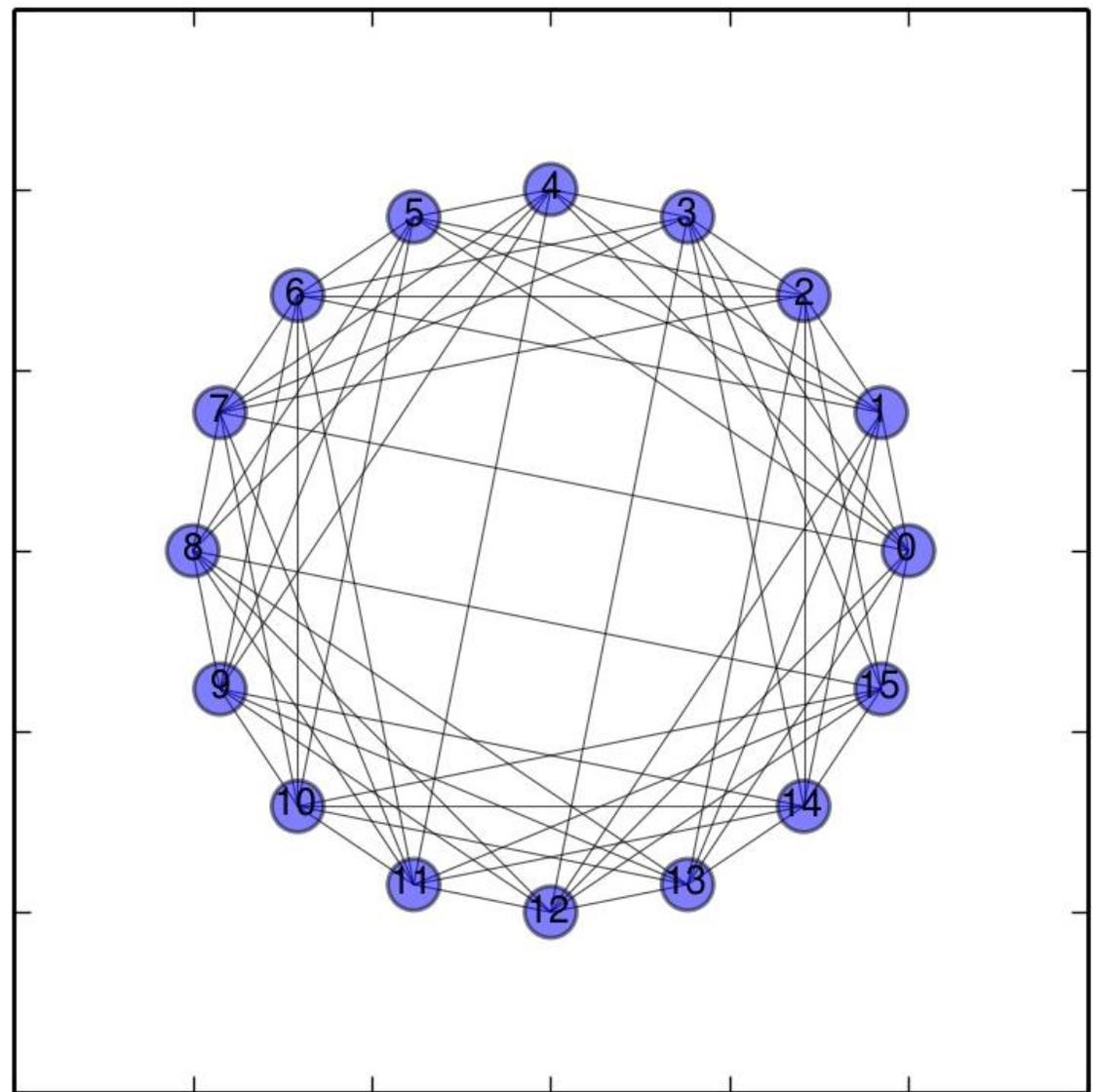
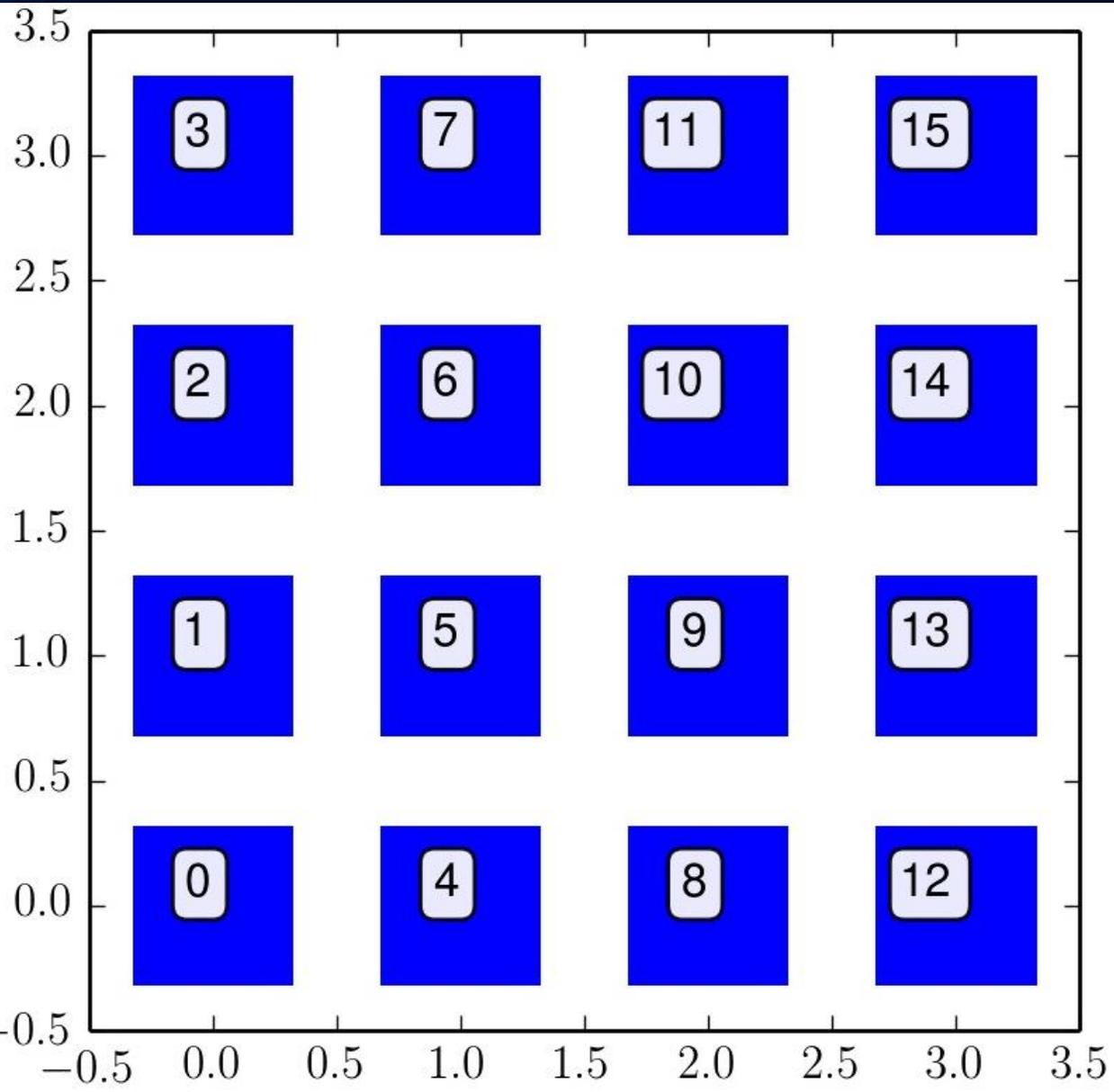
zeitliche
Entwicklung
der
Population auf
vorgegebener
Netzwerkstruktur



$$x(10)=0.75$$

Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
 $x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.
Die roten Verbindungslinien beschreiben die möglichen Spielpartner des Spielers

Spatial Games: Mooresche Nachbarschaft



Betrachtetes Gefangenendilemma-ähnliches (2x2)-Spiel

$$c > 1$$

	Spieler B Strategie 1	Spieler B Strategie 2
Spieler A Strategie 1	(1, 1)	(0, c)
Spieler A Strategie 2	(c, 0)	(0.01, 0.01)

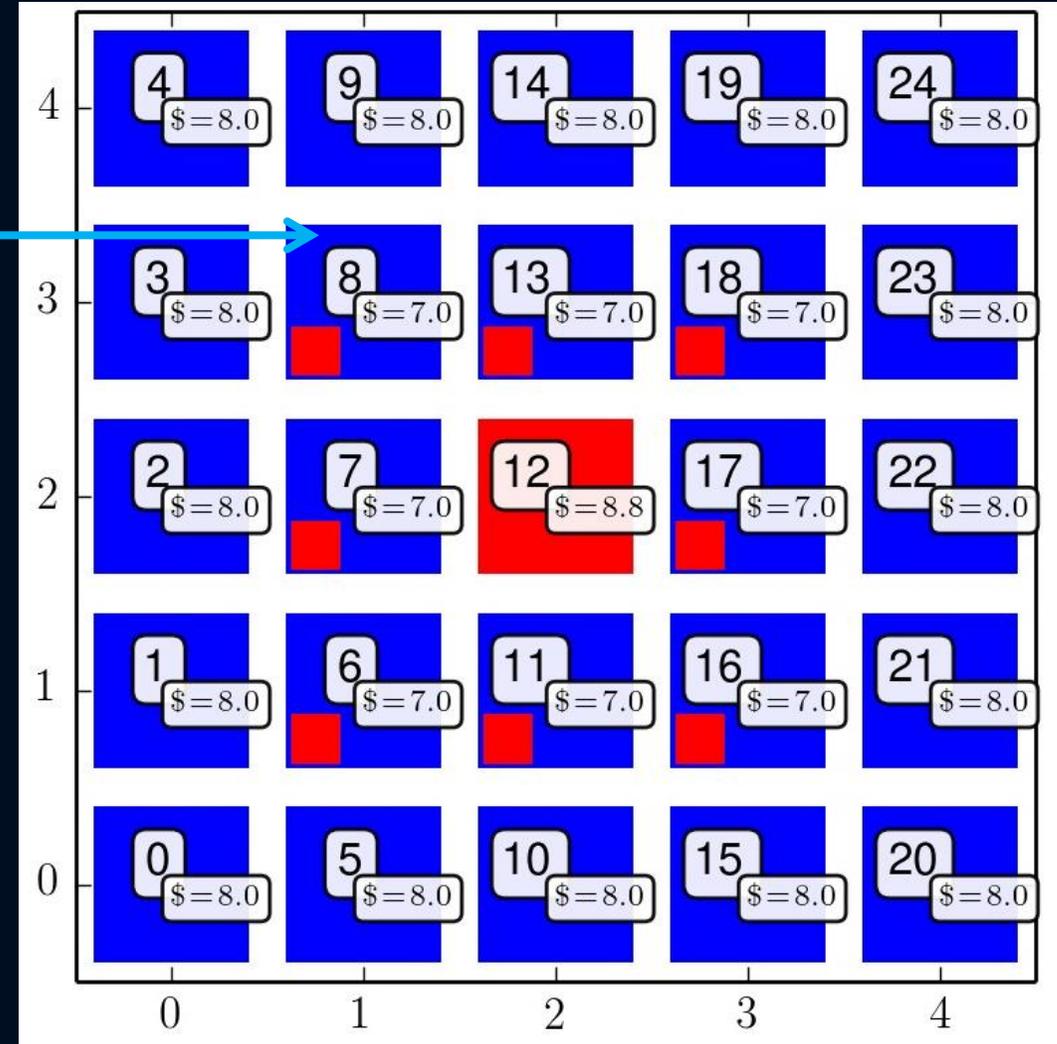
The diagram illustrates a 2x2 game matrix with the following payoffs:

- Top-left (S1, S1): (1, 1)
- Top-right (S1, S2): (0, c)
- Bottom-left (S2, S1): (c, 0)
- Bottom-right (S2, S2): (0.01, 0.01)

Blue arrows show a clockwise cycle between the four cells. The bottom-right cell is shaded gray.

Python Programm Spatial Games

In diesem Python Programm wird die Menge der Spieler (hier $N=24$) auf einem 2D-Gitter mit Moorschen Nachbarschaftsbedingungen angeordnet (siehe S:147 in M.A.Nowak, „Evolutionary Dynamics“). In jeder Iterationsperiode spielt jeder Spieler mit seinen nächsten Nachbarn ein symmetrisches (2x2)-Spiel. Am Ende einer Periode vergleicht jeder Spieler seinen Gesamtgewinn mit seinen Nachbarn und bestimmt in einem „Update Rule“ seine Strategie in der nächsten Spielperiode.



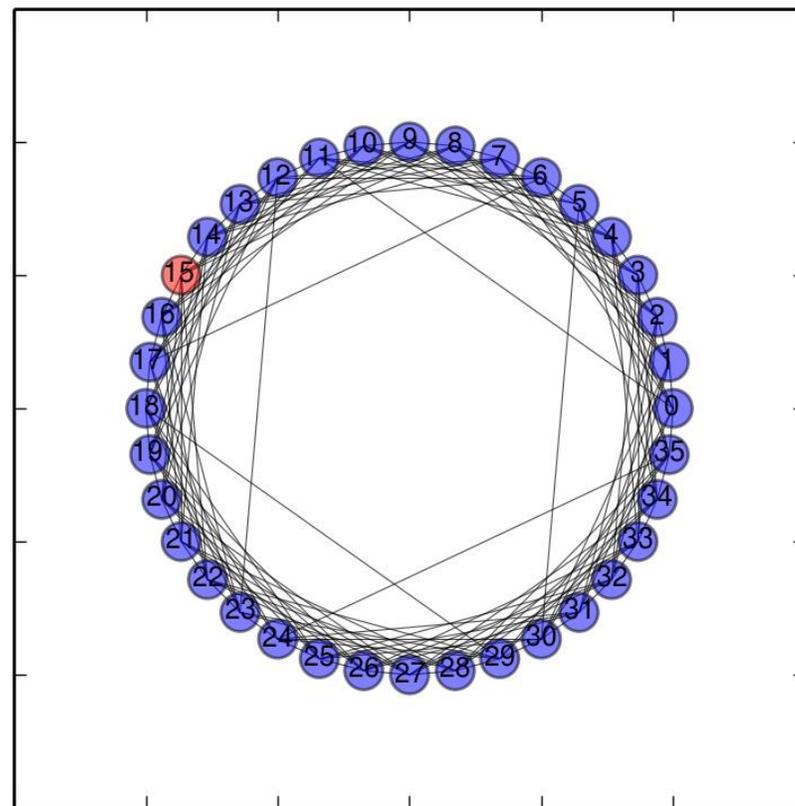
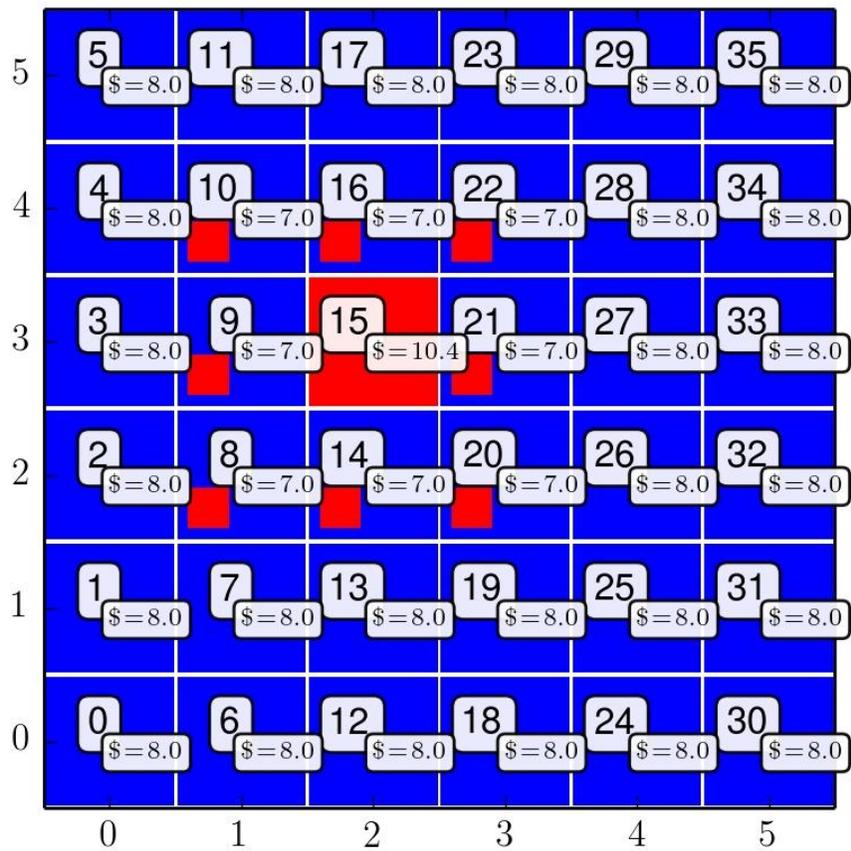
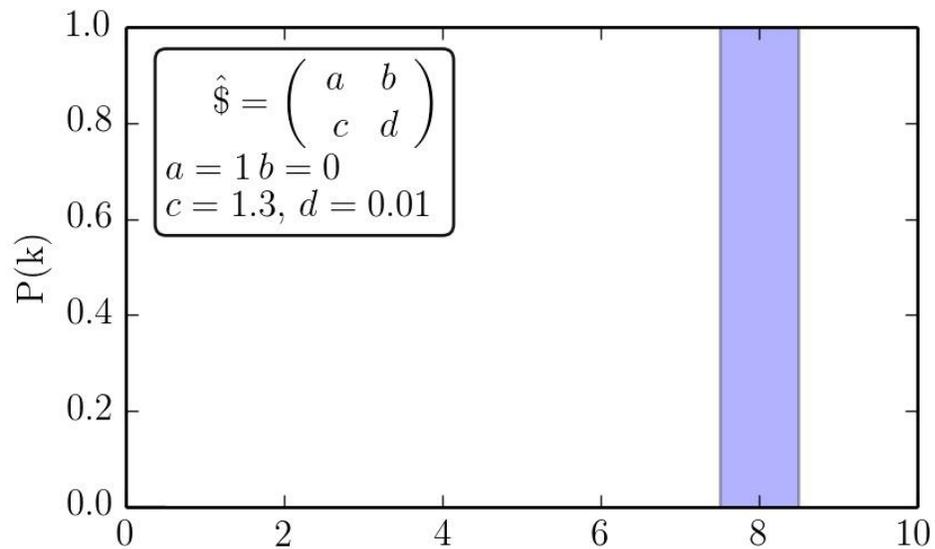
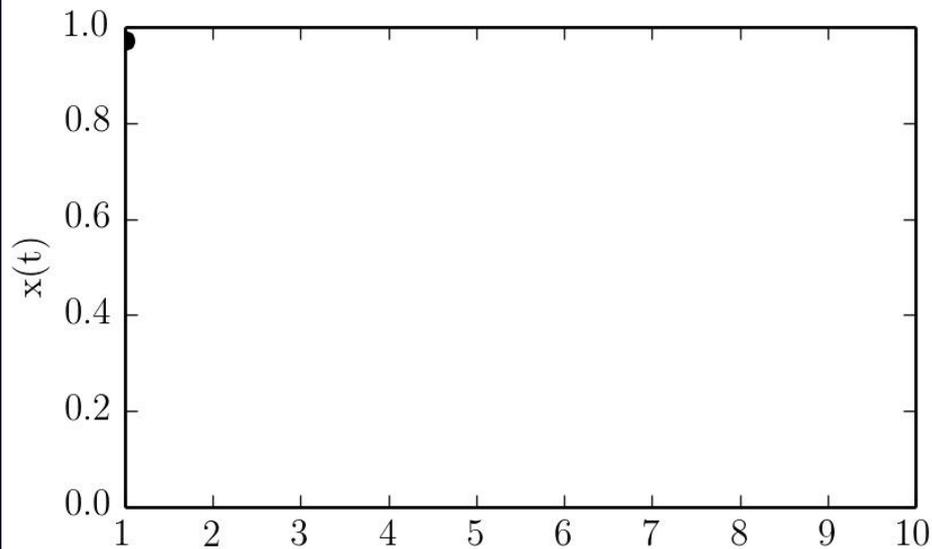
Die rechte Simulation benutzte die folgenden Werte der Auszahlungsmatrix (siehe linke Abb.): $a=1$, $b=0$, $c=1.1$ und $d=0.01$

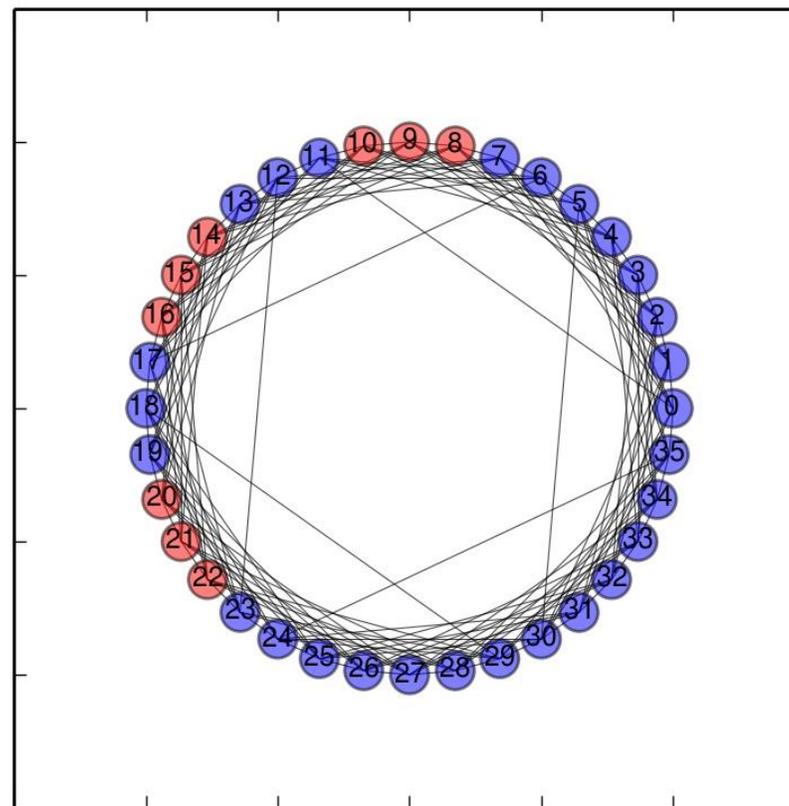
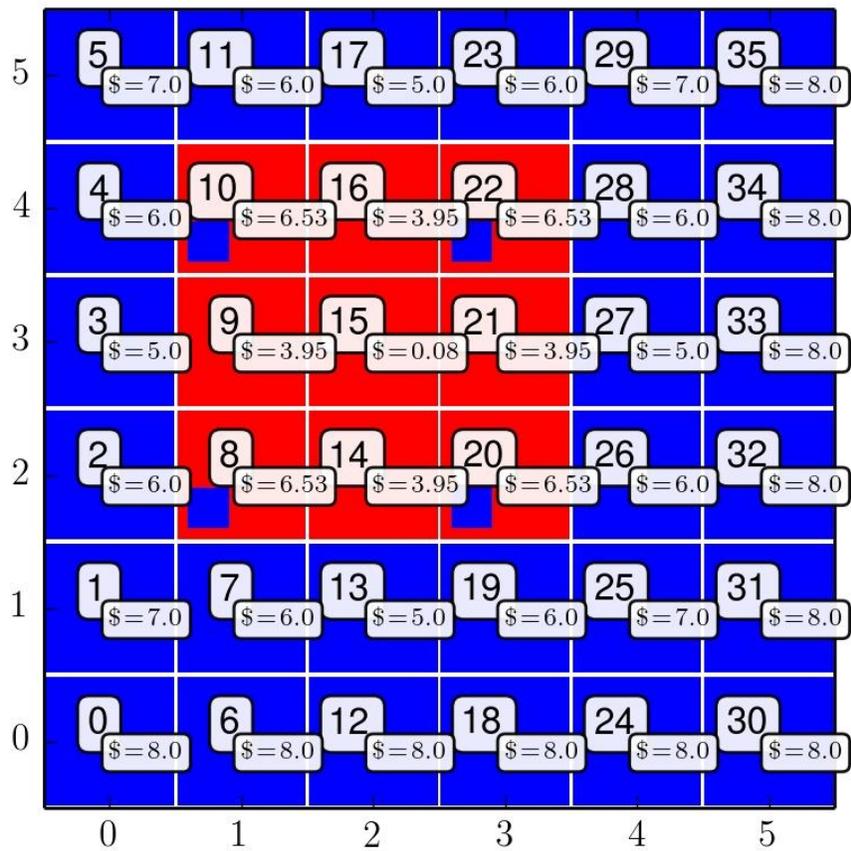
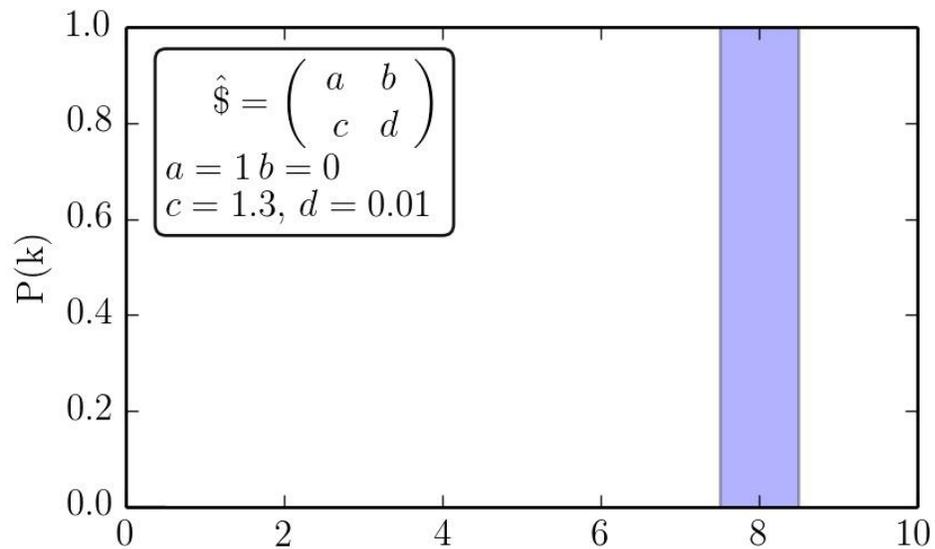
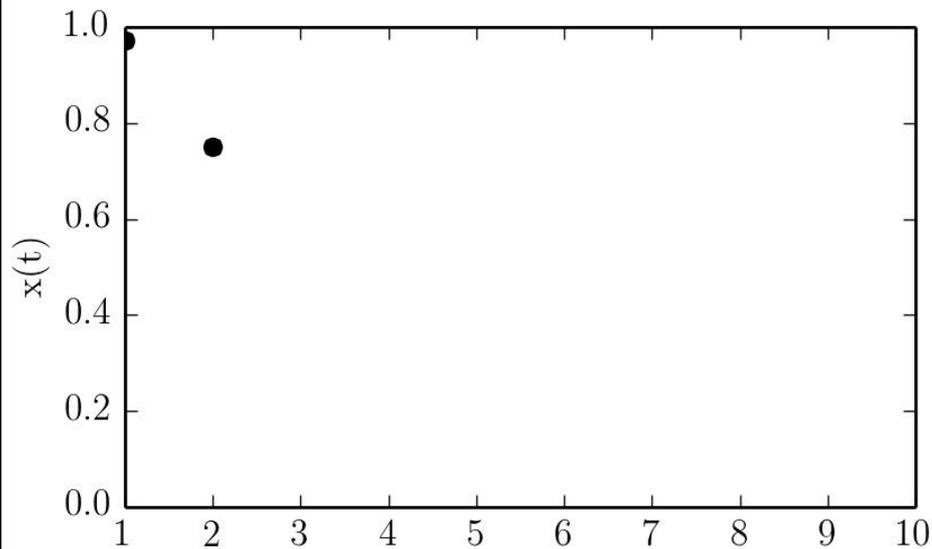
Beachte!: Definition von b und c ist in M.A.Nowak, „Evolutionary Dynamics“ vertauscht.

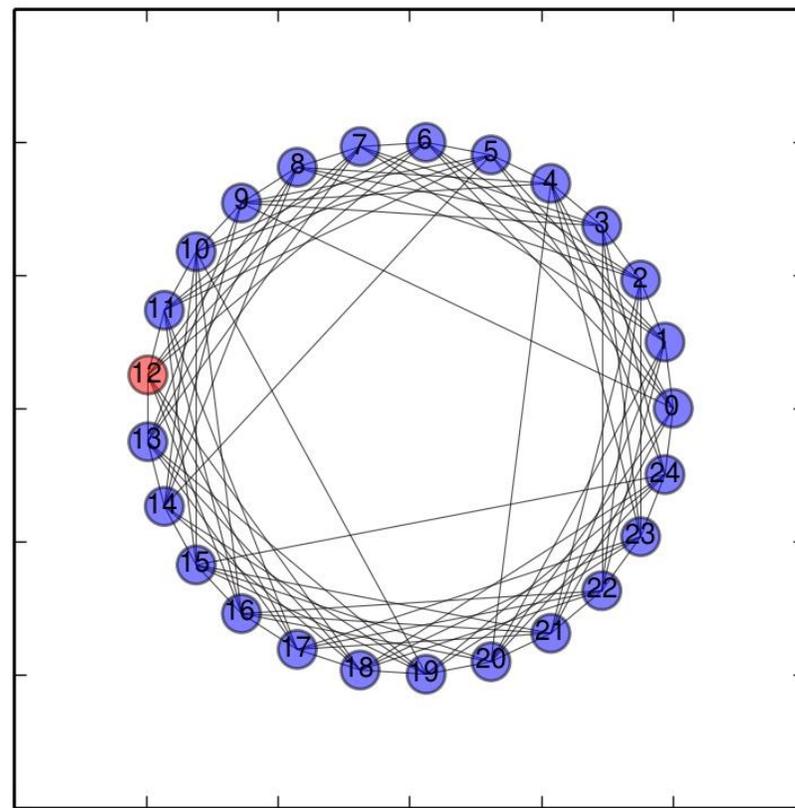
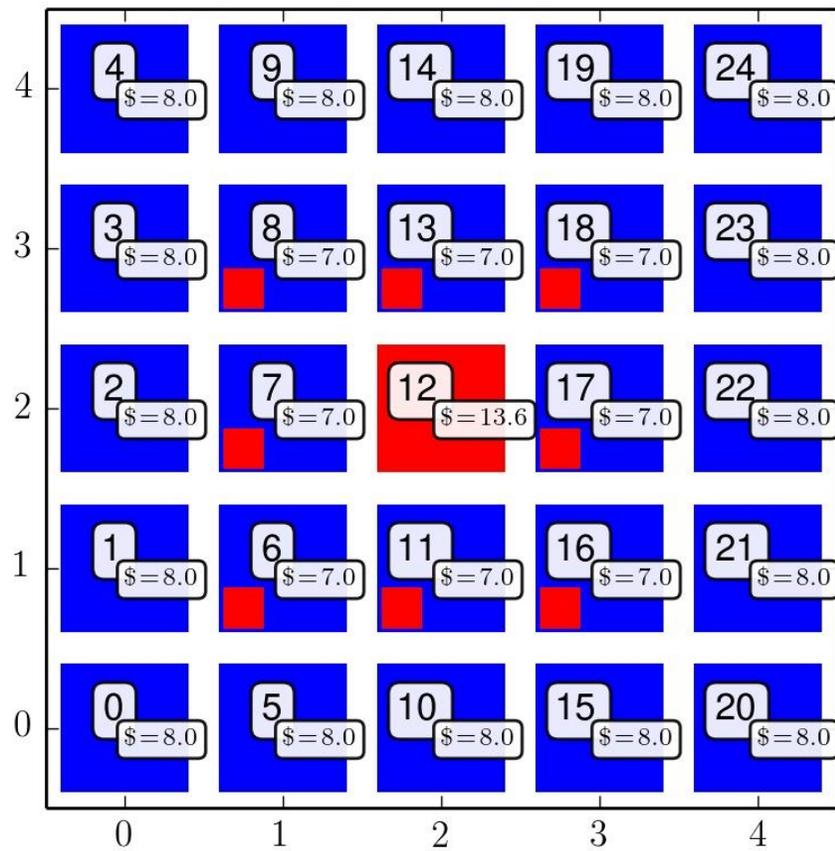
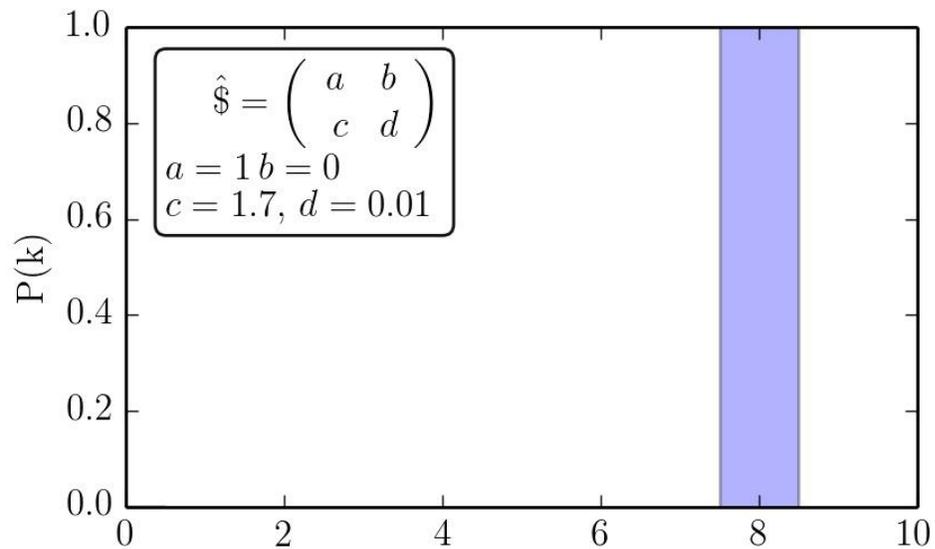
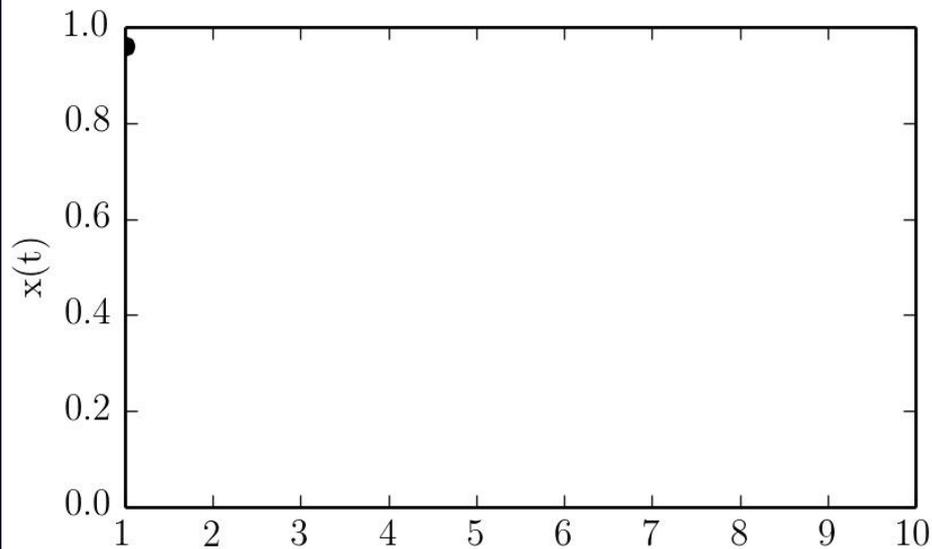
Update Rules und der Entscheidungsprozess

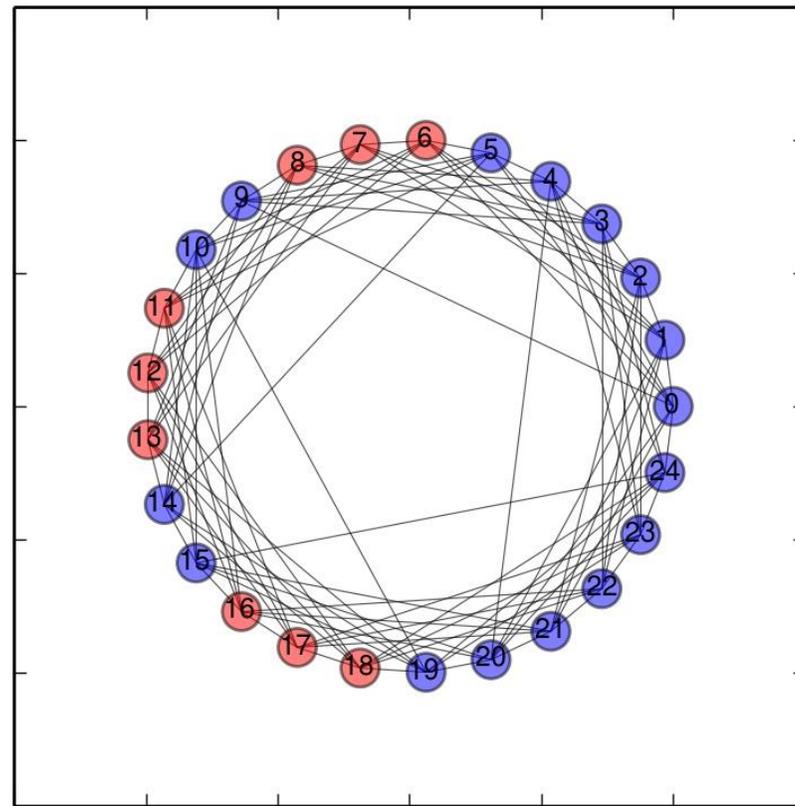
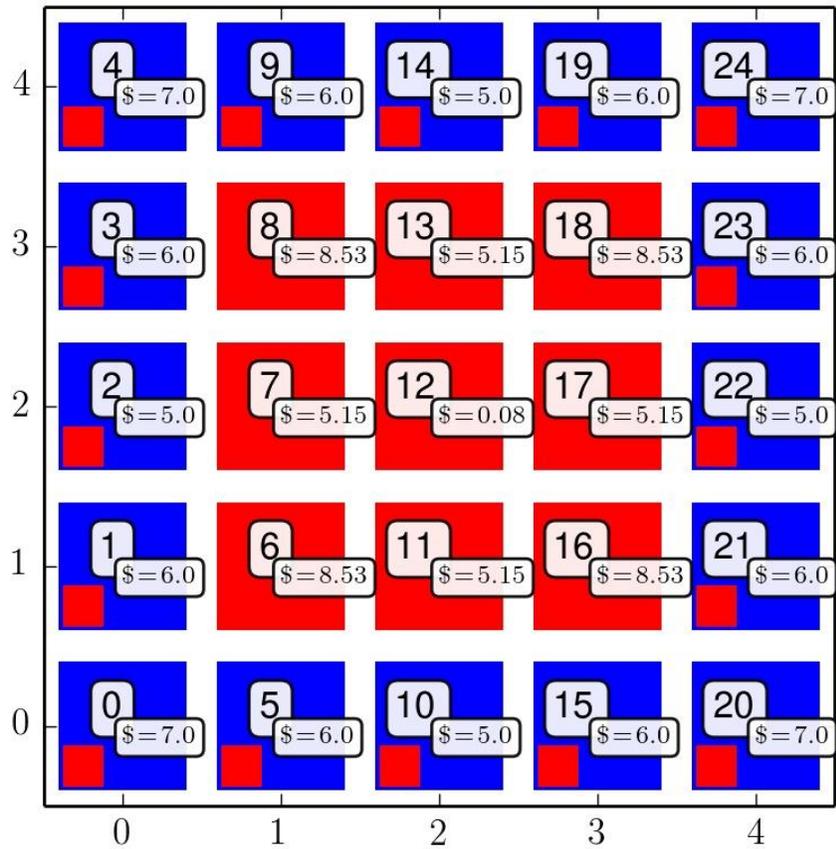
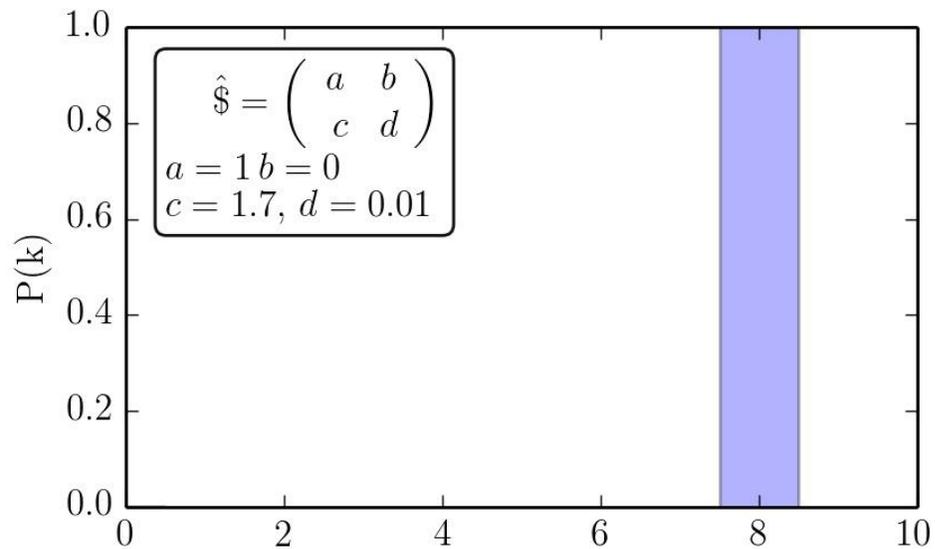
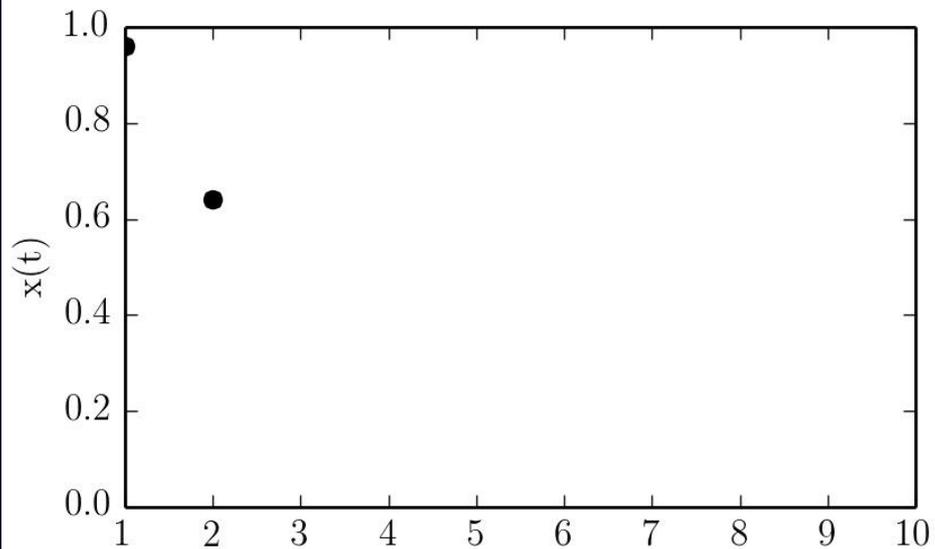
Spieler mit Knotennummer 8 hatte in der aktuellen Periode Strategie „blau“ gespielt und eine gesamte Auszahlung von $\$=7$ erhalten. Er wird in der nächsten Periode „rot“ spielen (siehe kleines rotes Kästchen), da einer seiner nächsten Nachbarn (Knoten 12) eine höhere Auszahlung als er hatte und dieser die Strategie „rot“ spielte.

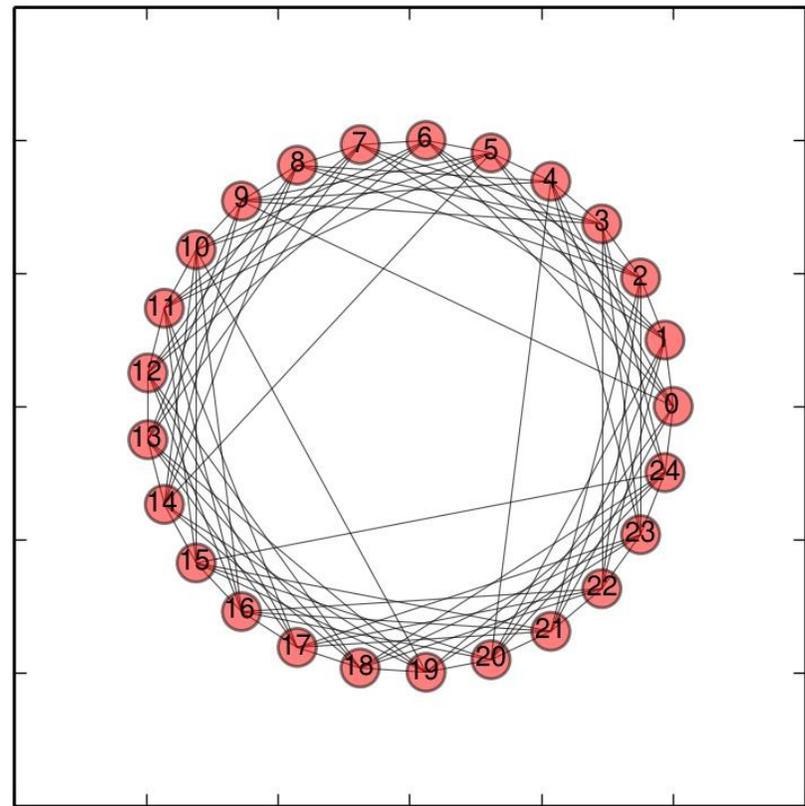
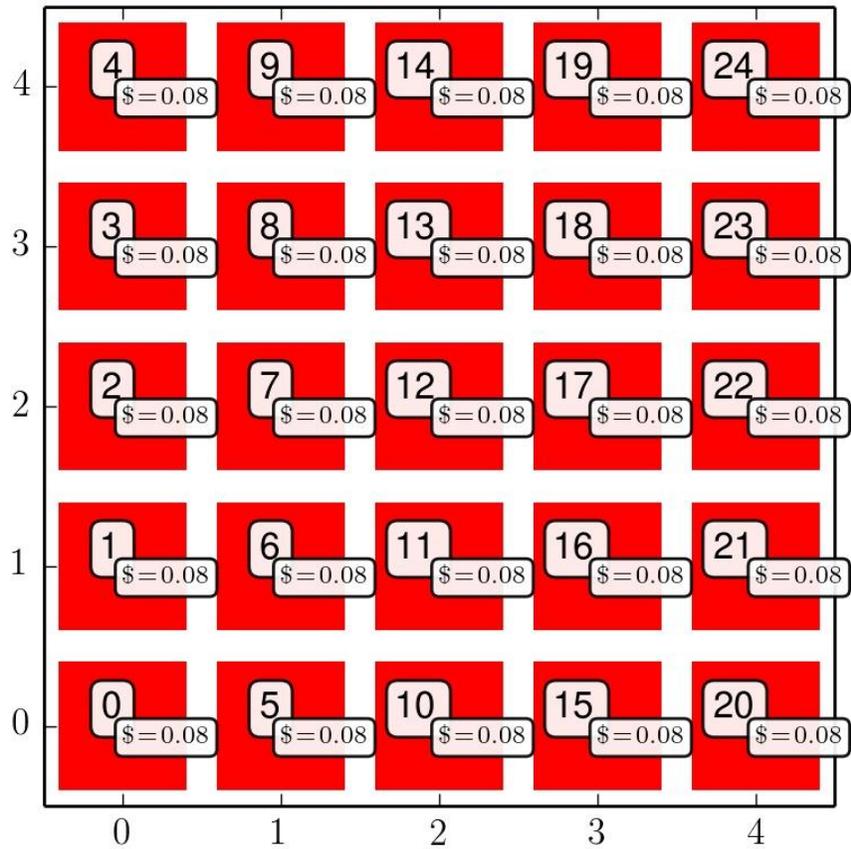
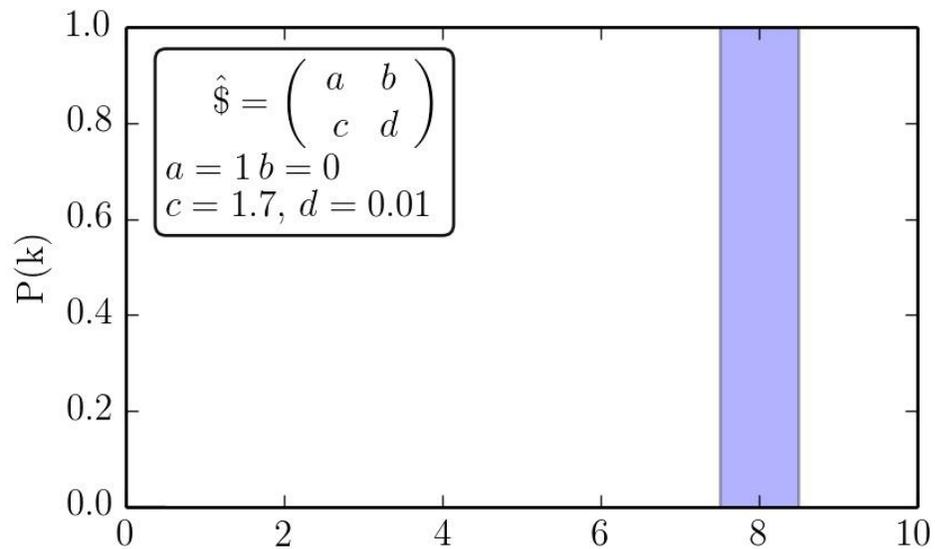
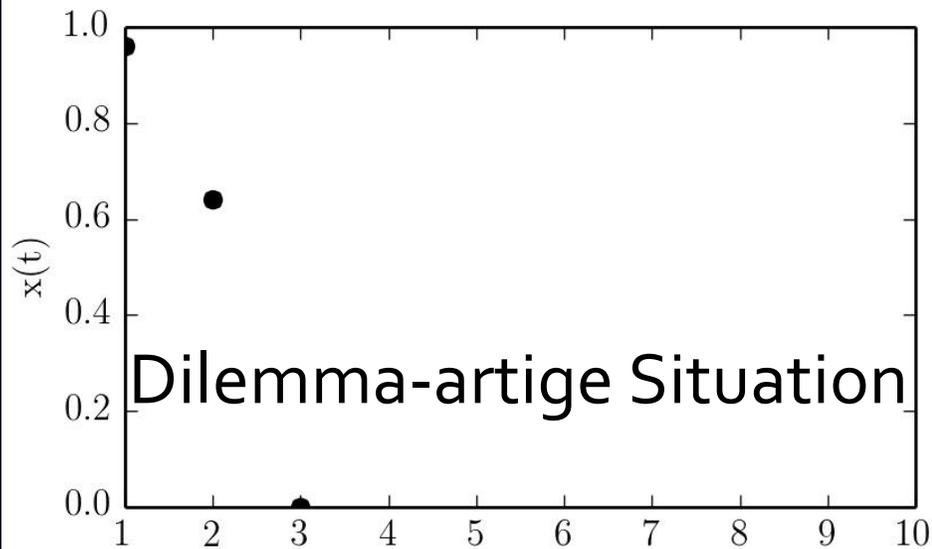
	Spieler B Strategie 1 $y=1$	Spieler B Strategie 1 $y=0$
Spieler A Strategie 1 $x=1$	(a , a)	(b , c)
Spieler A Strategie 2 $x=0$	(c , b)	(d , d)











Jupyter Notebook:
Evolutionäre räumliche Spiele
Klasse der dominanten Spiele

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
Frankfurt am Main 02.11.2020

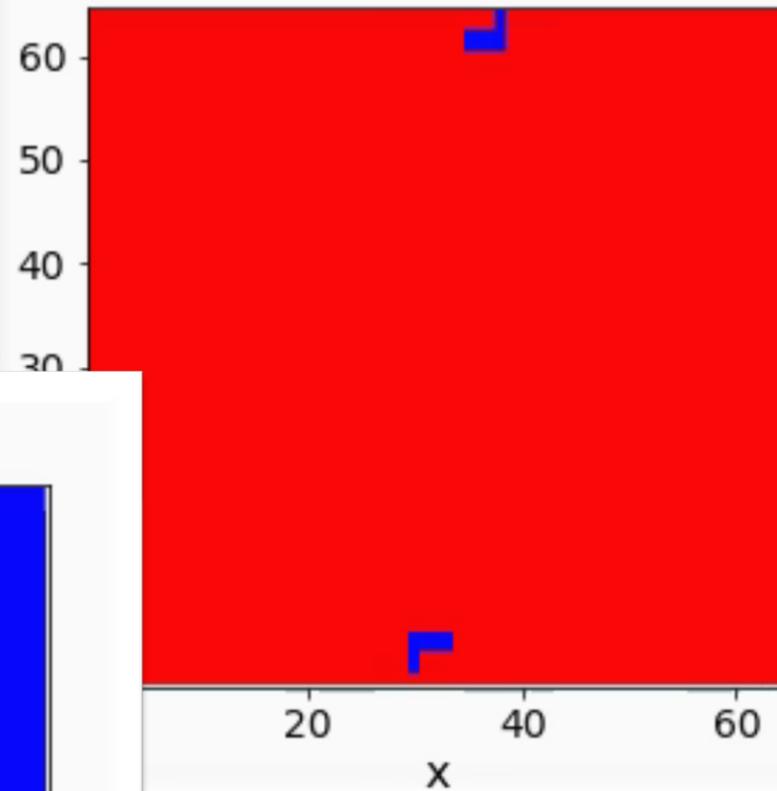
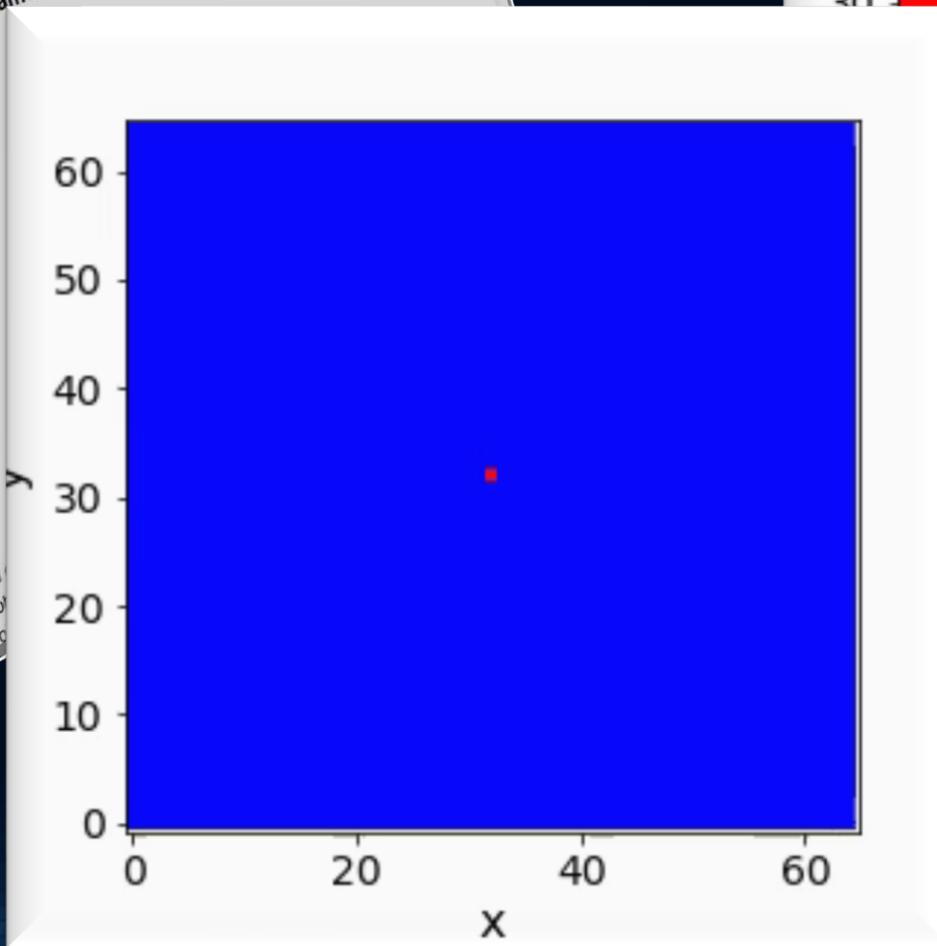
Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)

Beispiel: Dominante Spiele

Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II
vielversprechendes mathematisches Modell dar, welches sowohl
Netzwerkforschung dienen kann. In diesem Kapitel wird die Vo



Jupyter Notebook: Evolutionäre räumliche Spiele Klasse der Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
Frankfurt am Main 02.11.2020

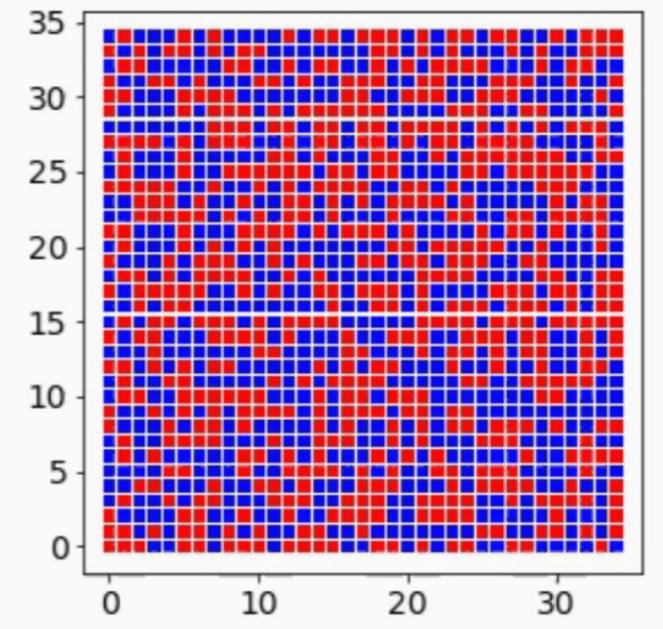
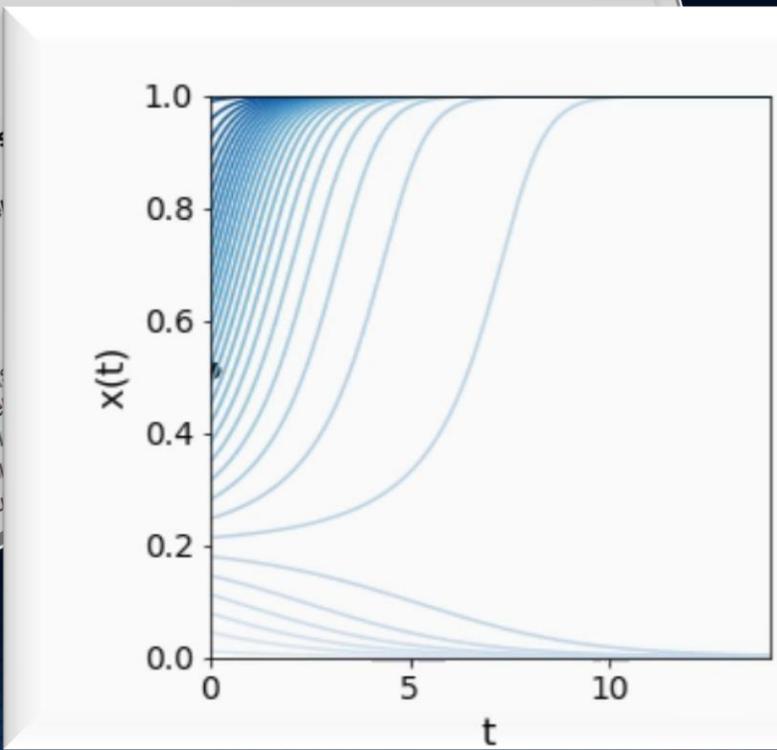
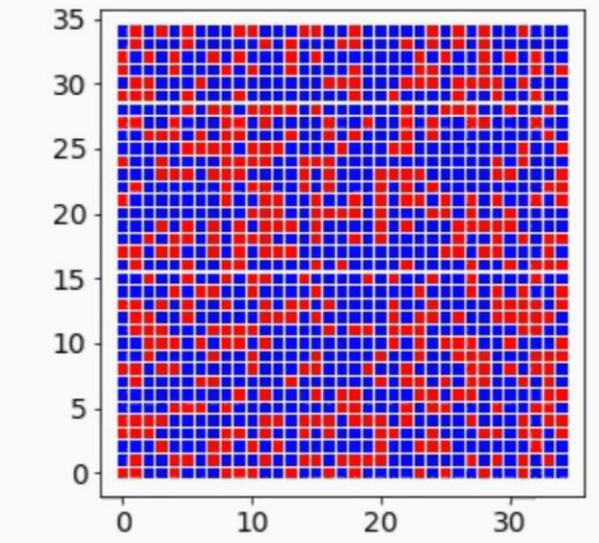
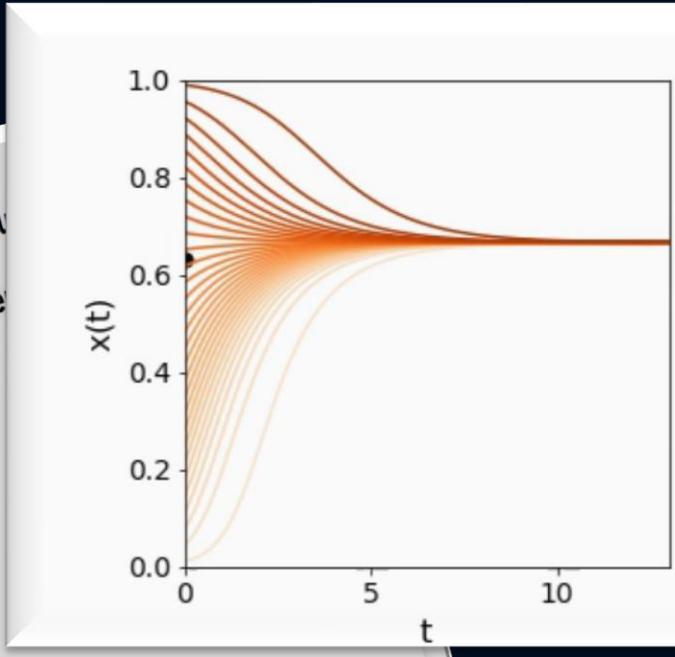
Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre räumliche Spiele (spatial games)

Beispiel: Koordinations- und Anti-Koordinationsspiele

Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (network theory) mit der Theorie der evolutionären räumlichen Spiele (spatial games) ist ein vielversprechendes mathematisches Modell dar, welches in der Netzwerkforschung beschrieben kann. In diesem Kapitel werden wir die Spieltheorie beschreiben. Die dann auf einem sozio-ökonomischen numerischer, agenten-basierter Computersimulationen



Jupyter Notebook: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen komplexen Netzwerken

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
Frankfurt am Main 31.12.2020

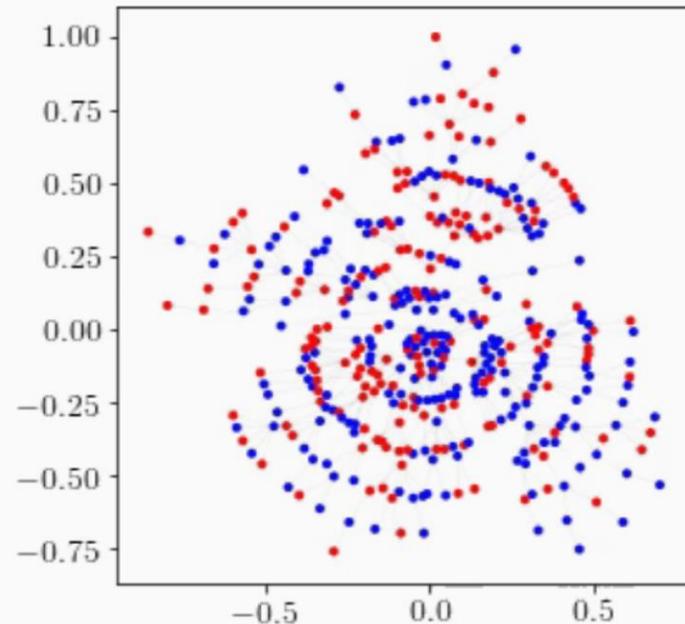
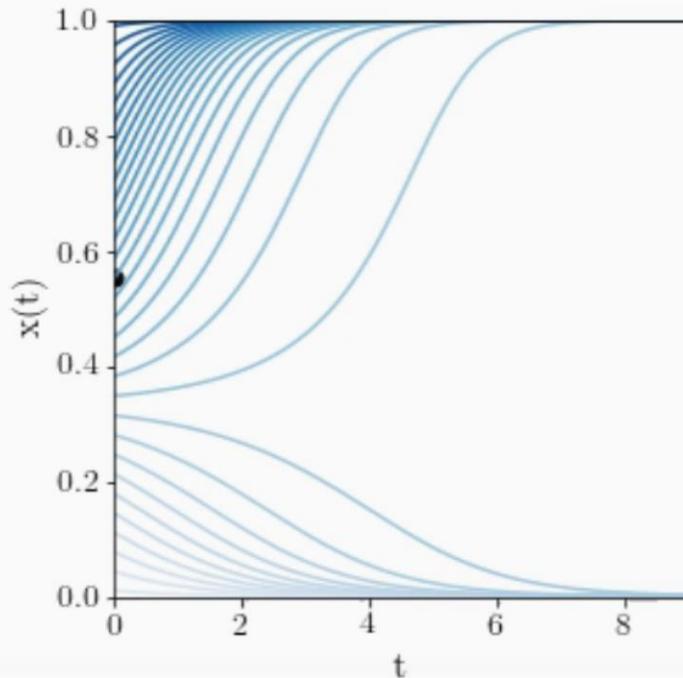
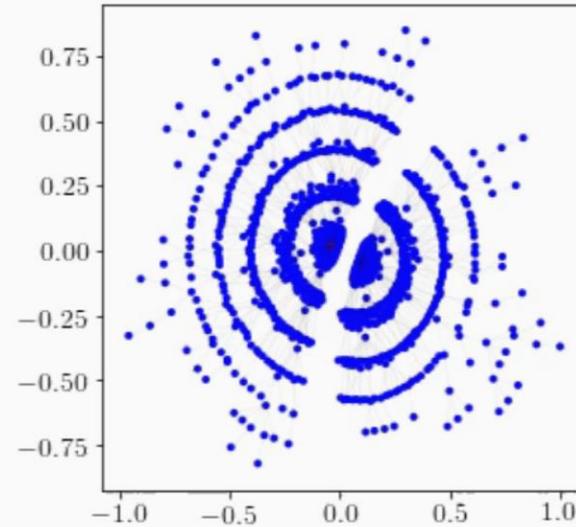
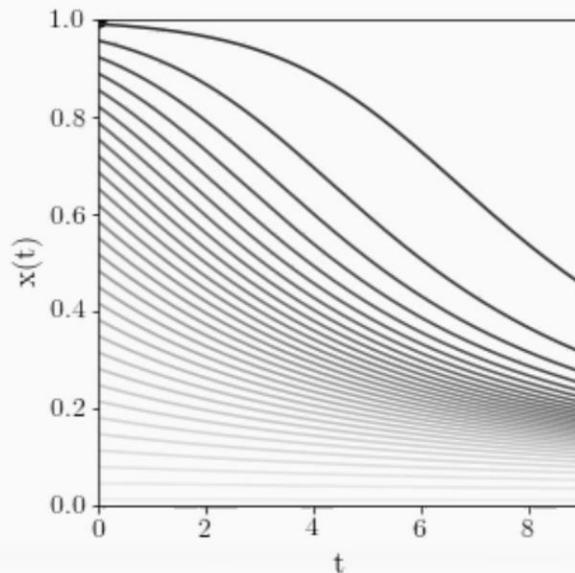
Dritter Vorlesungsteil:

Evolutionäre Spiele auf komplexen Netzwerken

Beispiel: Evolutionäre Spiele auf unterschiedlichen Netzwerk-

Einführung

Die Verknüpfung der Theorie komplexer Netzwerke (siehe Teil II) mit der Spieltheorie dienen kann. In diesem Kapitel wird die Vorlesungsinhalte beschrieben. Die dann auf einem solchen komplexen Netzwerk basierender Computersimulationen werden in den nächsten Jupyter Notebooks hatten wir die Spieltheorie auf dem nächsten Nachbarn spielen kann (Moore Nachbarn). In der nächsten 2-dimensionalen Fall spielen



Formation von „Communities“

<http://networksciencebook.com/chapter/9>

Defining Communities

Our sense of communities rests on a second hypothesis (Image 9.4):

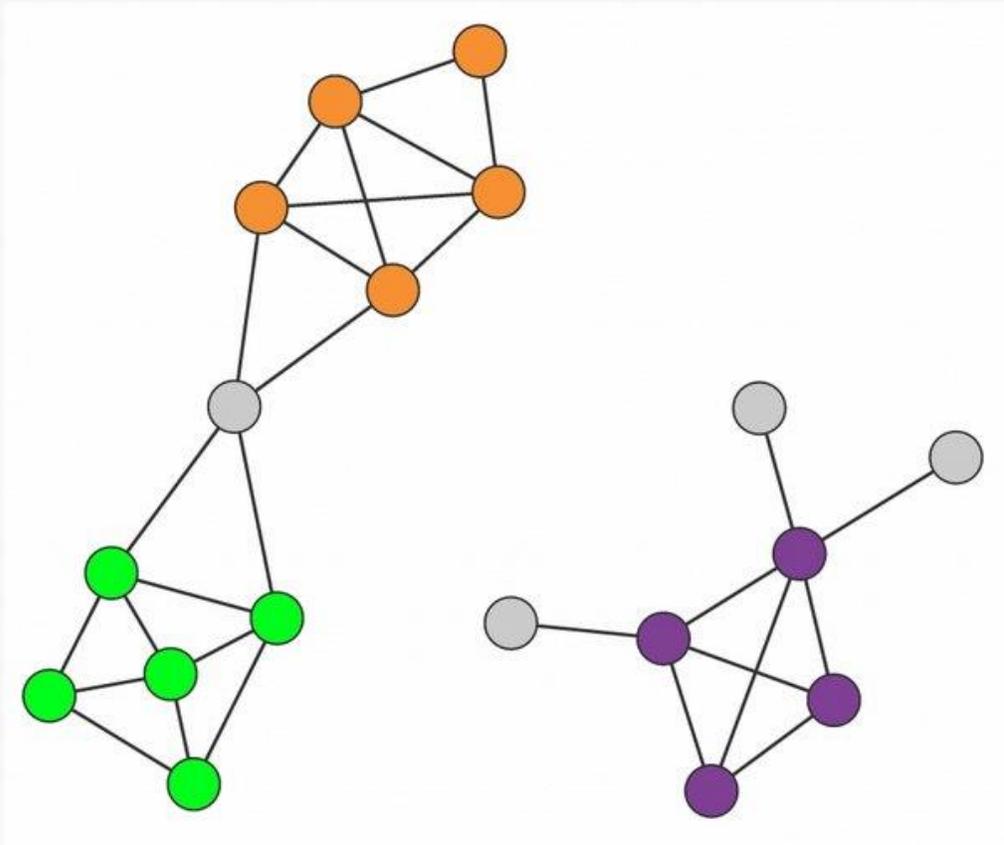


Image 9.4

Connectedness and Density Hypothesis

Communities are locally dense connected subgraphs in a network. This expectation relies on two distinct hypotheses:

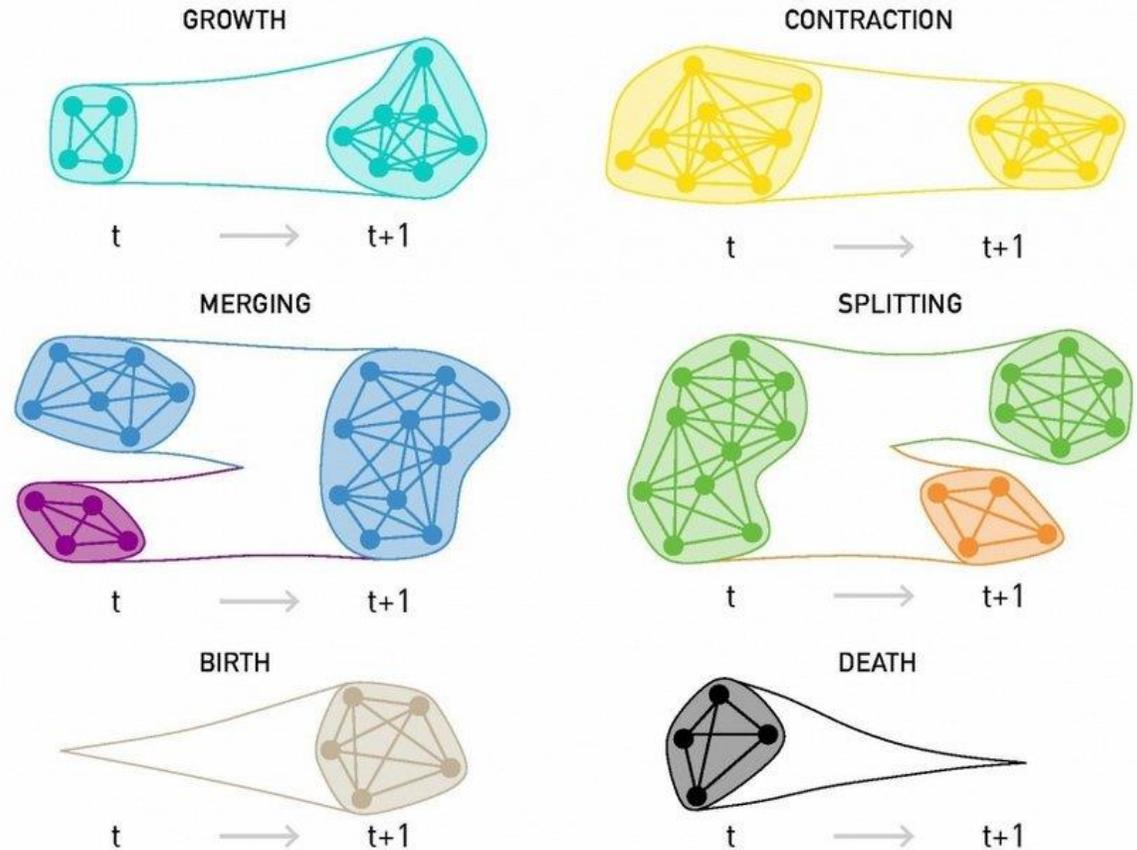


Image 9.31

Evolving Communities

When networks evolve in time, so does the underlying community structure. All changes in community structure are the result of six elementary events in the life of a community, illustrated in the figure: a community can grow or contract; communities can merge or may split; new communities are born while others may disappear. After [50].

Spielbaum eines simultanen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels

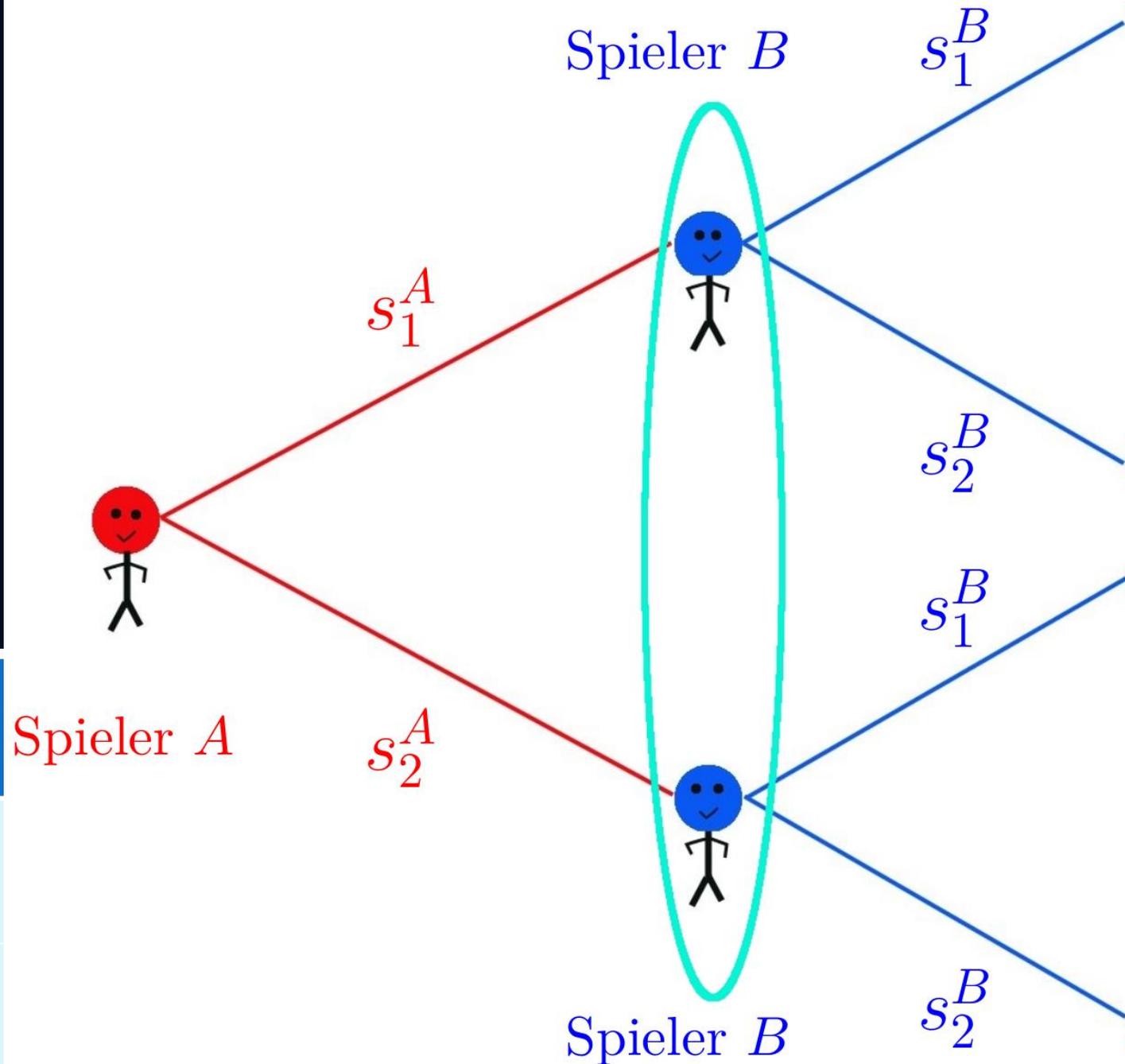
Definition des Spiels:

Menge der Spieler: A und B

Menge der Strategien: 1 und 2

Auszahlungstabelle:

	Spieler B wählt Strategie 1	Spieler B wählt Strategie 2
Spieler A wählt Strategie 1	$(\$_{11}^A, \$_{11}^B)$	$(\$_{12}^A, \$_{12}^B)$
Spieler A wählt Strategie 2	$(\$_{21}^A, \$_{21}^B)$	$(\$_{22}^A, \$_{22}^B)$



Einführung in die Quanten-Spieltheorie

Komplexe Zahlen

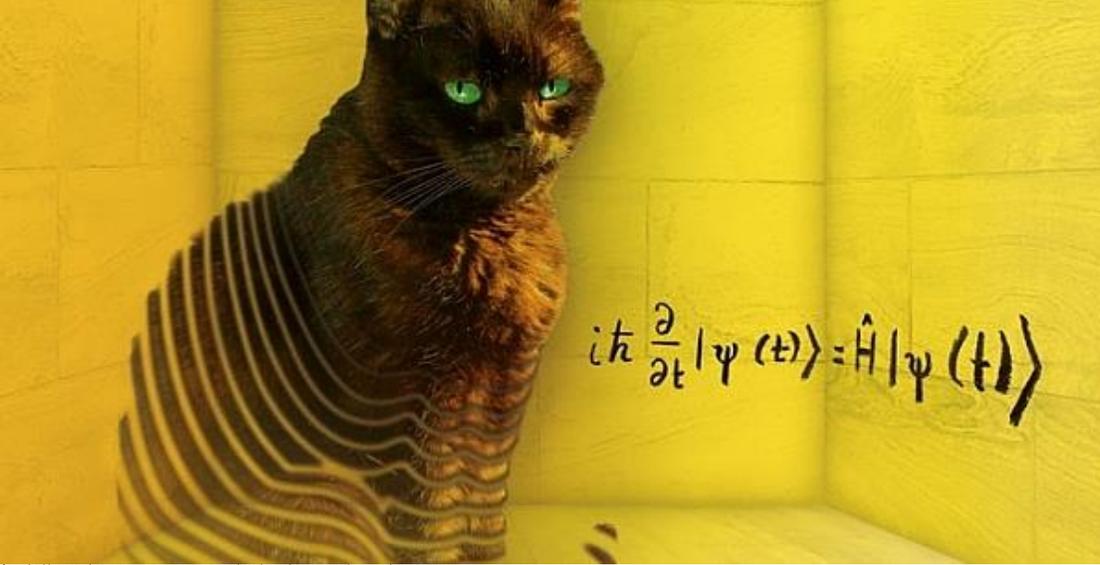
G.W. Leibniz (1702)

“...sind eine feine und wunderbare
Zuflucht des menschlichen
Geistes, beinahe ein Zwitterwesen
zwischen Sein und Nichtsein”

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$



Der Quantenzustand und die Schrödinger-Gleichung



Die Quantentheorie stellt eine gänzlich neue Formulierung der Physik dar. Bei der mathematischen Konstruktion dieser neuen Theorie stand man vor dem Dilemma, dass man einerseits daran gebunden ist, jedes physikalische Experiment in den Begriffen der klassischen Physik zu beschreiben, andererseits benötigte man neue, nicht klassische Elemente innerhalb der Theorie, um z.B. den Welle-Teilchen-Dualismus oder nichtlokale Eigenschaften von Teilchen äquivalent zu beschreiben. Am Ende dieser Entwicklung stand ein vollkommen neues Gerüst einer mathematischen Beschreibung, welches z.B. mittels der "Kopenhagener Deutung der Quantentheorie" interpretiert und verstanden wurde.

2) Die Schrödinger-Gleichung

Wie in der Einleitung erläutert, wird in der quantenmechanischen Beschreibung ein apriorischer Zustand Ψ des Teilchens definiert. Wie beschreibt man nun diesen Zustand eines Quantenobjektes mathematisch? Einerseits soll die zeitliche Entwicklung dieses Zustandes keine wirkliche, reale Abfolge von Ereignissen darstellen - eher eine Tendenz der Entwicklung. Der Zustand soll einer Wahrscheinlichkeitsbeschreibung von meßbaren Ereignissen dienen aber paradoxerweise selbst nicht real und empirisch fassbar sein. Die mathematische Beschreibung einer solchen Zustandsfunktion benutzt neben der realen Zahlenwelt auch die imaginären Zahlen und beschreibt den Zustand des Teilchens in einem komplexwertigen sog. Hilbertraum $\Psi \in \mathcal{H}$. Im Moment der Messung kollabiert dieser Zustand zu einer beobachtbaren Eigenschaft des Teilchens und diese observable Größe des Zustandes wird real. In diesem Unterpunkt wird die wichtigste Gleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik (die sog. Schrödinger-Gleichung) vorgestellt und diversen Beispielen erläutert. Die Schrödinger-Gleichung beschreibt wie sich die Zustandsfunktion eines Quantenobjektes $\Psi(\vec{r}, t)$ zeitlich verändert und bestimmt zusätzlich ihr räumliches Verhalten unter Einwirkung einer Kraft, die durch ein Potential $V(\vec{r}, t)$ hervorgerufen wird. Sie besitzt das folgende Aussehen:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) \quad \text{wobei:} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t)$$

\hat{H} ist der sog. Hamiltonoperator und $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator.

Unter der Annahme, dass das Potential nicht von der Zeit abhängt ($V(\vec{r}, t) = V(\vec{r})$), lässt sich die Schrödinger-Gleichung mittels des Produktansatzes $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot f(t)$ in die sog. stationäre (zeitunabhängige) Schrödinger-Gleichung umschreiben:

$$\hat{H} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad \text{mit:} \quad \Psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\psi(\vec{r})}_{f(t)} e^{-\frac{iE}{\hbar} t},$$

wobei E die Energie des Zustandes darstellt.

Elinor Ostrom (Nobel Prize 2009), “Collective Action and the Evolution of Social Norms”, The Journal of Economic Perspectives, Vol. 14, No. 3 (2000), pp. 137-158

“Face-to-face communication in a public good game-as well as in other types of social dilemmas-produces substantial increases in cooperation that are sustained across all periods including the last period ...Thus, recent developments in evolutionary theory and supporting empirical research provide strong support for the assumption that modern humans have inherited a propensity to learn social norms, similar to our inherited propensity to learn grammatical rules. Social norms are shared understandings about actions that are obligatory, permitted, or forbidden ...”

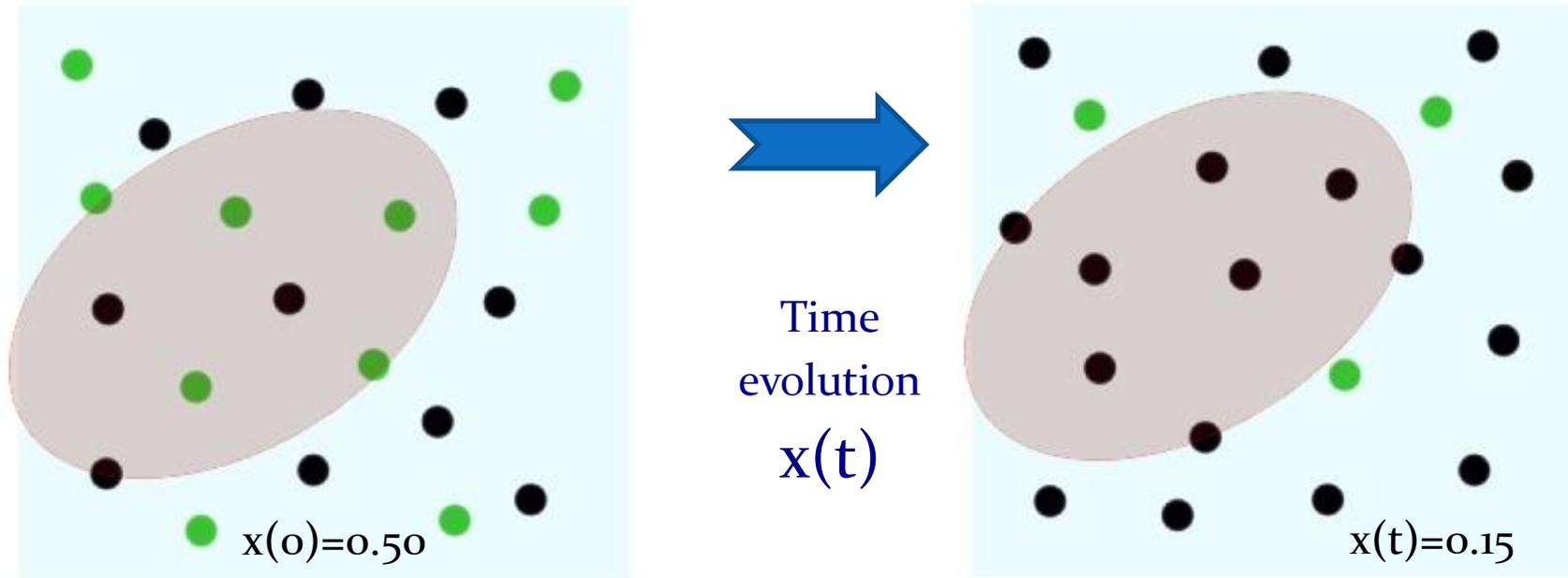
Ernst Strüngmann Forum (FIAS, May 27–June 1, 2012):

The Cultural Evolution of the Structure of Human Groups

How important are collective decision-making mechanisms compared to individual ones in the evolution of social systems? ...

Introduction

Die Quanten-Spieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Akteure wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden.



Strategies of each node (of each player): (green , black), $x(t)$: Fraction of player with strategy „green“ as a function of time t
Grey region: Group dependent collective cultural or moral standard

Denkwege im Gefangenendilemma

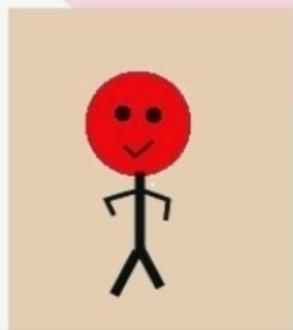
If A betrays me it is better if I also betray A.

If A is silent, it is better if I betray A

Complex space of all possible ways of thinking

If B betrays me it is better if I also betray B

If B is silent, it is better if I betray B



be silent

betray B

be silent

betray A

A\B	C	D
C	$(-1, -1)$	$(-5, 0)$
D	$(0, -5)$	$(-4, -4)$

Superpositionen von Eigenzuständen

Schrödingers Katze



Figure: Theoretische Versuchsanordnung des Gedankenexperiments.

In einem geschlossenen Kiste befindet sich ein instabiler Atomkern, der innerhalb einer bestimmten Zeitspanne mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zerfällt. Im Falle eines Zerfalls werde Giftgas freigesetzt, was eine im Raum befindliche Katze tötet. Bevor ein Beobachter die Kiste öffnet, schwebt der Zustand ψ der Katze zwischen den Eigenzuständen ' $\psi_1 := \text{Lebend}$ ' und ' $\psi_2 := \text{Tot}$ '.

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2)$$

Superpositionen von Eigenzuständen

Schrödingers Katze



Figure: Theoretische Versuchsanordnung des Gedankenexperiments.



The quantum-mechanical "[Schrödinger's cat](#)" paradox according to the Many-Worlds interpretation. In this interpretation, every quantum event is a branch point; the cat is both alive and dead, even before the box is opened, but the "alive" and "dead" cats are in different branches of the universe, both of which are equally real, but which do not interact with each other.^[a]

Beispiel: Das Wasserstoffatom

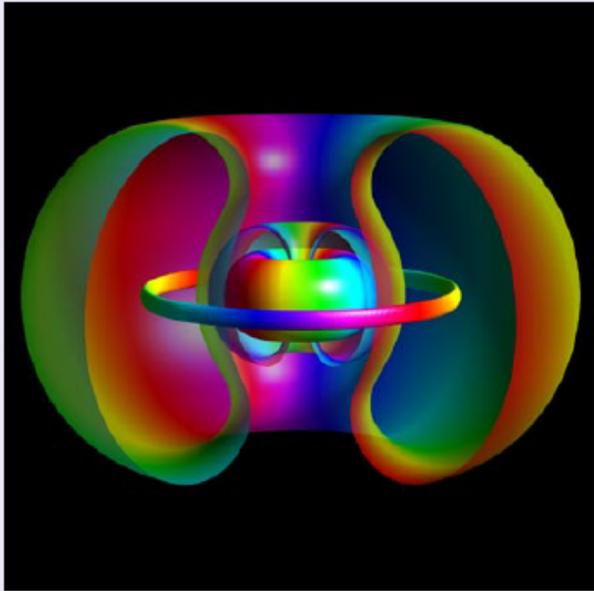


Figure:

Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Wasserstoffatom

($n=4, l=2, m=2$). Quelle: Bernd Thaller,

Visual Quantum Mechanics

Der Zustand eines Elektrons im Wasserstoffatom wird mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung berechnet. Die messbaren Eigenzustände des Elektrons ($\psi_{nlm}(\vec{r})$) sind durch ihre Quantenzahlen (n, l, m) quantisiert, d.h. Messgrößen wie z.B. die Energie können nur diskrete Werte annehmen. Der allgemeine Elektronenzustand ergibt sich durch Überlagerung (Superposition) der Eigenzustände ($a_{nlm} \in \mathbb{C}$).

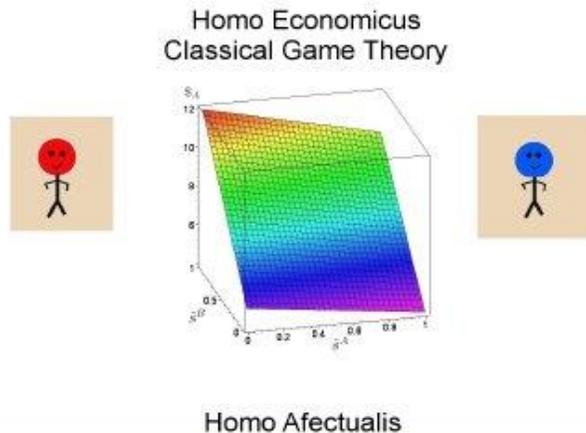
$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l a_{nlm} \psi_{nlm}$$

Beyond Homo Economicus

Quantum Game Theory
Entanglement Quantum Strategies
Homo Sociologicus Homo Transcendentalis

$$|\Psi\rangle$$

Extended models of classical evolutionary game theory (e.g. [10, 9])



The final 2-player quantum state:

$$|\Psi\rangle = \hat{\mathcal{J}}^\dagger \left(\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B \right) \hat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle$$

$\hat{\mathcal{J}}(\gamma)$: Entangling operator

$\hat{\mathcal{J}}^\dagger(\gamma)$: Disentangling operator

$\gamma \in [0, \pi]$: Strength of entanglement

\hat{U}_A : Decision Operator for player A

\hat{U}_B : Decision Operator for player B

Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

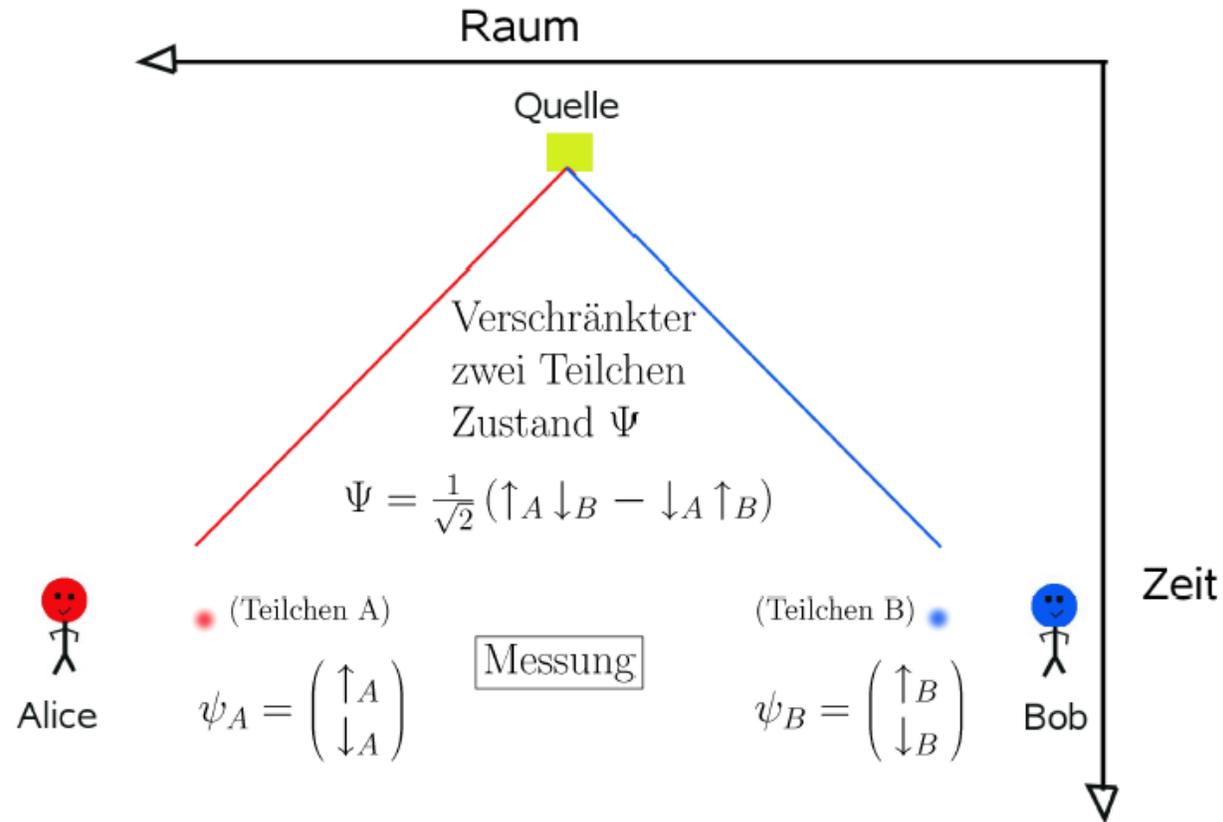


Figure: EPR Gedankenexperiment: Obwohl es keine messbare Wechselwirkung zwischen den Teilchen A und B gibt, sind diese dennoch mittel einer Quantenverschränkung verbunden.

Verschränkte 2-Niveau-Quantensysteme

Zwei Teilchen (A,B) haben die Möglichkeit zwischen zwei Zuständen (\uparrow, \downarrow) zu wählen. Die Basisvektoren der jeweiligen Hilberträume der Teilchen seien wie folgt definiert:

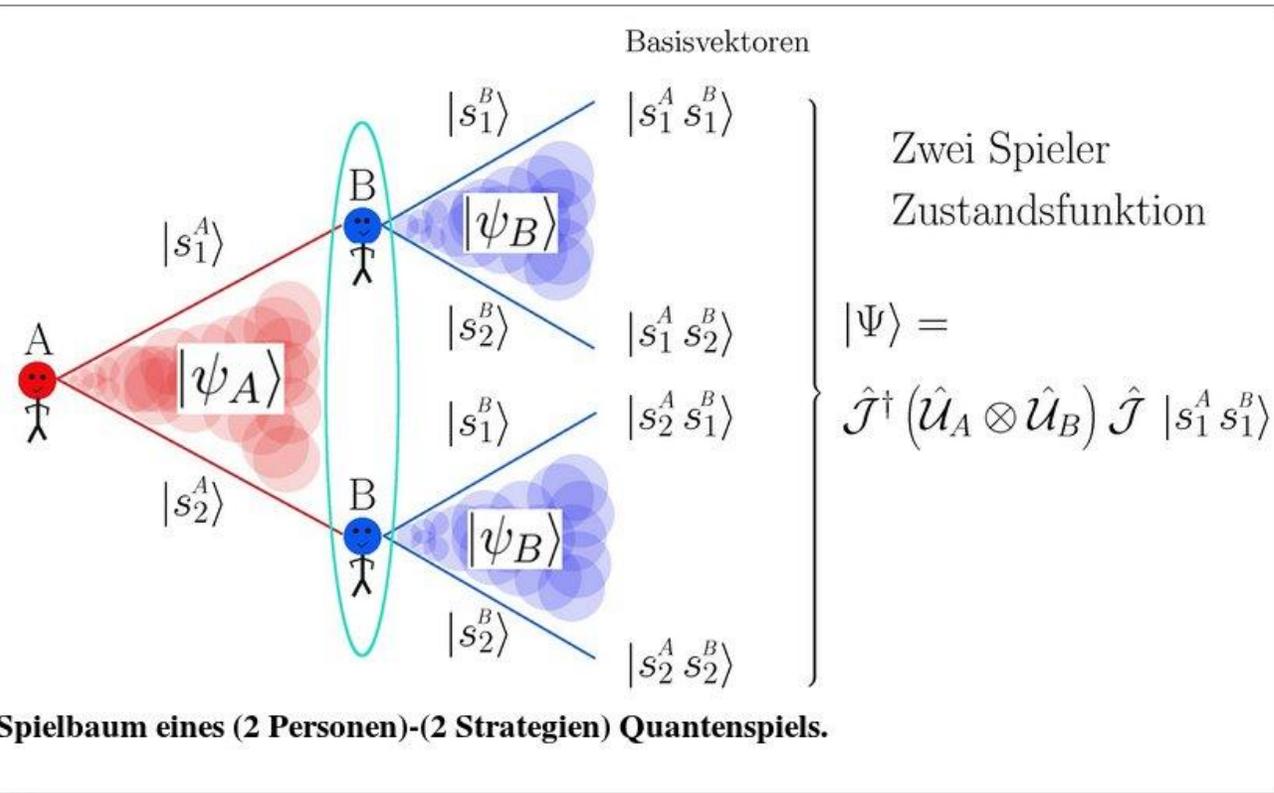
Zustand des Teilchens A: $\psi_A \in \mathcal{H}_A \equiv \mathbb{C}^2$, Basis: $\{\uparrow_A, \downarrow_A\}$

Zustand des Teilchens B: $\psi_B \in \mathcal{H}_B \equiv \mathbb{C}^2$, Basis: $\{\uparrow_B, \downarrow_B\}$

Der Hilbertraum des zusammengesetzten Systems ist ein komplexer vierdimensionaler Raum ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$). Der Gesamtzustand des 2-Teilchen Systems Ψ kann unter Umständen nicht in die jeweiligen Einzelzustände separiert werden.

Verschränkter Zustand (z.B.): $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_A \downarrow_B - \downarrow_A \uparrow_B)$

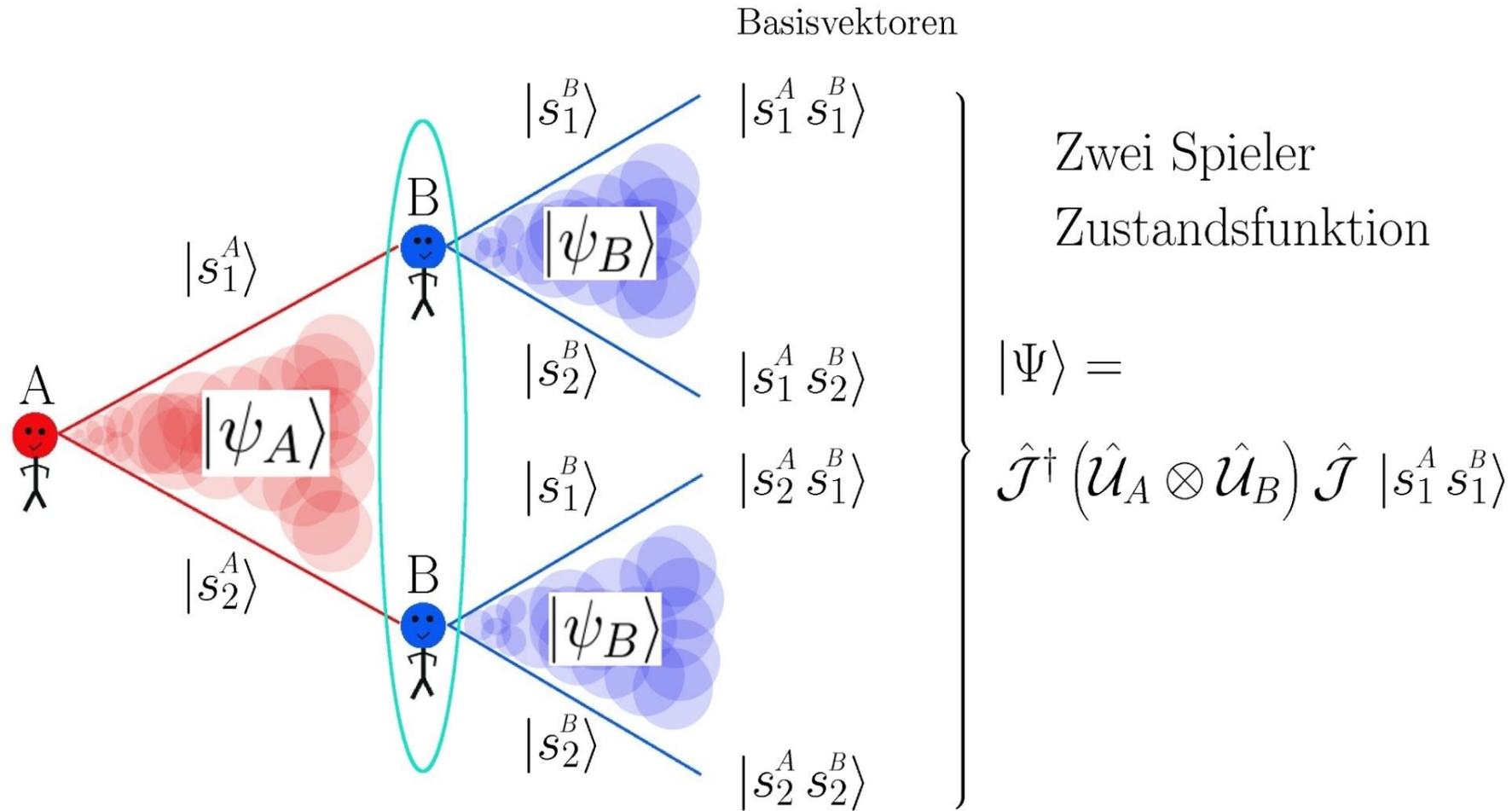
III.2 Quanten Spieltheorie



Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.

Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungszustand eines Spielers $\mu = A, B$, bevor dieser die endgültige Wahl der reinen Strategie getroffen hat, als eine komplexwertige Größe (einen sog. Spinor $|\psi\rangle_A$ bzw. $|\psi\rangle_B$) in einem zweidimensionalen Zustandsraum, dem sogenannten Hilbertraum \mathcal{H}_A bzw. \mathcal{H}_B . Der Zwei-Spielerzustand $|\Psi\rangle$ ist ein

vierkomponentiger Spinor, welcher auf dem gemeinsamen Hilbertraum der Spieler ($\mathcal{H} := \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$) definiert ist. Formal setzt sich dieser aus den Entscheidungsmatrizen (Entscheidungsoperatoren) \hat{U}_A bzw. \hat{U}_B und der Verschränkungsmatrix (bzw. dem Verschränkungsoperator) $\hat{\mathcal{J}}$ zusammen (siehe nebenstehende Abbildung). Die der evolutionären Entwicklung zugrundeliegende Replikatorndynamik besitzt in der evolutionären Quantenspieltheorie eine komplexere Struktur und die jeweiligen evolutionär stabilen Strategien können sich, abhängig vom Maß der Verschränkung, abändern.



Wie geht man in der Physik vor?

Wie beschreibt man in der Physik das Verhalten der untersuchten Dinge?

Nehmen wir z.B. das Elektron als das Ding (der Aktant (Akteur, Knoten, Spieler)) des zu untersuchenden Systems. Mit welcher Theorie beschreiben wir das Verhalten dieses Elektrons?

des Elektrons und seines zugehörigen Antiteilchens als Zustand eines Diracspinors zusammen:

$$\psi_A = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \\ \tilde{e}_L \\ \tilde{e}_R \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} \text{Linkshändiges Elektron} \\ \text{Rechtshändiges Elektron} \\ \text{Linkshändiges Positron} \\ \text{Rechtshändiges Positron} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Man kann dann mit ein und derselben Gleichung sowohl das Teilchen als auch das Antiteilchen beschreiben. Die zutreffende Gleichung nennt man Diracgleichung; sie besitzt die folgende Form:⁶

$$i \gamma^\mu_A{}^B \partial_\mu \psi_B - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi_A = 0 \quad (1.2)$$

$i = \sqrt{-1}$: Imaginäre Einheit

c : Lichtgeschwindigkeit

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$: Plank'sches Wirkungsquantum

m_0 : Ruhemasse des Fermions

μ : Raumzeitindex 0...3

A, B : Diracindex 1..4

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$: Partielle Ableitung

ψ_A : Fermionischer Diracspinor

$\gamma^\mu_A{}^B$: Dirac Matrizen

Vergleicht man den Zwei-Spielerzustand der Quanten Spieltheorie mit dem Diracspinor, so repräsentieren die beiden Spieler das Teilchen und das Antiteilchen und der Hängigkeit (links, rechtshändig) die Strategienwohl der Spieler.

Teil III.2.1 Einführung in die Quanten Spieltheorie

Die Annahme des vollständig verbundenen, zufälligen Netzwerks, welches die Grundlage der deterministischen evolutionären Spieltheorie bildet, ist in realen sozialen Netzwerken oft nicht erfüllt. In realen sozialen Netzwerken bilden sich oft weitgehend abgeschlossene Cluster von miteinander verbundenen Spielern, die zu anderen Clustern nur bedingt bzw. selten Kontakt haben. Diese Art von Cluster- bzw. Cliquesbildung kann zu einer unterschiedlichen Ausprägung von sozialen Normen innerhalb der einzelnen Teilgruppen führen. Soziale Normen können sich somit herausbilden, die den einzelnen Spielern neben ihrem *homo ökonomischen* Interesse auch den Blick auf das Wohl der eigenen Gruppe nahelegen. Eine solche Art von induziertem Gruppeninteresse wird im folgenden mittels des Ansatzes der Quanten-Spieltheorie mathematisch in die deterministischen Gleichungen der evolutionären Spieltheorie eingearbeitet. Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.

Die erste formale Beschreibung der Quanten-Spieltheorie wurde im Jahre 1999 von Eisert et al. vorgestellt. Diese oft zitierte Arbeit betrachtet die quantentheoretische Erweiterung eines Gefangenendilemma Spiels und zeigt auf, dass die Spieler dem Dilemma entkommen können, falls der strategische Verschränkungswert oberhalb einer dem Spiel eigenen Grenze liegt. Im selben Jahr (1999) analysierte D. A. Meyer das *Penny Flip* Spiel und erweiterte dieses mittels quantentheoretischer Konzepte. In seinem Artikel betrachtete er den unrealistischen Fall, dass einer der Spieler das im Spiel benutzte Geldstück in einem überlagerten Quantenzustand positionieren könne und zeigte, dass dieser Spieler stets das Spiel gewinnen wird, falls sein Gegenspieler eine rein klassische Strategie benutzt. Im Jahre 2000 kommentierte S.J. van Enk die Arbeit von D. A. Meyer und zeigte, dass Meyer's Behauptung nicht sonderlich beeindruckend ist, da er nur einem der Spieler einen größeren Strategienraum erlaubt. Im Jahre 2000 wendeten Marinatto & Weber die quantentheoretischen Konzepte auf das *Kampf der Geschlechter (battle of sexes)* Spiel an und zeigten, dass durch die Verschränkung der Spielerstrategien ein eindeutiges Gleichgewicht möglich ist. In den folgenden Jahren wurden die quantenspieltheoretischen Konzepte auf weitere Spiele ausgedehnt; so analysierte R.V. Mendes die Quantenversion des *Ultimatum Spiels*, Hogg et al. betrachteten das *Öffentliche Gut* Spiel, eine Version des *Quanten Koordinationsspiels* und analysierten *Quanten Auktionen*. Benjamin & Hayden erweiterten im Jahre 2001 den Formalismus der Quanten-Spieltheorie auf mehr als zwei Spieler. Im Jahre 2002 benutzten Piotrowski & Sladkowsky die quantenspieltheoretischen Konzepte um Eigenschaften im Verhalten von Märkten zu erklären. Im Jahre 2006 analysierten Hanauske et al. das *Open Access*-Publikationsverhalten wissenschaftlicher Autoren mittels des quantentheoretischen Ansatzes. Bereits im Jahre 2001 wurde das erste Quantenspiel auf einem Quantencomputer realisiert, wobei sich die vorhergesagten Eigenschaften bestätigten. Die Resultate dieser Experimente wurden im Jahre 2007 von A. Zeilinger erneut bestätigt. Die ersten Ansätze einer Anwendung der Quanten-Spieltheorie auf sozio-ökonomische Experimente wurden nach 2007 veröffentlicht. Neben diesen Arbeiten, entwickelte sich im Bereich der Psychologie ein weiterer wissenschaftlicher Forschungszweig, welcher quantentheoretische Konzepte zur Erklärung von experimentellen Daten benutzt. Diese Arbeiten zeigen, dass viele, zunächst nicht erklärbare experimentelle Befunde im Bereich der Psychologie, sich mittels quantenlogischer Konzepte beschreiben lassen.



- The *Quantum* Penny Flip Game
1999, D. A. Meyer, *Quantum strategies*, PRL 82 (1052)
- The *Quantum* Prisoner's Dilemma
1999, J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, *Quantum Games and Quantum Strategies*, PRL 83 (3077)
- The *Quantum* Battle of Sexes
2001, L. Marinatto and T. Weber, *A Quantum Approach To Static Games Of Complete Information*, Physics Letters A 272
- The *Quantum* Coordination Game
2003, B. A. Huberman and T. Hogg, *Quantum Solution of Coordination Problems*, Quantum Information Processing 2(6)
- The *Quantum* Ultimatum Game
2005, R. Vilela Mendes, *The Quantum Ultimatum Game*, Quantum Information Processing 4(1)



- Economics and Quantum Game Theory
2002, E. W. Piotrowski and J. Sladkowski, *Quantum Market Games*, Physica A (312) 208
2002, Kay-Yut Chen, T. Hogg and R. Beaulsoleil *A Quantum Treatment of Public Goods Economics*, Quantum Information Processing 1(6)
2004, E. W. Piotrowski and J. Sladkowski *Quantum Game Theory in Finance*, Quantitative Finance 4 (1-7)
2007, T. Hogg, P. Harsha and Kay-Yut Chen *Quantum Auctions*, Int. J. of Quantum Information 5:751-780
2007, M. Hanauske, S. Bernius and B. Dugall, *Quantum Game Theory and Open Access Publishing*, Physica A, Vol.382 (2007), p.650-664 (physics/0612234)



- Quantum Computer and Quantum Game Theory
2002, J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou and R. Han
Experimental realization of quantum games on a quantum computer, PRL 88 (137902)
2007, R. Prevedel, A. Stefanov, P. Walther and A. Zeilinger
Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer, New Journal of Physics 9 (205)
2008, P. Benicio, Melo de Sousa, R. V. Ramos *Multiplayer Quantum Games and its Application as Access Controller in Architecture of Quantum Computers*, arXiv:0802.3684v2
- Extensions of Quantum Game Theory
2001, S. C. Benjamin and P. M. Hayden, *Multi-Player Quantum Games*, PRA 64 (030301) ...



- Experimental Economics and Quantum Game Theory
2006, Kay-Yut Chen and Tad Hogg *How well do people play a quantum prisoner's dilemma?*, Quantum Information Processing 5(43)
2007, Kay-Yut Chen and Tad Hogg *Experiments with Probabilistic Quantum Auctions*, arXiv:0707.4195v1
2007, M. Hanauske, S. Bernius, W. König and B. Dugall *Experimental Validation of Quantum Game Theory*, Accepted Paper at the Conference *LOFT 2008*
- and reviews in Physics World and Nature ...

Quantum Game Theory and Scientific Communication

M. Hanauske, S. Bernius und B. Dugall “Quantum Game Theory and Open Access Publishing” (in *Physica A* 382 (2007) 650-664)

Matthias Hanauske, Wolfgang König und Berndt Dugall “Evolutionary Quantum Game Theory and Scientific Communication” (Beitrag auf der Konferenz “Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society” (2010))

Matthias Hanauske “Evolutionary Game Theory and Complex Networks of Scientific Information” (Chapter in the Springer Book “Models of science dynamics—Encounters between complexity theory and information science” (2011))

Quantum Game Theory and Financial Crises

M. Hanauske, J. Kunz, S. Bernius und W. König “Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory-based analysis of financial crises” (in *Physica A* 389 (2010) 5084 – 5102)

Quantum Game Theory and Experimental Economics

M. Hanauske, S. Bernius, W. König und B. Dugall “Experimental Validation of Quantum Game Theory” (Beitrag auf der Konferenz “Logic and the Foundations of Game and Decision Theory” (2008))

Quantum Game Theory and Networks of Software Firms

Quantum Game Theory and Social Norms in Firms



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

Journal of Mathematical Psychology 50 (2006) 220–241

Journal of
Mathematical
Psychology

www.elsevier.com/locate/jmp

Quantum dynamics of human decision-making

Jerome R. Busemeyer*, Zheng Wang, James T. Townsend

Indiana University, USA

Received 10 December 2004; received in revised form 11 January 2006

Available online 15 March 2006

Abstract

A quantum dynamic model of decision-making is presented, and it is compared with a previously established Markov model. Both the quantum and the Markov models are formulated as random walk decision processes, but the probabilistic principles differ between the two approaches. Quantum dynamics describe the evolution of complex valued probability amplitudes over time, whereas Markov models describe the evolution of real valued probabilities over time. Quantum dynamics generate interference effects, which are not possible with Markov models. An interference effect occurs when the probability of the union of two possible paths is smaller than each individual path alone. The choice probabilities and distribution of choice response time for the quantum model are derived, and the predictions are contrasted with the Markov model.

© 2006 Elsevier Inc. All rights reserved.

Keywords: Quantum; Markov; Dynamics; Decision-making; Random-walk; Diffusion; Choice; Response-time

A Brief Introduction to Quantum Formalism
Emmanuel Haven and Andrei Khrennikov

**Quantization in Financial Economics:
An Information-Theoretic Approach**
Raymond J. Hawkins and B. Roy Frieden

Quantum Game Theoretical Frameworks in Economics
Edward W. Piotrowski and Jan Śładkowski

The Intrinsic Quantum Nature of Classical Game Theory
Y. Pelosse

**Decision-Making and Cognition Modeling from the
Theory of Mental Instruments**
Irina Basieva and Andrei Khrennikov

Adaptive Dynamics and an Optical Illusion
Masanori Ohya and Yoshiharu Tanaka

Strategic Choice in Hilbert Space
Charles E. Smith Jr. and Christopher Zorn

1 **Voters' Preferences in a Quantum Framework**
Polina Khrennikova and Emmanuel Haven 141

19 **Quantum Structure in Cognition Origins, Developments,
Successes, and Expectations**
Diederik Aerts and Sandro Sozzo 157

39 **Quantum Cognition, Neural Oscillators, and Negative Probabilities**
J. Acacio de Barros and Gary Oas 195

59 **Quantum-Like Type Indeterminacy: A Constructive
Approach to Preferences à la Kahneman and Tversky**
A. Lambert-Mogiliansky 229

Quantum Models of Human Causal Reasoning
Jennifer S. Trueblood and Percy K. Mistry 251

**A Quantum Probability Model for the Constructive
Influence of Affective Evaluation**
Lee C. White, Emmanuel M. Pothos, and Jerome R. Busemeyer 267

**Is there Room in Quantum Ontology for a Genuine
Causal Role for Consciousness?**
Paavo Pyllkkänen 293

Big Challenges Section 319

Why Quantum?
Andrei Khrennikov 321

**Quantum Principles and Mathematical Models
in Physics and Beyond**
Arkady Plotnitsky 335

Emmanuel Haven • Andrei Khrennikov
Editors

The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science

Applications and Grand Challenges

Quantum cognition: a new theoretical approach to psychology

Peter D. Bruza¹, Zheng Wang², and Jerome R. Busemeyer³

¹Information Systems School, GPO Box 2434, Queensland University of Technology, Brisbane 4001, Australia

²School of Communication, 3145 Derby Hall, 154 North Oval Mall, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA

³Department of Psychological and Brain Sciences, 1101 East 10th Street, Indiana University, Bloomington, IN 48705, USA

What type of probability theory best describes the way humans make judgments under uncertainty and decisions under conflict? Although rational models of cognition have become prominent and have achieved much success, they adhere to the laws of classical probability theory despite the fact that human reasoning does not always conform to these laws. For this reason we have seen the recent emergence of models based on an alternative probabilistic framework drawn from quantum theory. These quantum models show promise in addressing cognitive phenomena that have proven recalcitrant to modeling by means of classical probability theory. This review compares and contrasts probabilistic models based on Bayesian or classical versus quantum principles, and highlights the advantages and disadvantages of each approach.

maker is rational and derived from. However, the Bayesian model does not describe? The model is exposed to classical models on which viable probabilistic models of alternative [10]. What

Journal of Mathematical Psychology 53 (2009) 303–305

Contents lists available at ScienceDirect



ELSEVIER

Journal of Mathematical Psychology

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jmp

Editorial

Introduction to the special issue on quantum cognition

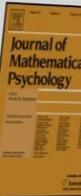
Peter Bruza^a, Jerome R. Busemeyer^{b,*}, Liane Gabora^c

^aFaculty of Information Technology, GPO Box 2434, Brisbane, Australia



Quantum
Models of
Cognition and
Decision

Jerome R. Busemeyer
Peter D. Bruza





ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Mathematical Psychology

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jmp



Quantum structure in cognition

Diederik Aerts*

Center Leo Apostel for Interdisciplinary Studies, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium
Department of Mathematics, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium
Department of Psychology, Vrije Universiteit Brussel, 1160 Brussels, Belgium

ARTICLE INFO

Article history:

Received 27 May 2008

Received in revised form

17 April 2009

Available online 31 May 2009

Keywords:

Concept theories

Concept conjunction

Guppy effect

Overextension

Quantum mechanics

Interference

Superposition

Hilbert space

Fock space

ABSTRACT

The broader scope of our investigations is the search for the way in which concepts and their combinations carry and influence meaning and what this implies for human thought. More specifically, we examine the use of the mathematical formalism of quantum mechanics as a modeling instrument and propose a general mathematical modeling scheme for the combinations of concepts. We point out that quantum mechanical principles, such as superposition and interference, are at the origin of specific effects in cognition related to concept combinations, such as the guppy effect and the overextension and underextension of membership weights of items. We work out a concrete quantum mechanical model for a large set of experimental data of membership weights with overextension and underextension of items with respect to the conjunction and disjunction of pairs of concepts, and show that no classical model is possible for these data. We put forward an explanation by linking the presence of quantum aspects that model concept combinations to the basic process of concept formation. We investigate the implications of our quantum modeling scheme for the structure of human thought, and show the presence of a two-layer structure consisting of a classical logical layer and a quantum conceptual layer. We consider connections between our findings and phenomena such as the disjunction effect and the conjunction fallacy in decision theory, violations of the sure thing principle, and the Allais and Elsborg paradoxes in economics.

© 2009 Elsevier Inc. All rights reserved.

Teil III.2.2 Mathematischer Formalismus der die Quanten Spieltheorie

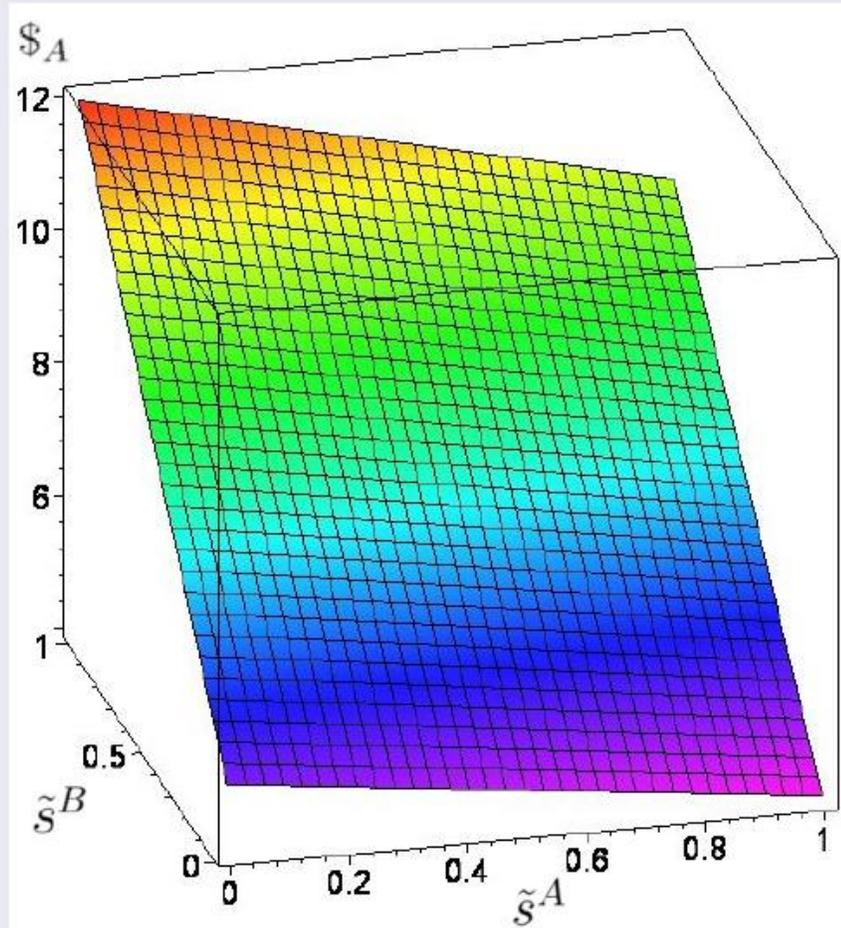
Die bei der quantentheoretischen Formulierung benutzten mathematischen Ansätze können grob in zwei Hauptströme gegliedert werden. Der Dichtematrix Ansatz der Quantenspieltheorie (siehe Marinatto & Weber) und den quanten-informationstheoretischen Ansatz von Eisert et al. Der auf quanteninformationstheoretischen Konzepten aufbauende Ansatz hat einerseits den Vorteil, dass die neu entstehenden Quantenstrategien in einem reduzierten Quanten-Strategienraum visualisiert und interpretiert werden können, andererseits baut der Ansatz die Möglichkeit einer Quantenverschränkung in mathematisch eleganter Weise in die Theorie ein, so dass man die Stärke einer möglichen Strategienverschränkung der Spieler mittels eines zusätzlichen Parameters (γ) im Modell variieren kann. In den ersten Jahren nach seiner Veröffentlichung wurde der Eisert'sche Ansatz von Benjamin & Hayden und S.J. van Enk angegriffen und kritisch diskutiert. Die damals erhobenen Vorwürfe stellten sich jedoch im Laufe der Zeit als nicht auf die Eisert'sche Theorie anwendbar heraus. Im Folgenden wird das Konzept der Quanten-Spieltheorie (in der Eisert'schen, quanten-informationstheoretischen Nomenklatur) im Detail beschrieben.

In der Quanten-Spieltheorie kann der Entscheidungszustand der beteiligten Akteure, im Gegensatz zur klassischen Spieltheorie, eine gemeinsame Strategienverschränkung aufweisen. Durch das Konzept dieser möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen, mit in die klassische Theorie einbezogen werden. Eine der grundlegenden Folgerungen aus einer solchen gemeinsamen Strategienverschränkung ist, dass die beteiligten Akteure eine erhöhte Kooperationsbereitschaft aufweisen, da sie dann eine Optimierung des gemeinsamen Zwei-Spielerzustandes $|\Psi\rangle$ anstreben.

Um die mathematische Beschreibung eines evolutionären, quantenspieltheoretischen Modells zu verdeutlichen, wird im Folgenden zunächst ein (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiel betrachtet. Der spieltheoretische, binäre Entscheidungsprozess der Akteure soll durch eine allgemeine Auszahlungsmatrix bestimmt sein (siehe nebenstehende Auszahlungstabelle). Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungszustand eines Spielers $\mu = A, B$, bevor dieser die endgültige Wahl der reinen Strategie getroffen hat, als eine komplexwertige Größe (Spinor) in einem zweidimensionalen Zustandsraum, dem sogenannten Hilbertraum \mathcal{H}_μ . Die in dieser Arbeit verwendete mathematische Repräsentation dieses Spinors wird mit Hilfe des Entscheidungsoperators $\hat{U}_\mu(\theta_\mu, \varphi_\mu)$ konstruiert, der auf einen Anfangszustand (hier speziell $|s_1^\mu\rangle$) wirkt. Ein allgemeiner Entscheidungszustand des Spielers A wird somit wie folgt mathematisch konstruiert:

Quantum extension of dominant class games

Classical payoff for player A



A \ B	s_1^B	s_2^B
s_1^A	(10,10)	(4,12)
s_2^A	(12,4)	(5,5)

Table: Payoffmatrix of a dominant, prisoners dilemma like game.

This dominant, prisoners dilemma like game has only one pure, symmetric Nash equilibrium (s_2^A, s_2^B) which is the only ESS of the evolutionary game.

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 26.01.2021

Ditter Vorlesungsteil: Quanten Spieltheorie

Jupyter Notebook:
Quanten Spieltheorie

Einführung

Die Annahme des vollständig verbundenen, zufälligen Netzwerks, welches die Grundlage der deterministischen evolutionären Spieltheorie bildet, ist in realen sozialen Netzwerken oft nicht erfüllt. In realen sozialen Netzwerken bilden sich oft weitgehend abgeschlossene Cluster von miteinander verbundenen Spielern, die zu anderen Clustern nur bedingt bzw. selten Kontakt haben. Diese Art von Cluster- bzw. Cliquenbildung kann zu einer unterschiedlichen Ausprägung von sozialen Normen innerhalb der einzelnen Teilgruppen führen. Soziale Normen können sich somit herausbilden, die den einzelnen Spielern neben ihrem *homo ökonomischen* Interesse auch den Blick auf das Wohl der eigenen Gruppe nahelegen. Eine solche Art von induziertem Gruppeninteresse wird im folgenden mittels des Ansatzes der Quanten-Spieltheorie mathematisch in die deterministischen Gleichungen der evolutionären Spieltheorie eingearbeitet. Die Quantenspieltheorie stellt eine mathematische und konzeptuelle Erweiterung der klassischen Spieltheorie dar. Der Raum aller denkbaren Entscheidungswege der Spieler wird vom rein reellen, messbaren Raum in den Raum der komplexen Zahlen (reelle und imaginäre Zahlen) ausgedehnt. Durch das Konzept der möglichen quantentheoretischen Verschränkung der Entscheidungswege im imaginären Raum aller denkbaren Quantenstrategien können gemeinsame, durch kulturelle oder moralische Normen entstandene Denkrichtungen in die evolutionäre Dynamik mit einbezogen werden. Ist die Strategienverschränkung der Spieler im imaginären Raum der denkbaren Entscheidungswege nur genügend groß, so können zusätzliche Nash-Gleichgewichte auftreten und zuvor existente dominante Strategien sich auflösen.

Die erste formale Beschreibung der Quanten-Spieltheorie wurde im Jahre 1999 von Eisert et al. vorgestellt. Diese oft zitierte Arbeit betrachtet die

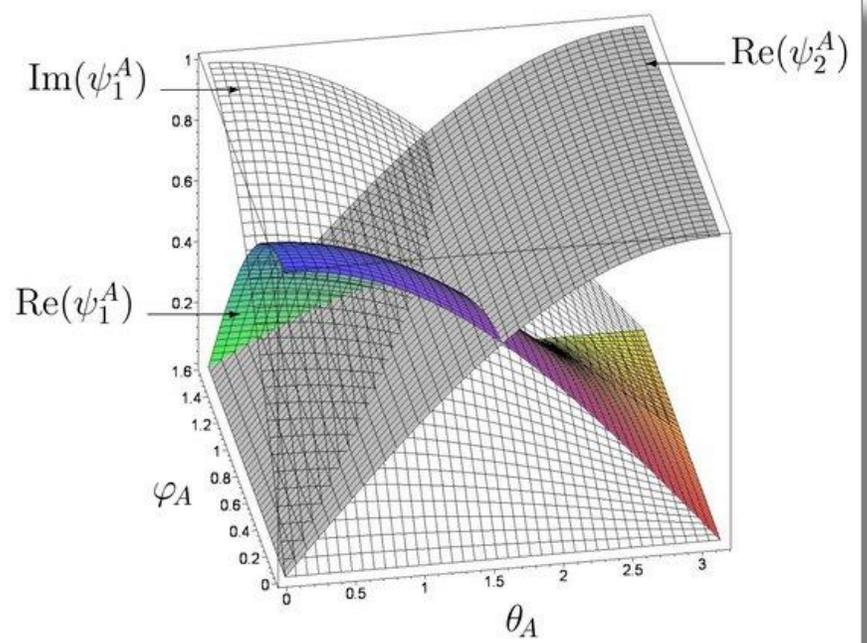
$$|\psi_A\rangle = \psi_1^A |s_1^A\rangle + \psi_2^A |s_2^A\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ -\psi_2^A \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_A$$

$$|s_1^A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_2^A\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_1^A = e^{i\varphi_A} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right), \quad \psi_2^A = \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)$$

$$|\psi_A\rangle = \hat{U}(\theta_A, \varphi_A) |s_1^A\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_A} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Die reinen Zustände $|s_1^A\rangle$ und $|s_2^A\rangle$ bilden die Basis des Hilbertraums \mathcal{H}_A des Spielers A und repräsentieren die reinen Strategien s_1^A und s_2^A des Spiels. Der Entscheidungsoperator des Spielers μ hängt von den beiden Entscheidungswinkeln θ_μ und φ_μ ab und ist explizit wie folgt definiert:

$$\hat{U}_\mu(\theta_\mu, \varphi_\mu) := \begin{pmatrix} e^{i\varphi_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) & e^{-i\varphi_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \forall \quad \theta_\mu \in [0, \pi] \wedge \varphi_\mu \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad .$$



Reellwertige und imaginäre Komponenten des zweidimensionalen Quantenspinors $|\psi\rangle_A = \hat{U}(\theta_A, \varphi_A) |s_1^A\rangle$ des Spielers A als Funktion der Quantenstrategien θ_A und φ_A .

Durch die Festlegung der Entscheidungswinkel θ_μ und φ_μ wählt der Spieler seine Quantenstrategie. Die klassische, reine Strategie s_1 legt der Spieler durch die Wahl $\theta = 0$ und $\varphi = 0$ fest:

$$\widehat{s}_1 := \hat{U}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wohingegen die reine Strategie s_2 durch $\theta = \pi$ und $\varphi = 0$ festgelegt ist:

$$\widehat{s}_2 := \hat{U}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zusätzlich zu diesen reinen, klassischen Strategien ist die Quantenstrategie \widehat{Q} wie folgt definiert

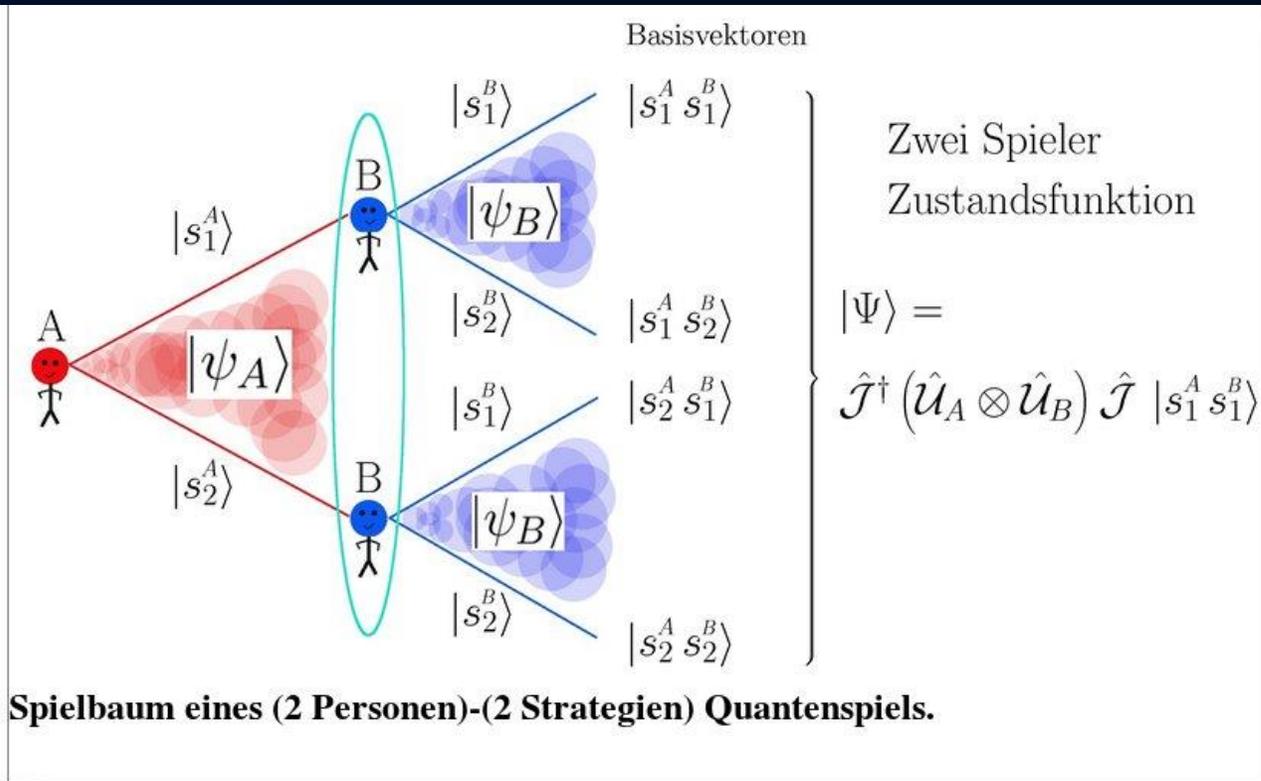
$$\widehat{Q} := \hat{U}(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Um den Operatorformalismus der Quanten-Spieltheorie und das Konzept der Quantenstrategien besser zu verstehen, veranschaulicht die nebenstehende Abbildung die reellwertigen und imaginären Komponenten ψ_1^A und ψ_2^A des zweidimensionalen Quantenspinors $|\psi\rangle_A$ des Spielers A. Die farbige, untransparente Fläche in der Abbildung veranschaulicht den reellwertigen Anteil der ersten Spinorkomponente ($\text{Re}(\psi_1^A)$), die durchsichtige graue Fläche beschreibt dessen imaginären Anteil ($\text{Im}(\psi_1^A)$) und die graue undurchsichtige Fläche zeigt den reellwertigen Teil der zweiten Spinorkomponente ($\text{Re}(\psi_2^A)$) in Abhängigkeit der Winkel θ_A und φ_A . Da die zweite Spinorkomponente lediglich reellwertige Anteile besitzt veranschaulicht die Abbildung lediglich drei Flächen. Die Menge der klassischen gemischten Strategien

lediglich reellwertige Anteile besitzt veranschaulicht die Abbildung lediglich drei Flächen. Die Menge der klassischen gemischten Strategien des Spielers A ($\tilde{\mathcal{S}}^A = \{\tilde{s}_1^A, \tilde{s}_2^A\}$) ist eine echte Teilmenge des strategischen Hilbertraums des Spielers A (\mathcal{H}_A) und wird formal realisiert, indem man den Winkel φ_A auf null setzt:

$$\tilde{\mathcal{S}}^A = \left\{ |\psi\rangle_A = \hat{U}(\theta_A, \varphi_A) |s_1^A\rangle \mid \varphi_A \equiv 0, \theta_A \in [0, \pi] \right\} \subsetneq \mathcal{H}_A \quad .$$

In diesem Fall ($\varphi_A \equiv 0$) verschwinden alle imaginären Anteile des Zustandes $|\psi\rangle_A$ und als Folge dessen können die klassischen gemischten Strategien durch Variation des Winkels $\theta \in [0, \pi]$ realisiert werden. Für $\varphi_A > 0$ verschwinden jedoch die imaginären Anteile nicht und diese Art von Quantenstrategien haben kein Pendant in der klassischen Spieltheorie. Da der Entscheidungsoperator auf den reinen Anfangszustand der Strategie s_1 wirkt, entstehen mögliche imaginäre Anteile im Zustand $|\psi\rangle_A$ lediglich in der ersten Spinorkomponente und man nennt deshalb diese Teilmenge von Quantenstrategien die sogenannten s_1 -Quantenstrategien. Die quantentheoretische Beschreibung des Entscheidungszustandes des Spielers A kurz vor der definitiven Auswahl und Bekundung der reinen Strategie besitzt demnach im Allgemeinen neben den reellwertigen auch imaginäre Anteile. Bei s_1 -Quantenstrategien kann sich der Spieler nur im imaginären Raum der ersten Strategie gedanklich bewegen. Eine grundlegende Eigenschaft der gesamten Quantentheorie ist die prinzipielle Unbeobachtbarkeit des Quantenzustandes. Diese Eigenschaft spiegelt sich in der Quanten-Spieltheorie in der Unbeobachtbarkeit des Gedankenprozesses wider. Die einzelnen Inhalte, Gedankenwege und gefühlsauslösende Überlegungen, die während des Entscheidungsprozesses im Gehirn des Spielers (bewusst oder unterbewusst) ablaufenden, können nicht direkt gemessen werden. s_1 -Quantenstrategien können als der gedankliche Weg während des Entscheidungsprozesses interpretiert werden, welcher vom gedanklichen Ursprung her von der klassischen Strategie s_1 startet und hypothetisch, gebunden an die Wünsche und Ängste des Spielers, den Gedankenweg weiterbildet. Aus diesem Grund besitzen die s_1 -Quantenstrategien (bzw. s_2 -Quantenstrategien), die speziell bei einer der reinen klassischen Strategien starten ($\{(\theta_A \equiv 0, \varphi_A) \mid \varphi_A \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$), eine besondere Bedeutung.



Spielbaum eines (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiels.

Die quantenspieltheoretische Erweiterung beschreibt somit den Entscheidungszustand eines Spielers A als einen im komplexen Hilbertraum definierten Zustandsvektor. Der Spielbaum eines (2 Personen)-(2 Strategien) Quantenspiels ist in der nebenstehenden Abbildung visualisiert. Der Zwei-Spielerzustand $|\Psi\rangle$ ist ein vierkomponentiger Spinor, welcher auf dem gemeinsamen Hilbertraum der Spieler ($\mathcal{H} := \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$) definiert ist. Die Basisvektoren dieses vierdimensionalen komplexwertigen Raumes werden durch die vier möglichen, klassischen Strategienkombinationen (messbaren Eigenzustände des Quantensystems) gebildet ($|s_1^A s_1^B\rangle := (1, 0, 0, 0)$, $|s_1^A s_2^B\rangle := (0, -1, 0, 0)$, $|s_2^A s_1^B\rangle := (0, 0, -1, 0)$ und $|s_2^A s_2^B\rangle := (0, 0, 0, 1)$). Der Zwei-Spieler-Anfangszustand $|s_1^A s_1^B\rangle$ bildet sich durch das äußere Produkt der Ein-Spieler Zustände $|s_1^A\rangle$ und $|s_1^B\rangle$. Die vektorielle Repräsentation der allgemeinen Ein-

Spieler Zustände $|\psi_A\rangle$, bzw. $|\psi_B\rangle$ ist wie folgt durch die Basen der reinen Zustände definiert:

$$|\psi_A\rangle := \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ -\psi_2^A \end{pmatrix} = \psi_1^A |s_1^A\rangle + \psi_2^A |s_2^A\rangle, \quad |\psi_B\rangle := \begin{pmatrix} \psi_1^B \\ -\psi_2^B \end{pmatrix} = \psi_1^B |s_1^B\rangle + \psi_2^B |s_2^B\rangle$$

$$\text{wobei: } |s_1^\mu\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_2^\mu\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |s_1^A s_1^B\rangle := |s_1^A\rangle \otimes |s_1^B\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der finale Zwei-Spielerzustand eines simultanen Zwei-Strategien-'One Shot'- Quantenspiels wird somit durch den vierkomponentigen Quantenzustand $|\Psi\rangle$ beschrieben, welcher sich in der Eisert'schen Repräsentation wie folgt aus dem Anfangszustand $|\Psi_0\rangle = \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle$ entwickelt

$$|\Psi\rangle = \widehat{\mathcal{J}}^\dagger (\widehat{U}_A \otimes \widehat{U}_B) \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle, \quad |\Psi_0\rangle = \widehat{\mathcal{J}} |s_1^A s_1^B\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) \\ 0 \\ 0 \\ -i \sin(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix},$$

wobei $\widehat{\mathcal{J}} := (J_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 1 \dots 4$ die von dem Parameter γ abhängige Verschränkungsmatrix (bzw. den Verschränkungsoperator) beschreibt

$$\widehat{\mathcal{J}} := e^{-i \frac{\gamma}{2} (\widehat{s}_2 \otimes \widehat{s}_2)} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) & 0 & 0 & -i \sin(\frac{\gamma}{2}) \\ 0 & \cos(\frac{\gamma}{2}) & i \sin(\frac{\gamma}{2}) & 0 \\ 0 & i \sin(\frac{\gamma}{2}) & \cos(\frac{\gamma}{2}) & 0 \\ -i \sin(\frac{\gamma}{2}) & 0 & 0 & \cos(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix} \mathbb{I}, \quad \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$\widehat{U}_A := (U_{\alpha\beta}^A)$, $\alpha, \beta = 1 \dots 2$ und $\widehat{U}_B := (U_{\alpha\beta}^B)$, $\alpha, \beta = 1 \dots 2$ stellen die von den Winkeln θ_A, φ_A und θ_B, φ_B abhängigen Entscheidungsmatrizen (Entscheidungsoperatoren) der Spieler A und B dar.

Der Erwartungswert der Auszahlungen der Spieler wird zusätzlich durch die Spielmatrix (siehe nebenstehende Auszahlungstabelle) mitbestimmt:

$$\$A = \$_{11}^A P_{11} + \$_{12}^A P_{12} + \$_{21}^A P_{21} + \$_{22}^A P_{22}$$

$$\$B = \$_{11}^B P_{11} + \$_{21}^B P_{12} + \$_{12}^B P_{21} + \$_{22}^B P_{22}$$

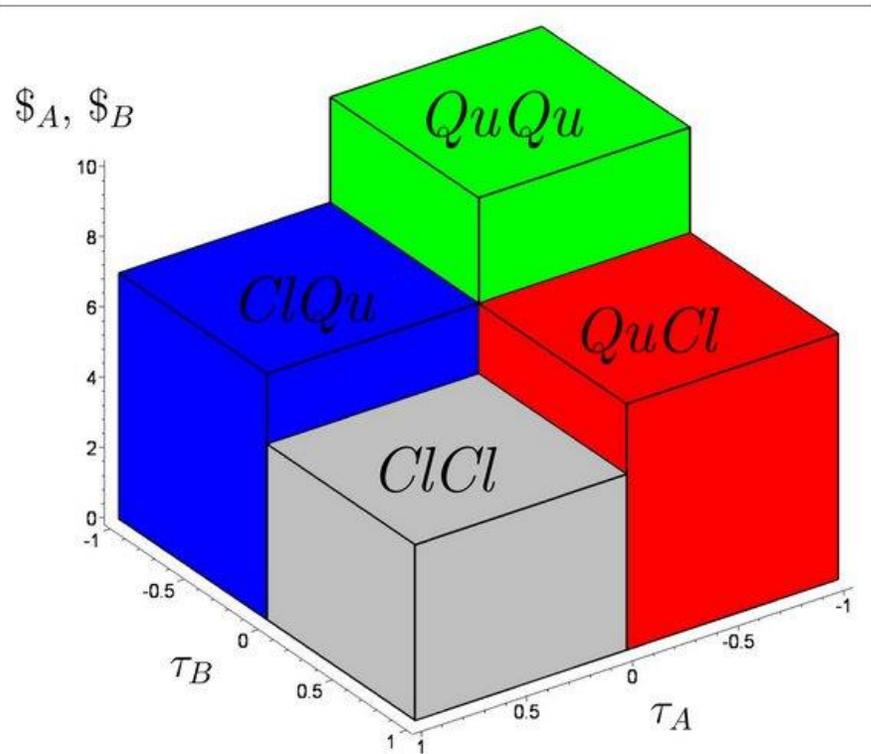
mit: $P_{kl} = |\langle s_k^A s_l^B | \Psi \rangle|^2$, $k, l = \{1, 2\}$

A \ B	s_1^B	s_2^B
s_1^A	$(\$_{11}^A, \$_{11}^B)$	$(\$_{12}^A, \$_{21}^B)$
s_2^A	$(\$_{21}^A, \$_{12}^B)$	$(\$_{22}^A, \$_{22}^B)$

Allgemeine Auszahlungsmatrix eines (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels.

Dieser Erwartungswert der Auszahlungen stellt eine Erweiterung des aus der klassischen Spieltheorie bekannten Konzepts der Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien dar.

Um die Auswirkungen des quantenspieltheoretischen Konzepts auf die dem Spieler ratsame Wahl der Entscheidung zu untersuchen, wird im Folgenden die Struktur der quantenspieltheoretisch erweiterten gemischten Auszahlungsfunktion untersucht. Im Unterschied zur klassischen Auszahlungsfunktion ($\tilde{\$}^\mu(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)$), die lediglich von den gemischten Strategien des Spielers A (\tilde{s}^A) und des Spielers B (\tilde{s}^B) abhängt, hängt die quantentheoretische Erweiterung der Auszahlungsfunktion im Allgemeinen von fünf Parametern ab: Die vier Winkel der Entscheidungsoperatoren ($\theta_A, \varphi_A, \theta_B$ und φ_B) und der Parameter γ , welcher die Stärke der Strategienverschränkung quantifiziert.



Visualisierungsraum der quantentheoretisch erweiterten Auszahlung $\$$ als Funktion der reduzierten s_1 -Quantenstrategien τ_A des Spielers A und τ_B des Spielers B.

Um die Auszahlungsfunktion dennoch als Fläche in einem dreidimensionalen Raum zu visualisieren, reduziert man deren Abhängigkeiten, indem man einerseits den Verschränkungsparameter γ fixiert und die Menge der Quantenstrategien auf diejenigen beschränkt, die vom Ursprung der reinen, klassischen s_1 -Strategie starten. Die Abhängigkeiten des vierkomponentigen Zwei-Spieler Quantenzustand $|\Psi\rangle$ werden durch die Einführung zweier neuer Parameter (τ_A und τ_B) reduziert:

$|\Psi\rangle = |\Psi(\theta_A, \varphi_A, \theta_B, \varphi_B)\rangle \rightarrow |\Psi(\tau_A, \tau_B)\rangle$. Die für jeden Spieler wählbaren Entscheidungswinkel θ und φ werden dadurch auf einen einzigen Parameter $\tau \in [-1, 1]$ reduziert. Positive τ -Werte entsprechen den klassischen gemischten Strategien, wohingegen negative τ -Werte Quantenstrategien mit $\theta = 0$ und $\varphi > 0$ repräsentieren. Der gesamte quantentheoretische Strategienraum wird dadurch in vier separate Regionen unterteilt: in den absolut klassischen Bereich (ClCl: $\tau_A, \tau_B \geq 0$), den absoluten Quantenbereich (QuQu: $\tau_A, \tau_B < 0$) und in die beiden semi-klassischen Quantenbereiche (ClQu: $\tau_A \geq 0 \wedge \tau_B < 0$ und QuCl: $\tau_A < 0 \wedge \tau_B \geq 0$). Durch diese (τ_A, τ_B) -Repräsentation wird die Menge der möglichen Quantenstrategien auf die folgende Untermenge reduziert:

$$\underbrace{\{(\tau, 0) \mid \tau \in [0, 1]\}}_{\text{klassischer Bereich Cl}} \quad \wedge \quad \underbrace{\{(0, \tau \frac{\pi}{2}) \mid \tau \in [-1, 0]\}}_{\text{Quantenbereich Ql}}$$

Die nebenstehende Abbildung stellt die vier Regionen des Visualisierungsraums der quantentheoretischen Auszahlungsfunktion dar. Die absolut klassische Region (ClCl, $\varphi_A, \varphi_B \equiv 0$) befindet sich im vorderen Bereich, die Region in welchem beide Spieler eine Quantenstrategie

Teil III.2.3 Symmetrische (2x2)-Quantenspiele

Parametersätze	Spielklasse	$\$_{11}$	$\$_{12}$	$\$_{21}$	$\$_{22}$	Nash-Gleichgewichte
Set_A	Dominantes Spiel	10	4	12	5	Ein reines Nash-Gleichgewicht (s_2^A, s_2^B)
Set_B	Koordinationsspiel	10	4	9	5	Zwei reine NEs, ein internes NE $(s^* = \frac{1}{2})$
Set_C	Anti-Koordinationsspiel	10	7	12	5	Zwei reine NEs, ein internes NE $(s^* = \frac{1}{2})$

Parameterwerte der drei symmetrischen Beispielspiele.

Die auf der rechten Seite dargestellte Abbildung stellt die quantentheoretisch erweiterte Auszahlung $\$_A$ des Spielers A (untransparente Fläche) und $\$_B$ des Spielers B (transparente Fläche) als Funktion der reduzierten s_1 -Quantenstrategien τ_A des Spielers A und τ_B des Spielers B dar. Als zugrundeliegender Parametersatz wurde Set_A verwendet und die Stärke der Quantenverschränkung der Spielerstrategien wurde auf null gesetzt ($\gamma = 0$). Als Visualisierungsraum wurde der in der oberen Abbildung beschriebene reduzierte Raum verwendet, wobei der absolute Quantenbereich QuQu, bei dem beide Spieler eine Quantenstrategie benutzen,

im hinteren Teil des Diagramms zu finden ist und die rein klassische Region ClCl nach vorne projiziert wurde. Die Abbildung zeigt deutlich, dass das unverschränkte Quantenspiel identisch mit der klassischen Version des Spiels ist. Im Bereich, in dem beide Spieler eine Quantenstrategie wählen ($\tau_A < 0 \wedge \tau_B < 0$),

ist die Auszahlung der Spieler gleich der Auszahlung, als wenn die Spieler die klassische Strategie s_1 gewählt hätten ($\$_A(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$, $\$_B(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$). Das Nash-Gleichgewicht des klassischen Spiels ((s_2^A, s_2^B) , die dominante Strategie) entspricht den folgenden τ -Werten:

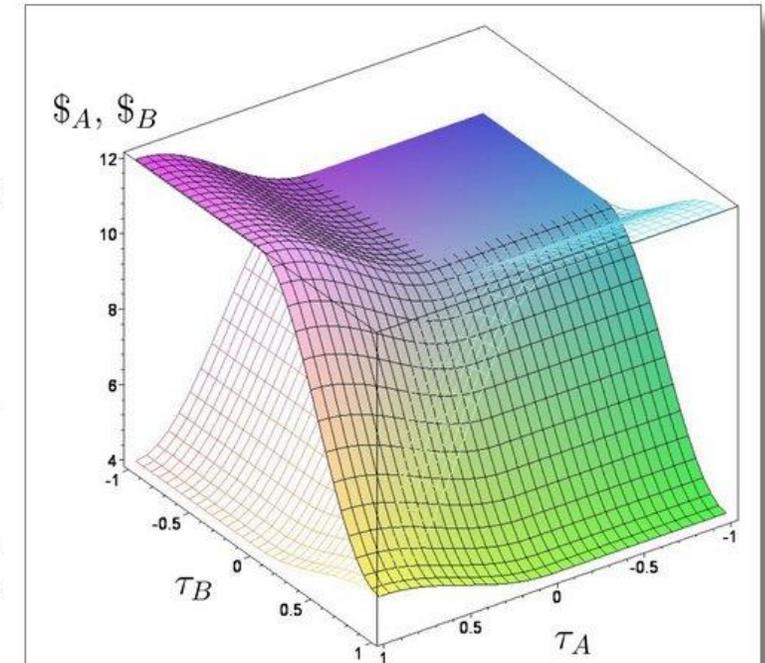
$(s_2^A, s_2^B) \hat{=} (\tau_A = 1, \tau_B = 1)$ und bleibt auch im unverschränkten Quantenspiel bestehen.

Die beiden Diagramme in der linken unteren Abbildung stellen die quantentheoretisch erweiterte Auszahlungsfunktion bei einem mittleren und dem maximalen Verschränkungswert dar. Die Struktur der Auszahlungsflächen innerhalb der vollständig klassischen Region ClCl verändert ihr Erscheinungsbild bei

Symmetrische (2 Personen)-(2 Strategien) Spiele lassen sich formal in drei unterschiedliche Spielklassen separieren (siehe Teil I).

Dominante Spiele (Set_A)

Das durch Parametersatz Set_A definierte Spiel gehört der Klasse der dominanten Spiele an. Das Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien befindet sich bei der Strategienkombination, bei welcher beide Spieler die Strategie s_2 spielen (s_2^A, s_2^B).

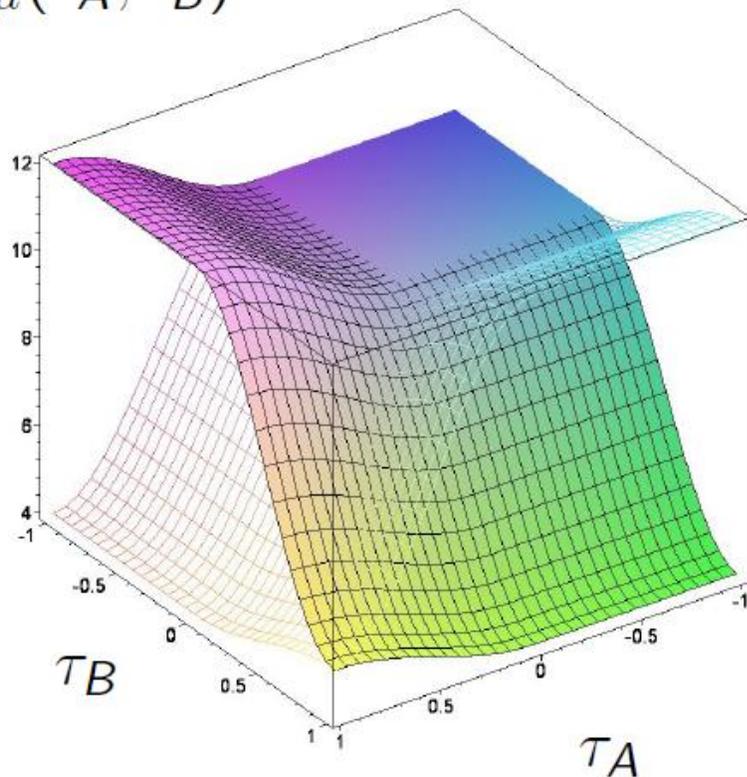


Quantentheoretisch erweiterte Auszahlung $\$_A$ des Spielers A (untransparente Fläche) und $\$_B$ des Spielers B (transparente Fläche) als Funktion der reduzierten s_1 -Quantenstrategien τ_A des Spielers A und τ_B des Spielers B in einem unverschränkten Quantenspiel ($\gamma = 0$) unter Verwendung des Parametersatzes Set_A .

Quantum extension of dominant class games

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for $\gamma = 0$ (no entanglement)

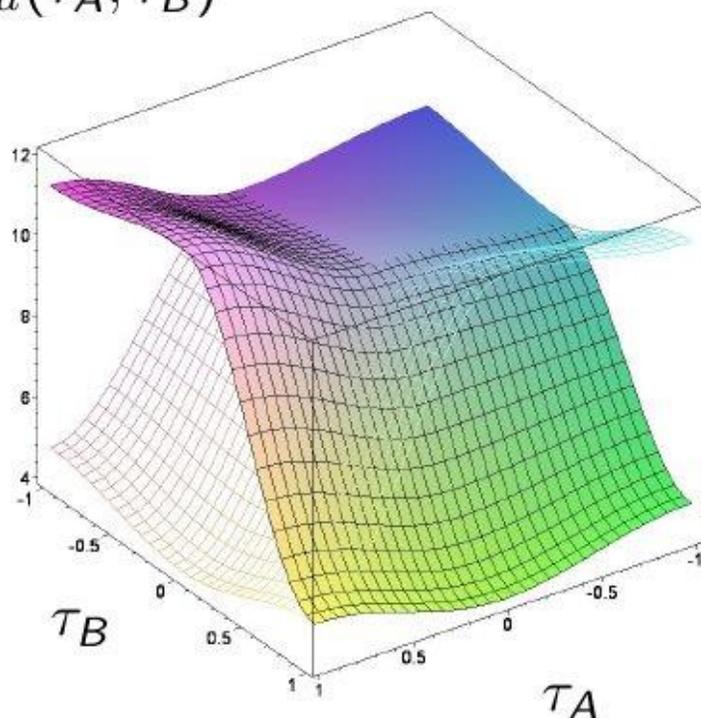
$$\$_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The diagram clearly exhibits that the non-entangled quantum game simply describes the classical version of the prisoner's dilemma game. For the case, that both players decide to play a quantum strategy ($\tau_A < 0 \wedge \tau_B < 0$) their payoff is equal to the case where both players choose the classical pure strategy s_1 ($\$A(\tau_A = 0, \tau_B = 0) = 10$). The classical Nash equilibrium $((s_2^A, s_2^B)$, the dominant strategy) corresponds to the following τ -values: $(s_2^A, s_2^B) \hat{=} (\tau_A = 1, \tau_B = 1)$.

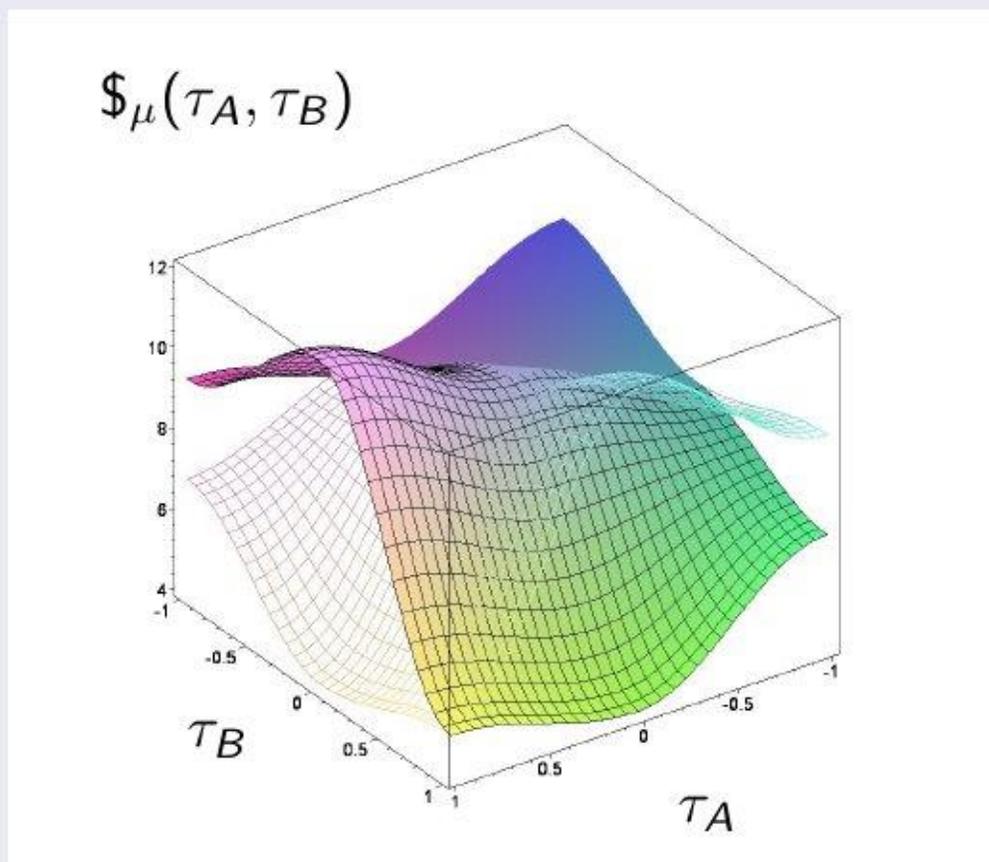
Payoff of player A (colored) and player B (wired) for $\gamma = \frac{\pi}{10} \approx 0.31$

$$\mathcal{S}_\mu(\tau_A, \tau_B)$$



For the absolute classical region $CICl$ the shape of the surfaces does not change, whereas for the partially classical-quantum ($CIQu$ and $QuCl$) and absolute quantum region regions $QuQu$ the payoff structure changes due to a possible interference of quantum strategies within Hilbertspace. The structure of Nash-equilibria does not change for the left picture, whereas for the following pictures the previously present dominant strategy of the prisoner's dilemma game has disappeared and a new, advisable quantum Nash-equilibrium will appear at $(\hat{Q}, \hat{Q} \hat{=} (\tau_A = -1, \tau_B = -1))$. During the transition from this figure to the next picture two separate phenomena occur. At first, for an entanglement value $\gamma_1 \approx 0.37$, the best response for player A to the strategy $s_2^B \hat{=} \tau_B = 1$ is no longer the strategy $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$, as $\mathcal{S}_A(\tau_A = -1, \tau_B = 1) \approx 5.05$ is now higher than $\mathcal{S}_A(\tau_A = 1, \tau_B = 1) = 5$. Secondly, for an entanglement value $\gamma_2 \approx 0.53$, the best response for player A to the strategy $\hat{Q}_B \hat{=} \tau_B = -1$ is no longer the strategy $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$, as $\mathcal{S}_A(\tau_A = 1, \tau_B = -1) \approx 9.96$ is for $\gamma_2 = 0.53$ lower than $\mathcal{S}_A(\tau_A = -1, \tau_B = -1) = 10$.

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for $\gamma = \frac{\pi}{8} \approx 0.52$

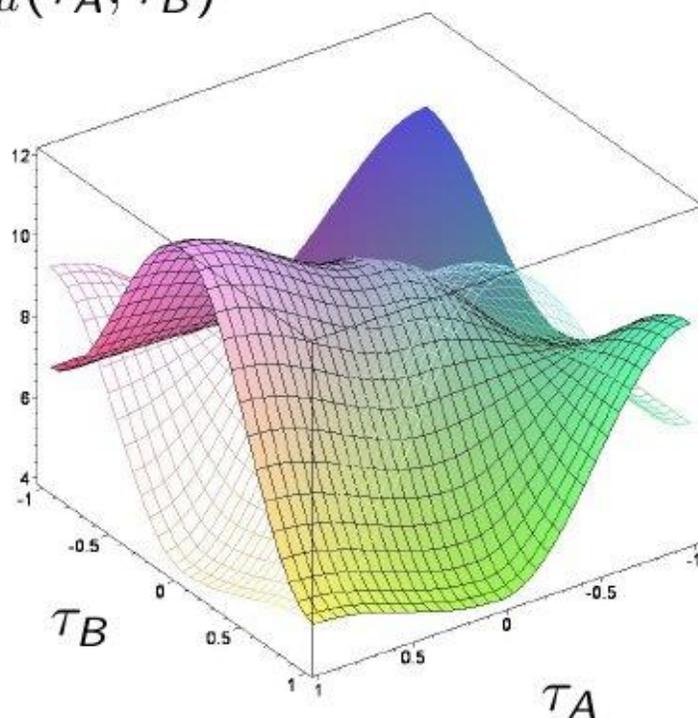


For the absolute classical region $CI|C|$ the shape of the surfaces does not change, whereas for the partially classical-quantum ($CIQu$ and $QuCI$) and absolute quantum region regions $QuQu$ the payoff structure changes due to a possible interference of quantum strategies within Hilbertspace. The structure of Nash-equilibria did not change for the last figure, whereas for this and the following pictures the previously present dominant strategy of the prisoner's dilemma game has disappeared and a new, advisable quantum Nash-equilibrium has appeared ($\hat{Q}, \hat{Q} \hat{=} (\tau_A = -1, \tau_B = -1)$). During the transition from the last picture to this figure two separate phenomena occurred. At first, for an entanglement value $\gamma_1 \approx 0.37$, the best response for player A to the strategy $s_2^B \hat{=} \tau_B = 1$ is no longer the strategy $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$, as $\$A(\tau_A = -1, \tau_B = 1) \approx 5.05$ is now higher than $\$A(\tau_A = 1, \tau_B = 1) = 5$. Secondly, for an entanglement value $\gamma_2 \approx 0.53$, the best response for player A to the strategy $\hat{Q}_B \hat{=} \tau_B = -1$ is no longer the strategy $s_2^A \hat{=} \tau_A = 1$, as $\$A(\tau_A = 1, \tau_B = -1) \approx 9.96$ is for $\gamma_2 = 0.53$ lower than $\$A(\tau_A = -1, \tau_B = -1) = 10$.



Payoff of player A (colored) and player B (wired) for $\gamma = \frac{\pi}{6} \approx 0.94$

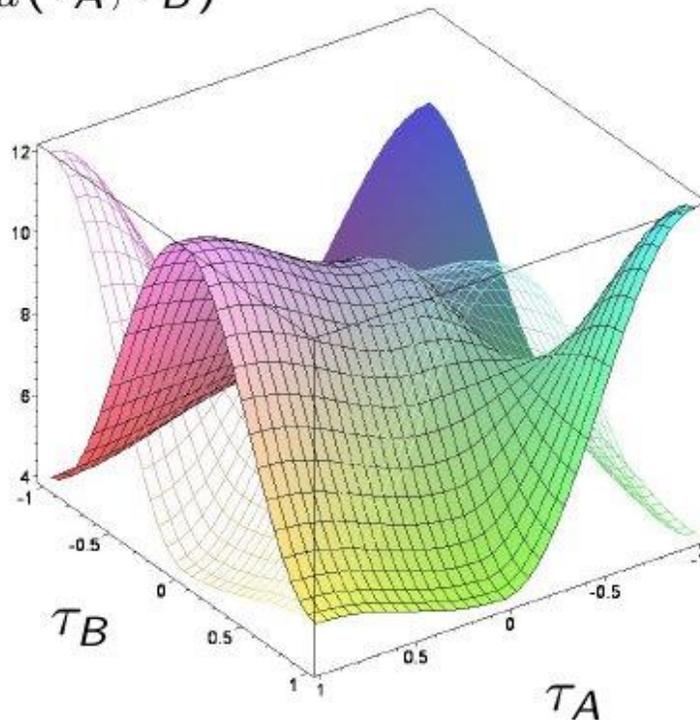
$$S_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The results show, that a quantum extension of a classical prisoner's dilemma game is able to change the structure of Nash-equilibria, and even previously present dominant strategies could become nonexistent, if the value of entanglement increases further than a defined γ -threshold. Players with a higher strategic entanglement value γ escape the dilemma as they see the advantage of the quantum strategy combination (\hat{Q}_A, \hat{Q}_B) , which is measured as if both are playing the classical strategy s_2 .

Payoff of player A (colored) and player B (wired) for $\gamma = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$

$$S_{\mu}(\tau_A, \tau_B)$$



The results show, that a quantum extension of a classical prisoner's dilemma game is able to change the structure of Nash-equilibria, and even previously present dominant strategies could become nonexistent, if the value of entanglement increases further than a defined γ -threshold. Players with a higher strategic entanglement value γ escape the dilemma as they see the advantage of the quantum strategy combination (\hat{Q}_A, \hat{Q}_B) , which is measured as if both are playing the classical strategy s_2 .

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

Physics of Socio-Economic Systems with the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Wintersemester 2017/18)
 von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
 Frankfurt am Main 10.01.2018

Dritter Vorlesungsteil: Symmetrische (2 x 2) Quantenspiele

Die Quanten Spieltheorie und der verschränkte Zwei-Spieler Zustand

Dieses Maple-Worksheet illustriert das Konzept der Quanten-Spieltheorie an mehreren Beispielen.

```

> restart:
with(linalg):
with(LinearAlgebra):
with(plots):
with(RandomTools):
with(networks):
with(stats[statplots]):
with(plottools):
with(ColorTools):
    
```

Die Quanten-Spieltheorie beschreibt den Entscheidungsraum eines Spielers, bevor dieser die endgültige Zustandsraum, dem sogenannten Hilbertraum. Die in diesem Worksheet verwendete mathematische Repräsentation wirkt. Die Entscheidungsoperatoren der Spieler A und B sind wie folgt definiert:

```

> UA:=subs({theta=ta,phi=pa},matrix(2,2,[exp(I*phi)*cos(theta/2),sin(theta/2),-sin(theta/2),exp(I*phi)*cos(theta/2)]);
UB:=subs({theta=tb,phi=pb},matrix(2,2,[exp(I*phi)*cos(theta/2),sin(theta/2),-sin(theta/2),exp(I*phi)*cos(theta/2)]);
    
```

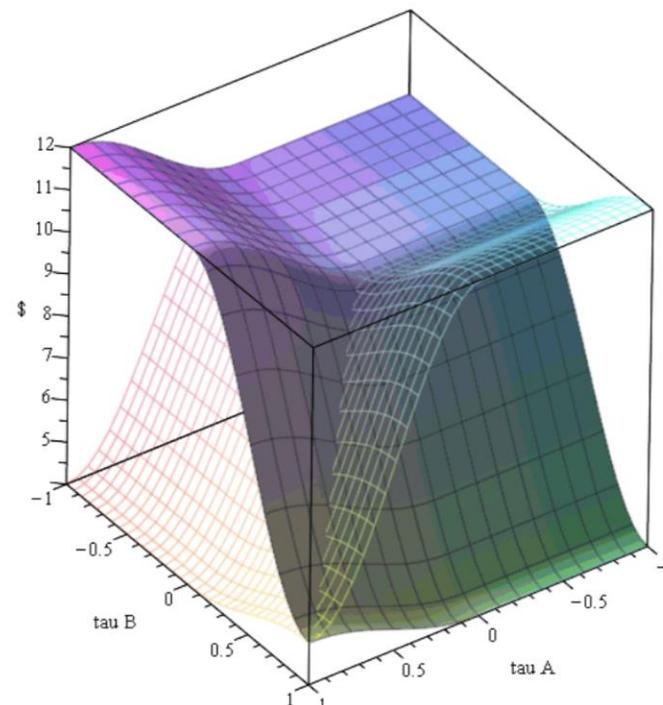
$$UA := \begin{bmatrix} e^{i p_a} \cos\left(\frac{t_a}{2}\right) & \sin\left(\frac{t_a}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{t_a}{2}\right) & e^{i p_a} \cos\left(\frac{t_a}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$UB := \begin{bmatrix} e^{i p_b} \cos\left(\frac{t_b}{2}\right) & \sin\left(\frac{t_b}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{t_b}{2}\right) & e^{i p_b} \cos\left(\frac{t_b}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Mittels des äusseren Produktes erhält man den gemeinsamen (4x4)-Entscheidungsoperator:

```

> UA_T_UB:=matrix(4,4,[
UA[1,1]*UB[1,1],UA[1,1]*UB[1,2],UA[1,2]*UB[1,1],UA[1,2]*UB[1,2],
    
```



Quantum Game Theory and Financial Crises (Anti-Coordination Class)

M. Hanauske, J. Kunz, S. Bernius und W. König "Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory-based analysis of financial crises" (in Physica A 389 (2010) 5084 – 5102)

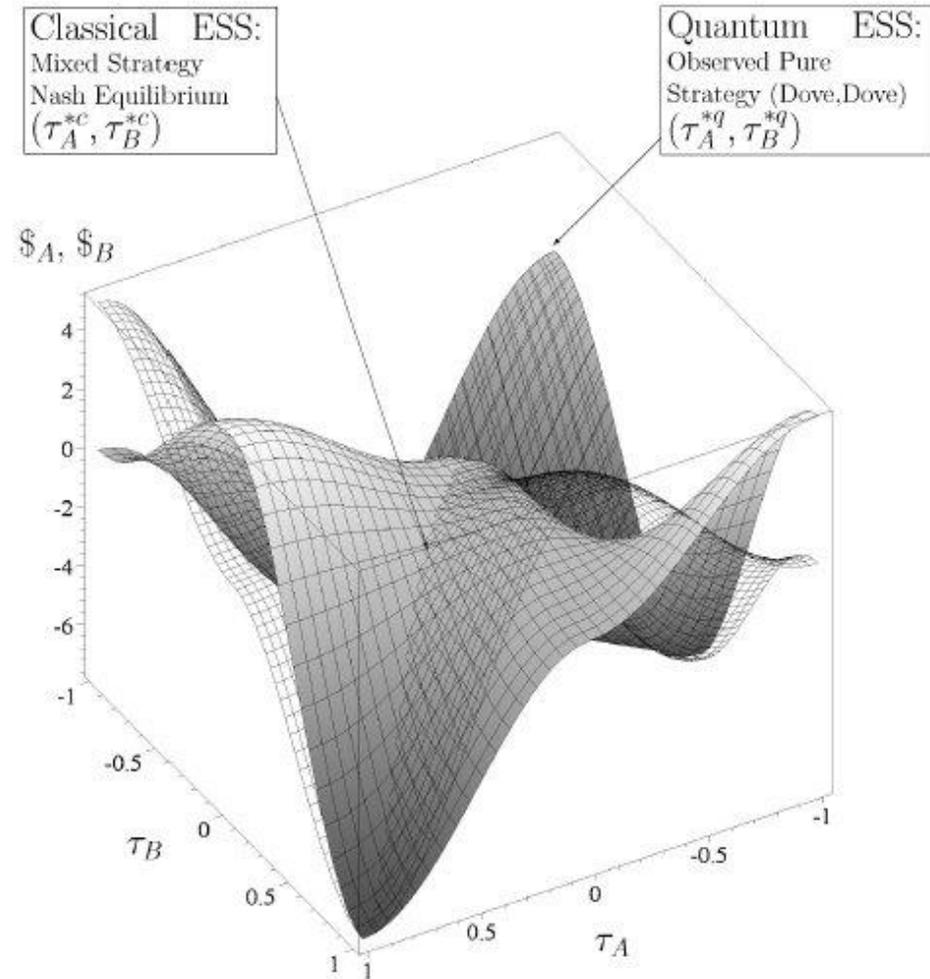


Figure 5.10.: Same description as Figure 5.7, whereas the results were calculated within a maximally entangled quantum game ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) using parameter set $P3$.

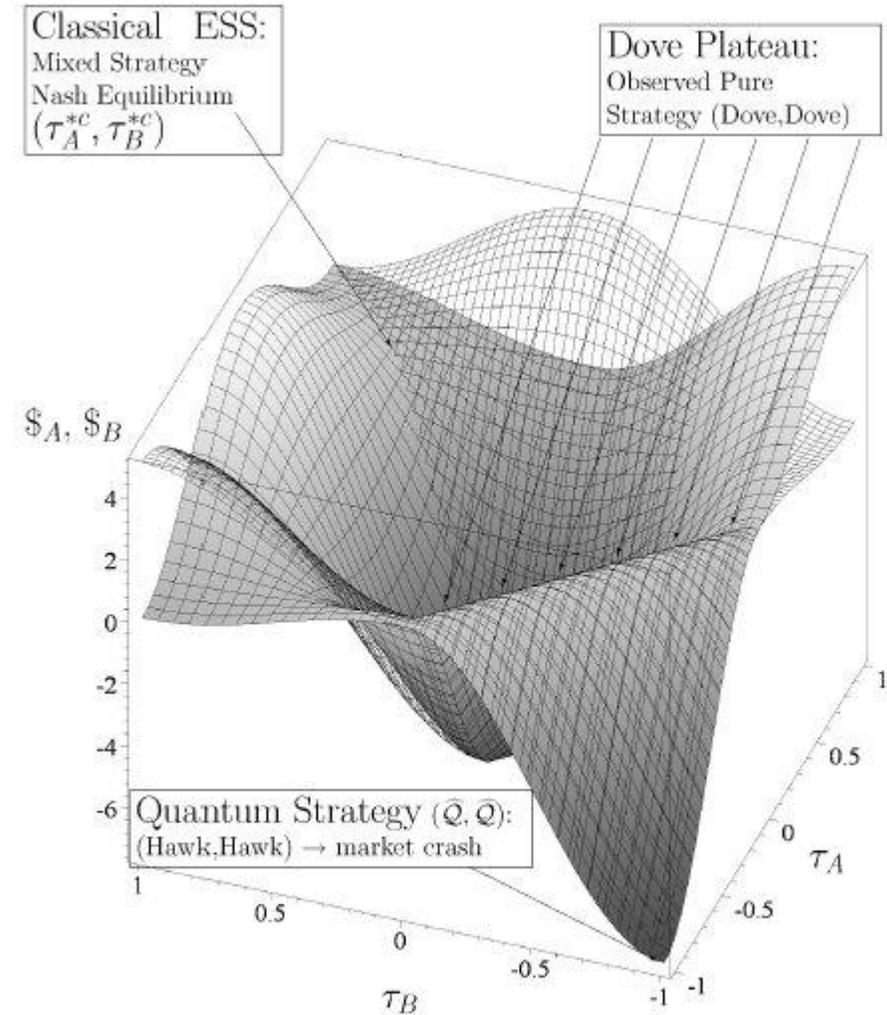


Figure 5.13.: Same description as Figure 5.12, whereas the results were calculated within a maximally entangled quantum game ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) using parameter set $P3$.



Symmetric (2x2) quantum games

For vanishing values of entanglement ($\gamma=0$) quantum games are identical to classical games.

Dominant Class:

Games with a dilemma: The dilemma resolves if the value of entanglement is above a defined γ -barrier.

Games without a dilemma: No further Nash-equilibria, dominant strategy remains.

Class of coordination games:

The coordination problem resolves if the value of entanglement is above a defined γ -barrier.

Class of anti-coordination games:

An additional Nash-Equilibrium appears if the value of entanglement is above a defined γ -barrier.

In General: If the strategy entanglement is large enough, then additional Nash equilibria can occur, previously present, not favorable dominant or evolutionary stable strategies could become nonexistent and new, favorable evolutionary stable strategies do appear for some game classes.

How to increase entanglement?

	H	L
H	$(B_H - \beta d, B_H - \beta d)$	$(B_H - d, B_L + \alpha d)$
L	$(B_L + \alpha d, B_H - d)$	$(B_L + \gamma d, B_L + \gamma d)$

Ein Beispiel:

Population: Angestellte der Goethe Universität Frankfurt

Strategien:

H: Ich flieg natürlich auch weiter auf internationale Konferenzen

L: Ich werde beruflich nicht mehr in ein Flugzeug steigen

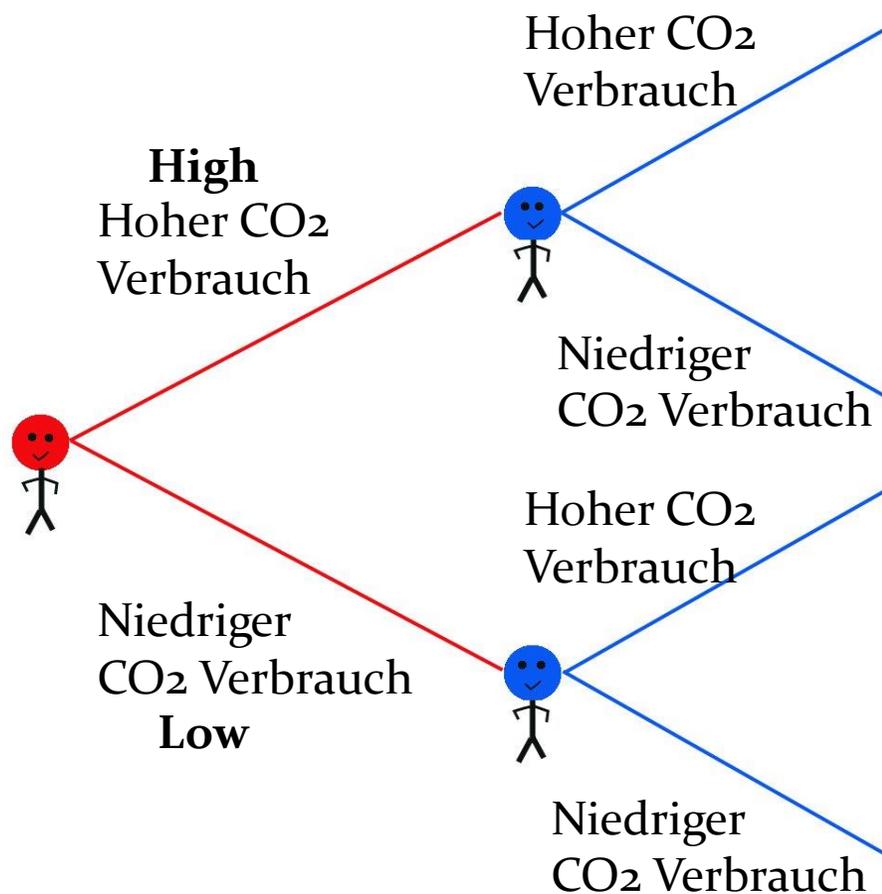
Wir nehmen an, das für jeden einzelnen Spieler der betrachteten Population $B_H > B_L$ gilt.

Within the evolutionary extension of the CO₂-consumers game, each player daily selects one game partner out of his/her social neighborhood and discusses the two options of the specific subgame and fixes his/her individual choice for the next day. The Table summarizes the payoff structure of the underlying (2×2) game. In contrast to common payoff matrices of games, we have focused on a non-monetary utility formulation. B_H, B_L : quantifies the non-monetary benefit a person gains in the case of choosing the strategy H (L) and as a result emitting a high (low) amount of carbon dioxide.

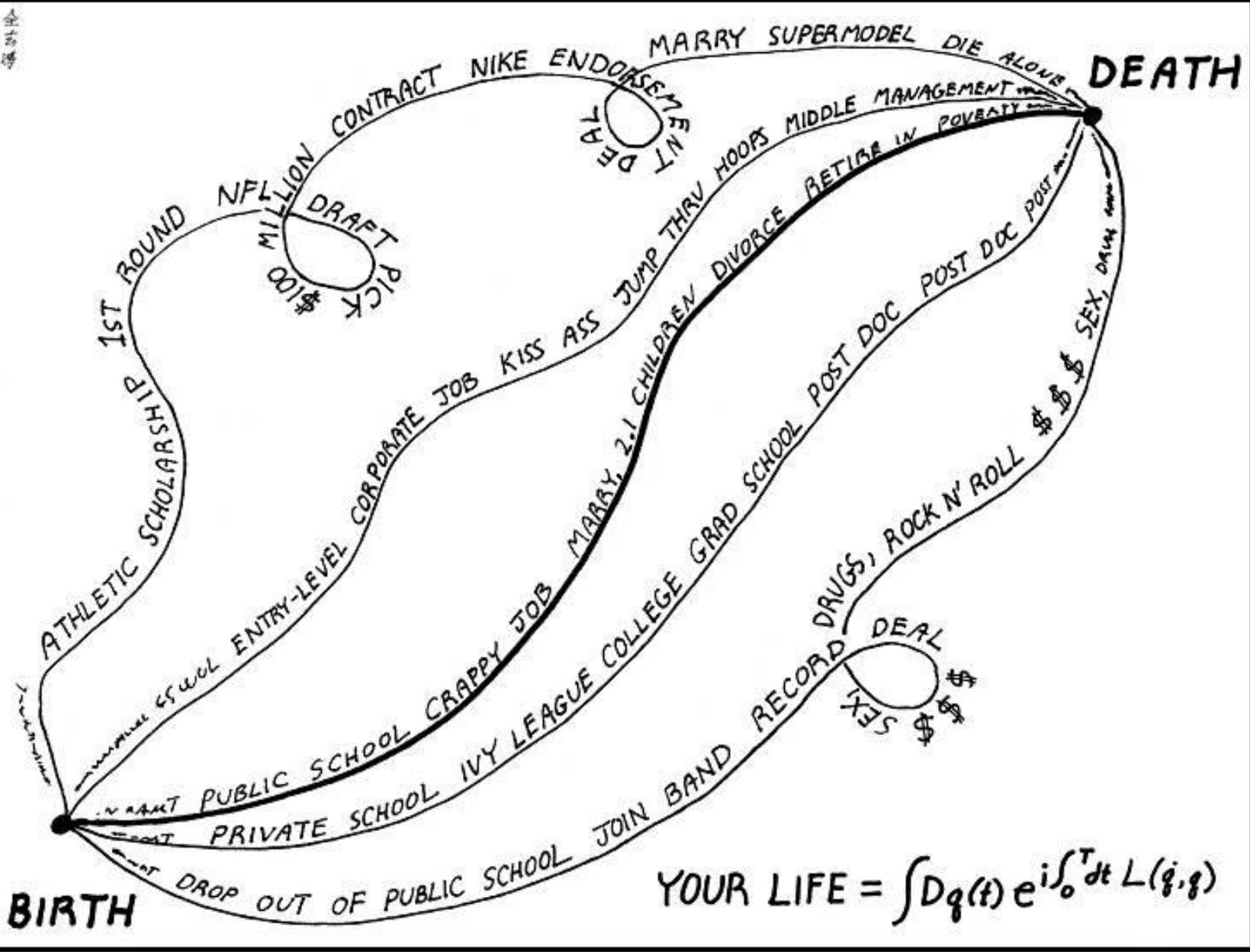
Das CO₂ – Spiel

Ein einfaches Beispiel
in der Struktur des Falke-Taube-Spiels

	High	Low
High	(2-d , 2-d)	(4 , 0)
Low	(0 , 4)	(1 , 1)



Die Dominanz des Menschen in Verbindung mit unserem wirtschaftlichen und sozialen Wertesystem führt zu anhaltenden Krisen. Die Klimakrise ist eines der wichtigsten Beispiele dafür - eine Situation, in der die Menschheit in einer Dilemma-ähnlichen Situation gefangen ist. Das Verhalten jedes Menschen und sein ungehemmter Konsum haben zu gefährlichen Umweltbedingungen und zur globalen Erwärmung geführt und die entstandene Situation könnte unsere Spezies existenziell bedrohen. Jeden Tag wird jeder Mensch mehrmals mit klima-relevanten Entscheidungen konfrontiert, wobei er oft zwischen zwei alternativen Wegen entscheiden kann: Ein hoher oder niedriger CO₂ – Verbrauch; die Strategien (H , L). Der angenehme Nutzen der Strategie H spiegelt sich in dem höheren Auszahlungswert wider und der Mensch ist hier oft in ein gewisses Abhängigkeitsverhältnis hineingeraten. Das negativen Folgen der H-Strategie und das Risiko der Destabilisierung des gesamten Systems wird lediglich indirekt durch einen sozialen/moralischen Druck (hier Parameter d) wahrgenommen.



Parallelwelten Interpretation (H.Everett)

$$|s_1^A s_1^B\rangle$$



Universum 1

$$|s_1^A s_2^B\rangle$$



Universum 2

$$|s_2^A s_1^B\rangle$$



Universum 3

$$|s_2^A s_2^B\rangle$$



Universum 4

The Path Integral Formulation of Your Life

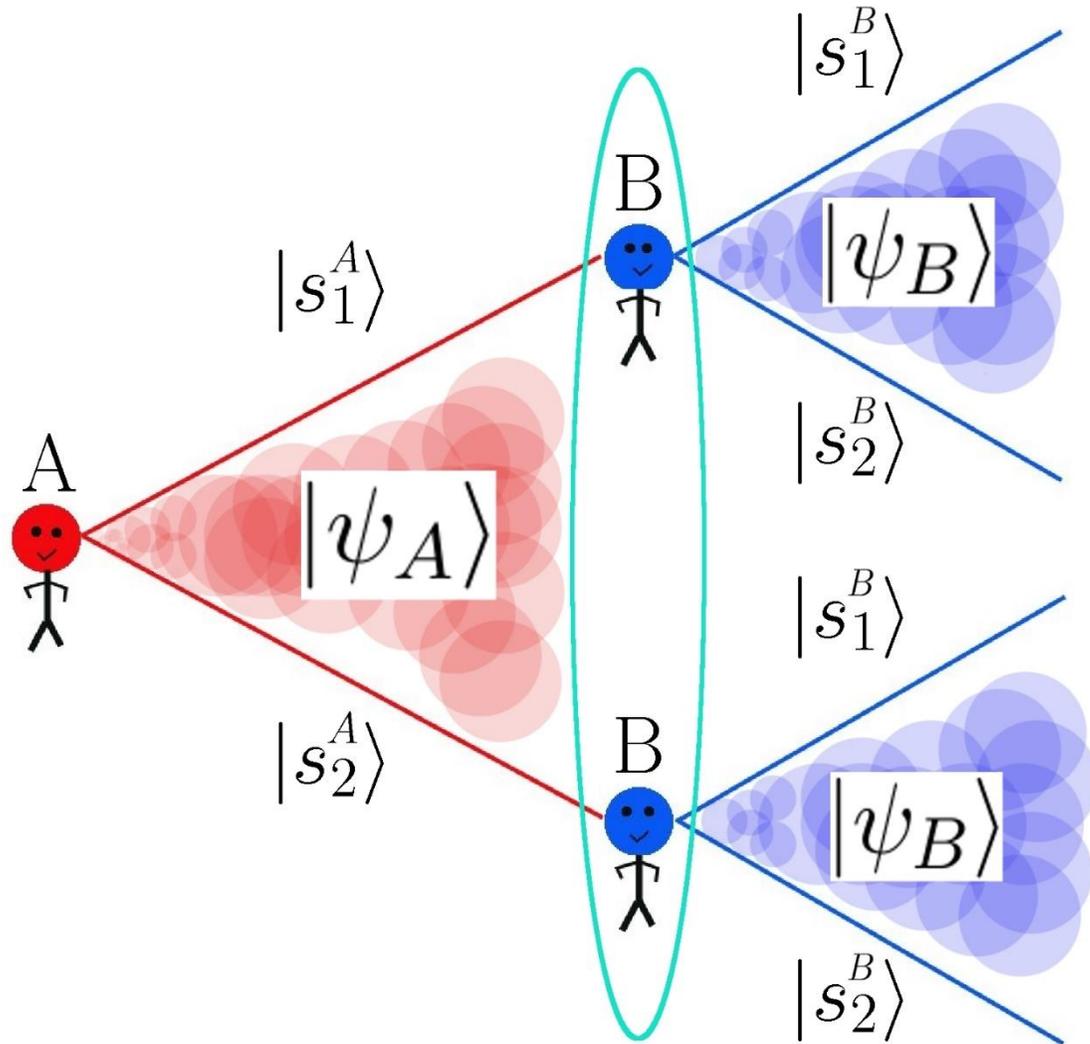
Wie geht es weiter?

Über die evolutionären Dilemmata unserer Population

Das aktuelle Verhalten der Menschheit (unserer Population) ist geprägt von unterschiedlichsten, Dilemma-artigen Entscheidungssituationen (wieder aufflammendes Dilemma des Wettrüstens, Tragik der Almende am Beispiel von klimapolitischen Entscheidungen, ...). Die ursächliche aggressive und selbstbezogene Natur des Menschen wird in Spielen auf sozio-ökonomischen Netzwerken meist durch eine höhere Auszahlung gefördert. Der aktuelle Vertrauensverlust in internationalen politischen Entscheidungssituationen ist in der Theorie der Quantenspiele als eine Abnahme der Verschränkung zu sehen. Sich dadurch herausbildende aggressive „Quasi-Spezies“ handeln nur nach dem egoistischen Prinzip des „Homo Ökonomikus“. Um eine langfristige, friedvolle und nachhaltige Entwicklung unserer Population zu garantieren und Dilemma-artigen Entscheidungssituationen zu entfliehen ist ein gewisses Maß an Verschränkung erforderlich.

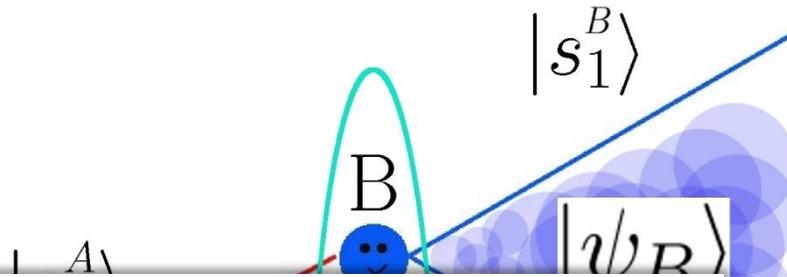
Die verschränkte Spezies-Zustandsfunktion

$$|\Psi\rangle$$



Die verschränkte Spezies-Zustandsfunktion

$$|\Psi\rangle$$



the Wheeler-DeWitt equation says

$$\hat{H}(x)|\psi\rangle = 0$$

where $\hat{H}(x)$ is the Hamiltonian constraint in quantized general relativity and $|\psi\rangle$ stands for the wave function of the universe.

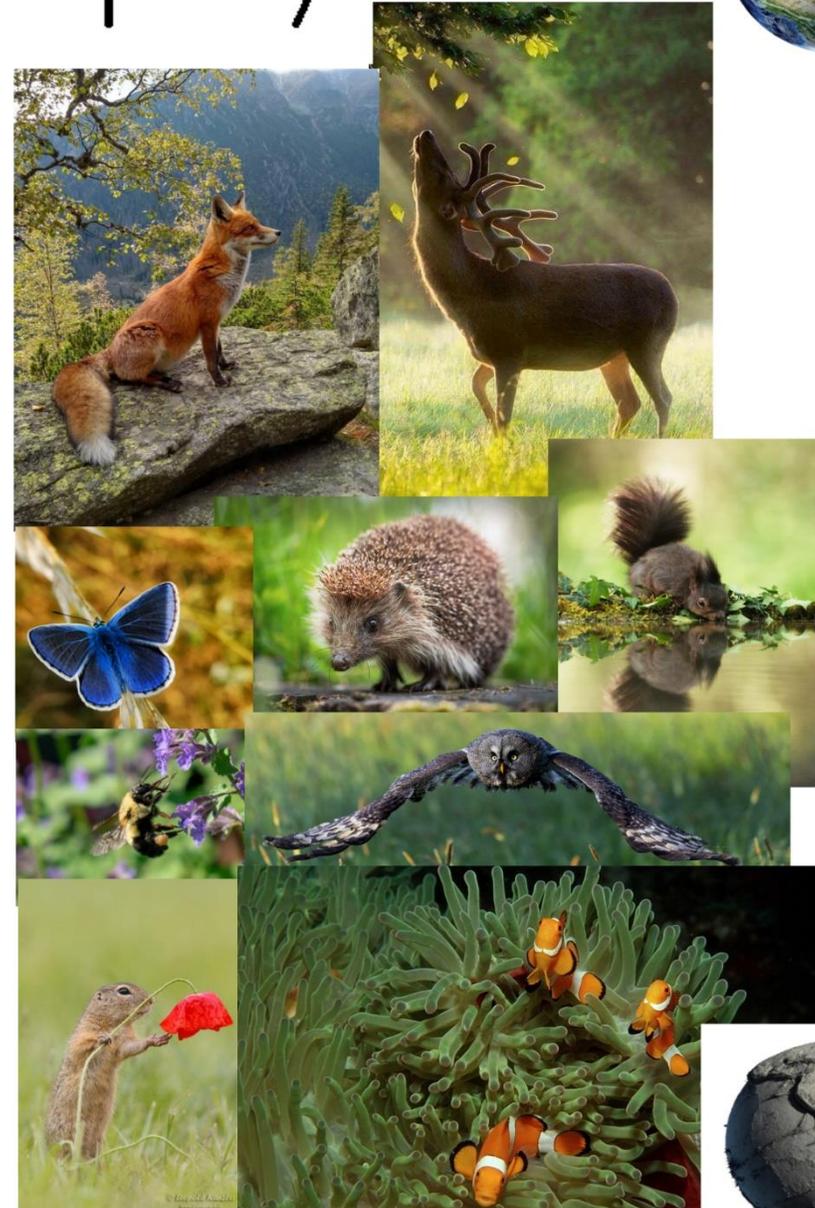
Universal wavefunction

From Wikipedia, the free encyclopedia

The **universal wavefunction** (or **wave function**), a term introduced by Hugh Everett in his PhD thesis^[1] *The Theory of the Universal Wave Function*, informs a core concept in the relative state interpretation^{[2][3]} or many-worlds interpretation^{[4][5]} of quantum mechanics.

$$|\psi_B\rangle$$

$$|s_2^B\rangle$$



Vorlesungsprojekte

In den Vorlesungs- und Übungsterminen am 05. und 12.02.2021 werden Sie an selbst gewählten Vorlesungsprojekten arbeiten. Am letzten Termin, 19.02.2021, können Sie dann Ihre Projektergebnisse kurz präsentieren.

Die studentischen Projekte können alleine oder in Gruppen (bis zu drei Personen) durchgeführt werden.

Überlegen Sie sich bis zur nächsten Vorlesung in welchem Themenbereich Sie Ihr Projekt machen möchten.